Sección de Problemas

☞ *por Diego A. Sulca*

En esta edición vamos a explorar una de las series numéricas más famosas, la serie armónica. En general, dada una sucesión de números racionales o reales positivos $a_1, a_2, a_3, \ldots$, en matemática podemos darle sentido a la suma de todos estos términos. Para ello calculamos las denominadas sumas parciales

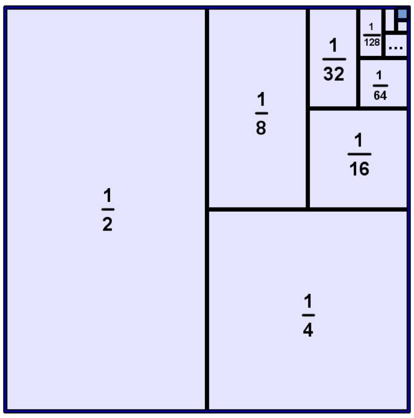
$$a_1, \quad a_1 + a_2, \quad a_1 + a_2 + a_3, \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \ \ldots$$

Notar que a medida que agregamos más términos el resultado se hace cada vez más grande, pues estamos asumiendo que todos los números $a_1, a_2, a_3, \ldots$ son positivos. La suma total $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ es el número al cual se aproximan cada vez más estas sumas parciales. Si por el contrario estos resultados parciales eventualmente superan cualquier barrera o cota que le pongamos, entonces se dice que la suma es infinita.

Por ejemplo,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots = 1$$

En efecto, si S_n denota la suma de los primers n términos entonces $2S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$, por lo que $S_n = 2S_n - S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$. A medida que n avanza, el número $\frac{1}{2^n}$ se hace cada vez más cercano a cero, y por lo tanto S_n se apega cada vez más y más a 1. Una forma geométrica de llegar al mismo resultado es cubriendo el área de un cuadrado de lado 1 con rectángulos de áreas $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$, tal como se muestra en la siguiente figura:



Por otro lado, si sumamos $1+1+1+1+\cdots$ el resultado será sin lugar a dudas infinito. En el primer ejemplo los números que vamos agregando, $\frac{1}{2^n}$, se vuelven cada vez más pequeños, próximos a cero. Nos podríamos preguntar si hay ejemplos de sucesiones $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de términos que se aproximan a cero tal que $a_1+a_2+a_3+\cdots=\infty$. La respuesta es que hay muchísimos y muy interesantes. El ejemplo más destacado y que vamos a explorar en esta serie de problemas es la llamada *serie armónica*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

Problema 1. Mostrar las siguientes desigualdades

(a) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2^n-1} \leq n.$

(b) $1+\frac{n}{2} \leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}+\frac{1}{2^n}$

(Ayuda: en (a), sumar agrupando los términos $\frac{1}{2^{k-1}}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}$. Hacer algo similar en (b))

Problema 2.

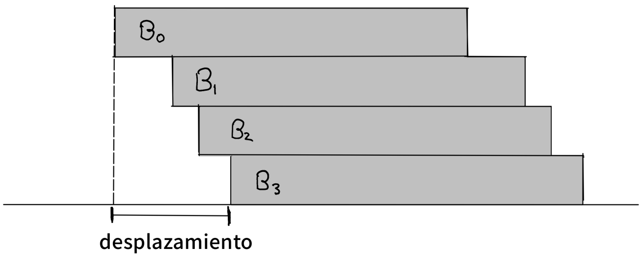
(a) Mostrar que

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=\infty.$$

(b) Sin embargo, la práctica puede indicarnos lo contrario. Sea $S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$. Este número es un número racional, es decir, una fracción. La fracción S_{n+1} se obtiene sumando las fracciones S_n y $\frac{1}{n+1}$. Supongamos que hacer esta suma nos lleva 5 segundos. Mostrar que podríamos estar 100 años sumando sin parar y aún así S_n no podría superar 30.

(c) Suponiendo que a una computadora le lleva 1 nanosegundo ($=10^{-9}$ segundos) sumar $S_n+\frac{1}{n+1}$, mostrar que incluso trabajando de manera ininterrumpida durante 100 años, no podría lograr que S_n supere 63.

Problema 3. (La escalera al cielo) Imaginen que tienen n bloques rectangulares del mismo tamaño y peso, por ejemplo, con dimensiones de 30 cm × 15 cm × 4 cm. Queremos apilar estos bloques, uno sobre otro, con un desplazamiento hacia un mismo lado en cada nivel, formando una especie de escalera. Cada bloque deberá estar ligeramente desplazado respecto al bloque que está debajo, de manera que el bloque superior se extiende un poco más allá del bloque inferior. En la imagen se muestra un ejemplo de 4 bloques apilados (el modo de nombrar a los bloques puede ser una ayuda para el problema a resolver).



¿Cuál es el desplazamiento máximo que se puede lograr (sin que la escalera se caiga)?

Es importante empezar analizando la situación con 3 o 4 bloques para entender mejor el problema. A continuación escribo mi sugerencia para el caso general, pero preferiría que no la leyeran, al menos en el primer intento.

Sea r la mitad del largo de un bloque.

(a) Sea $S_i = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{i}$. Probar para todo $i \geq 2$ que
$$S_1 + S_2 + \cdots + S_{i-1} = iS_{i-1} - (i-1).$$

(b) Supongamos que hemos apilado los n bloques formando una escalera estable. Ponemos un eje de coordenadas x en la base. Llamamos a los bloques $B_0, \ldots, B_{n-1}$ desde arriba hacia abajo. Hacemos que la coordenada x del extremos izquierdo del bloque B_0 sea igual a 0. Llamamos luego x_i a la coordenada x del extremo izquierdo del bloque B_i. Con esta notación, $x_0 = 0$ y el desplazamiento de la escalera es x_{n-1}. Usando argumentos sobre la posición del centro de masa de los bloques $B_0, \ldots, B_{i-1}$ respecto del bloque B_i, probar que $x_i \leq r + \frac{x_0 + \cdots + x_{i-1}}{i}$ para todo $1 \leq i \leq n-1$.

(c) Probar que $x_i \leq rS_i$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$. En particular, el desplazamiento para esta escalera es $\leq rS_{n-1}$.

(d) Dar una escalera de n bloques con desplazamiento igual a rS_{n-1}.

SOLUCIONES

Solución 1.

(a) Notar que la suma $\frac{1}{2^{k-1}} + \cdots + \frac{1}{2^k - 1}$ tiene 2^{k-1} términos todos menores o iguales que $\frac{1}{2^{k-1}}$, por lo tanto es menor o igual a 1. La suma en (a) se compone de n de estos bloques, a decir, 1, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $\frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{7}$, ..., $\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1}$; por lo tanto es menor o igual a la suma de n unos, es decir, n.

(b) La suma $\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}$ tiene 2^{k-1} términos todos mayores o iguales a $\frac{1}{2^k}$, por lo tanto es mayor o igual a $\frac{1}{2}$. La suma en (b) se compone de 1 and n de estos bloques, a decir, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, ..., $\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}$, por lo tanto es mayor o igual que 1 más n veces $\frac{1}{2}$, es decir, $1 + \frac{n}{2}$.

Solución 2.

(a) Para superar un número N primero elegimos n tal que $1 + \frac{n}{2} \geq N$; luego, por (b) del Problema 1, la suma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ supera a N. Por lo tanto las sumas parciales superan eventualmente a cualquier número positivo N, y esto quiere decir que la suma total da infinito.

(b) (y (c)) Supongamos que calcular $S_n + \frac{1}{n+1}$ lleva t segundos. Luego, calcular $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1}$ lleva $(2^n - 2)t$ segundos. Por (a) del Problema 1, en $(2^n - 2)t$ segundos la suma parcial todavía no supera a n.

El número de segundos en 100 años es menor que $100 \cdot 400 \cdot 24 \cdot 60^2 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 2^4 \cdot 5^2 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^4 = 2^{13} \cdot 5^6 \cdot 3^3 = 2^{13} \cdot 5^3 \cdot 5^3 \cdot 3^3 \leq 2^{13} \cdot 2^7 \cdot 2^7 \cdot 2^5 = 2^{32}$.

Supongamos $t = 5$, es decir, sumamos dos fracciones en 5 segundos. Como claramente $2^{32} \leq (2^{30} - 2)5$, en 100 años la suma no supera a 30.

Supongamos ahora que $t = 10^{-9}$. Notar que $2^{32} \cdot 10^9 = 2^{32} \cdot 2^9 \cdot 5^9 = 2^{41}(5^3)^3 \leq 2^{41} \cdot (2^7)^3 = 2^{62} < 2^{63} - 2$. Luego $2^{32} \leq (2^{63} - 2)t$, por lo que en 100 años la suma parcial no supera a 63.

Solución 3.

(a)

$$
\begin{aligned}
S_1 + \cdots + S_{i-1} &= S_{i-1} + S_{i-2} + \cdots + S_1 + 0 \\
&= S_{i-1} + S_{i-1} - \frac{1}{i-1} + S_{i-1} - \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i-2} + \cdots + \\
&+ S_{i-1} - \frac{1}{i-1} - \cdots - \frac{1}{2} + S_{i-1} - \frac{1}{i-1} - \cdots - \frac{1}{2} - \frac{1}{1} \\
&= iS_{i-1} - (i-1)\frac{1}{i-1} - (i-2)\frac{1}{i-2} - \cdots - 2\frac{1}{2} - 1 \\
&= iS_{i-1} - (i-1)
\end{aligned}
$$

(b) La condición para que la escalera no se caiga es que el centro de masa de B_0 debe estar sobre el bloque B_1, y por lo tanto su coordenada x debe ser mayor o igual que x_1; el centro de masa de B_0 y B_1 debe estar sobre el bloque B_2, y por lo tanto su coordenada x debe ser mayor o igual que x_2; y en general, el centro de masa de $B_0, B_1, \ldots, B_{i-1}$ debe estar sobre el bloque B_i, y por lo tanto su coordenada x debe ser mayor o igual que x_i, para todo $1 \leq i \leq n-1$.

Ahora bien, la coordenada x del centro de masa de $B_0, B_1, \ldots, B_{i-1}$ es el promedio de las coordenadas x de los centros de masas de los bloques, es decir

$$\frac{(x_0 + r) + (x_1 + r) + (x_2 + r) + \cdots + (x_{i-1} + r)}{i}.$$

Por lo tanto, la condición del párrafo anterior se traduce en

$$x_i \leq \frac{(x_0 + r) + (x_1 + r) + (x_2 + r) + \cdots + (x_{i-1} + r)}{i} = r + \frac{x_0 + \cdots + x_{i-1}}{i}$$

para todo $i = 1, \ldots, n-1$.

(c) Recordemos que $x_0 = 0$. De lo anterior sale que $x_1 \leq r = rS_1$. Sea $1 < i \leq n-1$, y supongamos que ya hemos probado que

$$x_k \leq rS_k \tag{1.1}$$

para $k = 1, \ldots, i-1$. El siguiente argumento muestra que lo mismo vale para $k = i$. En efecto, por (b), (1.1) y (a) tenemos

$$x_i \leq r + \frac{x_1 + \cdot + x_{i-1}}{i} \leq r + \frac{r(S_1 + \cdots + S_{i-1})}{i} = r + \frac{r(iS_{i-1} - (i-1))}{i} = rS_i$$

Luego podemos decir que la igualdad es válida para todo $i = 1, \ldots, n-1$. En particular, el desplazamiento total es a lo sumo rS_{n-1}.

(d) Ubicando los bloques $B_0, \ldots, B_{n-1}$ de modo que $x_i = rS_i$ para todo i, es fácil ver que el centro de masa de $B_0, \ldots, B_{i-1}$ queda exactamente sobre el extremo izquierdo de B_i. Por lo tanto, esta escalera es estable con desplazamiento rS_{n-1}.