Sección de Problemas

☞ *por Diego A. Sulca*

Para esta edición he elegido una serie de problemas que seguro podrán plantearlos en cualquier reunión social, teniendo garantizado un debate en el que surgirán ideas de las más variadas hasta dar con las soluciones. El primero es sutil, y más que la solución en sí, lo interesante es la discusión que se abre al intentar resolverlo en el aire. Lo he adaptado a una situación que me tocó vivir, pero el problema concreto se enuncia en a lo sumo dos líneas. Los dos siguientes son ejercicios básicos de lo que se llama "Lógica Proposicional", una rama de la Lógica. Por supuesto, para resolverlos no hace falta nada de Lógica Proposicional, pero siempre está bueno saber que hay toda un área de estudio dedicada a eso. Finalmente, el último problema es el menos interesante a nivel matemático, pero quizás es el más importante a nivel informativo. Nos recuerda la importancia de elegir contraseñas seguras.

Problema 1. En los aeropuertos grandes es común encontrar cintas transportadoras que la gente usa ya sea para avanzar más rápido, o bien para descansar de caminar sin dejar de avanzar. Para quienes no las conocen la forma más rápida que se me ocurre para describirlas es decir que son como una escalera mecánica horizontal. Normalmente, la velocidad de estas cintas es bastante menor que la velocidad a la que camina una persona promedio (digamos la mitad, para fijar una idea).

En estos días pasé por un aeropuerto en donde habían dos cintas transportadoras en paralelo. Solo una de ellas funcionaba, la otra estaba quieta y debía ser para caminar en la dirección opuesta. Yo estaba con mi hija en brazos, y para hacer un poco de tiempo nos metimos a la cinta que funcionaba. En la cinta yo caminaba a la velocidad de siempre, pero ahora respecto de la cinta (de modo que para alguien parado afuera de la cinta nos movíamos más rápido de lo usual). A mi hija le encantó el efecto, a tal punto que cuando salimos de la cinta en el otro extremo quiso que volviéramos por la cinta. Pero como les dije antes, la cinta que debía servir para volver no funcionaba. Como no había gente en ese momento, a modo de diversión decidí que volviéramos por la cinta que sí funcionaba, a pesar de que esta se movía en la dirección opuesta. Al igual que antes, caminaba a la misma velocidad de siempre, pero respecto de la cinta (de modo que para alguien parado afuera de la cinta ahora nos movíamos más lento).

Cuando logramos salir al extremo inicial, mi hija quiso que repitiéramos el viaje completo. Sin embargo esta vez había gente. Para entretenerla decidí que repitiéramos el viaje pero por la cinta que no funcionaba. Es decir, fuimos y volvimos caminando por la cinta que no funcionaba.

¿Qué nos llevó más tiempo, ir y volver en la cinta que funcionaba, o ir y volver en la cinta que no funcionaba?

Problema 2. Imaginen que caminan hacia un pueblo donde se sabe que cada habitante o bien siempre dice la verdad o bien siempre miente. Además en este pueblo se habla un idioma del cual lo único que ustedes entienden es SÍ o NO. Mientras caminan se dan cuenta que más adelante el camino se bifurca y no saben cuál de los dos caminos deberán tomar. De repente ven a un habitante del pueblo que viene caminando en la dirección opuesta. El señor viene muy apurado de modo que solo tienen tiempo para escribir una sola pregunta en el traductor, y además quieren que la respuesta a la pregunta sea SÍ o NO, pues es lo único que van a entender cuando el señor responda ¿Qué pregunta harían?

Problema 3. Hace unos días hubo un homicidio y detuvieron a tres sospechosos: Antonio, Benito y Carlos. Al interrogarlos, Antonio dijo ”Yo no lo hice. La víctima era un conocido de Benito, y Carlos lo odiaba". Benito dijo ”Yo no lo hice. Ni si quiera lo conocía. Además, no estuve en la ciudad toda esa semana". Por su parte, Carlos dijo ”Yo no lo hice. Vi a Antonio y Benito con la víctima ese día; uno de ellos lo habrá hecho". Asumiendo que dos de los hombres son inocentes y que están diciendo la verdad, ¿quién es el culpable?

Problema 4. Hoy en día se remarca mucho la importancia de tener contraseñas seguras para nuestras cuentas de correo electrónico, redes sociales, etc. Normalmente se pide que la contraseña tenga entre 8 y 12 caracteres (y a veces más), y que use dígitos, letras mayúsculas y minúsculas, y algunos de los caracteres especiales como *, % ,$,! ,@ ,# , (,).

Los hackers disponen de computadores que les permiten correr a fuerza bruta aproximadamente 3 millones de combinaciones por segundo con el fin de dar con la contraseña.

1. ¿Cuánto le lleva a un hacker develar una contraseña de 8 dígitos, y que usa solo los números 0,1,2,...,9?
2. Idem con una contraseña de 8 dígitos que solo usa números y letras minúsculas.
3. Idem con una contraseña de 8 dígitos que usa números, letras minúsculas y mayúsculas, y caracteres especiales.
4. Idem con una contraseña de 12 dígitos que solo usa números y letras minúsculas.

SOLUCIONES

Solución 1. Una de las respuestas rápidas podría ser que se tarda el mismo tiempo pues la velocidad que me da la cinta a la ida me la quita a la vuelta, haciendo un aporte neto nulo. Otra posible respuesta sería que depende de la velocidad de la cinta, pues si nos vamos al caso extremo en que la cinta viaja a la velocidad que camino, entonces me sería imposible avanzar en la vuelta si mantengo la velocidad usual.

Matemáticamente, la solución es simple y quizás menos entretenida.

Calculemos primero el tiempo empleado al ir y volver por la cinta que funciona. Supongamos que V es la velocidad a la que camino normalmente, l la longitud de la cinta, y v la velocidad de la cinta. Sea t_1 el tiempo usado en la ida y sea t_2 el tiempo empleado en la vuelta. Mi velocidad a la ida es $V+v$ y a la vuelta es $V-v$. Se cumplen las relaciones $V+v=\frac{l}{t_1}$ y $V-v=\frac{l}{t_2}$. Por lo tanto, el tiempo total empleado es

$$t_1+t_2=\frac{l}{V+v}+\frac{l}{V-v}=\frac{2Vl}{V^2-v^2}$$

Calculemos ahora el tiempo T empleado en ir y volver por la cinta que no funciona. Se tiene $V=\frac{2l}{T}$, por lo que $T=\frac{2l}{V}$. Comparando

$$\frac{2Vl}{V^2-v^2}=\frac{2l}{V-\frac{v^2}{V}} \qquad \text{con} \qquad \frac{2l}{V}$$

observamos que se tarda más yendo y volviendo por la cinta que sí funciona.

Solución 2. No nos conviene preguntarle, por ejemplo, si el camino de la izquierda es el correcto, pues no sabemos si este lugareño es de los que siempre mienten o de los que siempre dicen la verdad. Podríamos preguntarle sobre algo evidente para descubrir si es de los que siempre mienten o de los que siempre dicen la verdad, pero nos quedaríamos sin la posibilidad de preguntar sobre el camino correcto, pues solo podemos hacerle una pregunta.

Una pregunta podría ser: ¿Es cierto que si te pregunto cual es el camino correcto vas a responder que es el de la izquierda?

Si el señor responde que SÍ, entonces el camino correcto es el de la izquierda. Esto es evidente si el señor es de los que siempre dicen la verdad. Si en cambio es de los que siempre mienten, al responder que SÍ nos está mintiendo, y por lo tanto si le preguntáramos si el camino de la izquierda es el correcto nos respondería que NO. Pero como nos estaría mintiendo, entonces el camino de la izquierda sería realmente el correcto.

Si el señor responde que NO, entonces el camino correcto es el de la derecha. Esto es evidente si el señor es de los que siempre dicen la verdad. Si en cambio es de los que siempre mienten, al responder que NO nos está mintiendo, y por lo tanto si le preguntáramos si el camino de la izquierda es el correcto nos respondería que SÍ. Pero como nos estaría mintiendo, entonces el camino correcto debe ser el de la derecha.

Solución 3. Las declaraciones de Antonio y Benito son contradictorias, por lo que no pueden ser ambos inocentes. De manera similar, las declaraciones de Benito y Carlos son contradictorias, por lo que no pueden ser ambos inocentes. Esto implica que el asesino está en la intersección $\{Antonio, Benito\} \cap \{Benito, Carlos\}$. Luego el asesino debe ser Benito.

Solución 4.

1. Hay 10^8 posibles contraseñas de 8 dígitos que solo usan números. Si dividimos por el número de contraseñas que la computadora puede chequear por segundo obtenemos $10^8/(3 \cdot 10^6) \approx 33$. Es decir, en 33 segundos un hacker puede encontrar la contraseña.
2. Si en una contraseña de 8 dígitos usamos números (10) y letras minúsculas (26), el número de contraseñas posibles es 36^8. Si dividimos por el número de contraseñas que la computadora puede chequear por segundo obtenemos $36^8/(3 \cdot 10^6) \approx 940369$. Es decir, en 940369 segundos un hacker puede averiguar nuestra contraseña. Esto es approximadamente 11 días.
3. Si nuestra contraseña tiene 8 dígitos y usa números (10), letras minúsculas (26) y mayúsculas (26), y caracteres especiales (8), el número de contraseñas posibles es 70^8. En este caso al hacker le llevaría $70^8/(3 \cdot 10^6) \approx 192000000$ segundos. Esto da aproximadamente 6 años.
4. Si en una contraseña de 12 dígitos usamos números (10) y letras minúsculas (26), el número total de contraseñas es 36^{12}. Haciendo la cuenta usual, obtendremos que en 50 mil años el hacker puede averiguar la contraseña.

Cabe aclarar que este cálculo irá variando año tras año a medida que aparezcan computadoras más potentes. Esto tampoco quita que el hacker averigüe la contraseña en menos tiempo. Por ejemplo, el hacker podría asumir que la contraseña usa a lo sumo un carácter especial y a lo sumo una mayúscula y dar con la contraseña mucho antes si la misma tiene estas características.
