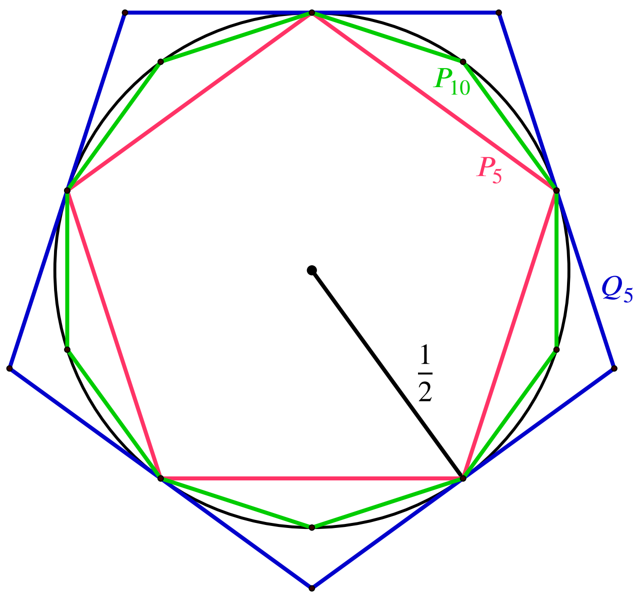
por Leandro Cagliero y Ricardo Podestá

los perímetros de los polígonos regulares inscriptos y circunscriptos a una circunferencia se obtienen sacando promedios?

1. Introducción

Efectivamente, esto es así, aunque no se trata del promedio de toda la vida, si no que estos perímetros se obtienen usando la media armónica y la media geométrica.

Sea $C_{\frac{1}{2}}$ una circunferencia de radio $\frac{1}{2}$, es decir de diámetro 1, sea P_n un polígono regular de n lados inscripto en $C_{\frac{1}{2}}$ y sea Q_n un polígono regular de n lados circunscripto a $C_{\frac{1}{2}}$. En la figura vemos dibujados un pentágono y un decágono (regulares) inscriptos y un pentágono regular circunscripto.



Llamamos con letras minúsculas a los correspondientes perímetros, es decir que

$$p_n = \text{Perímetro}(P_n) \quad \text{y} \quad q_n = \text{Perímetro}(Q_n).$$

En esta nota queremos estudiar propiedades de esta sucesión de perímetros con el objetivo final de obtener la longitud de la circunferencia $C_{\frac{1}{2}}$ que, por definición, es π. Vale la pena observar que, por una cuestión de proporcionalidad, si consideráramos polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia C_r de radio r, entonces sus perímetros serían rp_n y rq_n, respectivamente.

El siguiente teorema establece dos propiedades fundamentales de p_n y q_n y, en particular, nos dice cómo calcular estos perímetros cuando duplicamos la cantidad de lados.

Teorema.

En las notaciones previas tenemos:

(*a*) $q_{2n} = \dfrac{2p_nq_n}{p_n + q_n}$ y $p_{2n} = \sqrt{p_nq_{2n}}$.

(*b*) $\{p_n\}$ es una sucesión creciente, $\{q_n\}$ es una sucesión decreciente, y $p_n < q_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(*c*) $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} q_n$.

Hagamos unos breves comentarios sobre el teorema.

(1) Las fórmulas de la parte (*a*) tienen carácter recursivo, es decir que sabiendo p_n y q_n podemos encontrar q_{2n}, y luego conociendo p_n y q_{2n} obtenemos p_{2n}. Así, para arrancar, necesitamos saber p_{n_0} y q_{n_0} para cierto valor inicial de n_0. Por ejemplo, si comenzamos sabiendo las medidas de los cuadrados inscritos y circunscritos podemos ir sucesivamente calculando los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos de 8, 16, 32, ... lados. Similarmente, si calculamos el perímetro de los triángulos equiláteros inscritos y circunscritos podemos ir sucesivamente calculando los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos de 6, 12, 24, 48, ... lados.

(2) La propiedad (*c*) es, en definitiva, la que nos permite decir que π es (por definición) el límite de estas sucesiones.

(3) Las fórmulas de la parte (*a*), corresponden a la *media armónica* y la *media geométrica* respectivamente. Hablaremos brevemente de estas medias.

2. Medias armónica, geométrica y aritmética

A continuación, repasamos brevemente las definiciones de media armónica y geométrica, y luego pasamos a la demostración del teorema.

Media armónica. Dados dos números positivos x e y, la *media armónica* (o promedio armónico) de ellos es “el inverso del promedio de sus inversos”, es decir:

$$M_{arm}(x, y) = \left(\frac{x^{-1} + y^{-1}}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\dfrac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{2}},$$

que desarrollando resulta

$$M_{arm}(x, y) = \frac{2xy}{x + y}.$$

Un caso típico en donde aparece el promedio armónico es cuando queremos "promediar velocidades". Por ejemplo:

> Supongamos que salimos a dar una vuelta en bicicleta, saliendo desde la ciudad A hasta la ciudad B, y luego regresamos. Como B está más alta que A, fuimos de A a B a un promedio de 16 km/h, pero regresamos de B a A a un promedio de 22 km/h. ¿Cuál fue nuestra velocidad promedio en todo el paseo?

Te invitamos a resolver el problema. A primera vista podría parecer que falta el dato de la distancia entre A y B, pero no es necesaria (plantear el problema suponiendo que la distancia es d, la respuesta no dependerá de d). A quienes se sientan tentados a pensar que la velocidad promedio fue de 19 km/h, les adelantamos que no lo es, y para verlo intuitivamente resulta que en el recorrido, anduvimos más tiempo a 16 km/h que a 22 km/h, y eso hace que la velocidad media sea menor a 19 km/h. La respuesta es, efectivamente, la media armónica de 16 y 22, que es aproximadamente 18,5 km/h.

Media geométrica. Dados dos números positivos x e y, la *media geométrica* (o promedio geométrico) de ellos es "la raíz cuadrada del producto de ellos", es decir:

$$M_{geo}(x, y) = \sqrt{xy}.$$

Este promedio aparece cuando promediamos escalas. Por ejemplo:

> Supongamos que una colonia de bacterias se duplica en el 1er día, pero se triplica en el 2do. En promedio, ¿con qué factor de escala diario ha crecido la colonia de bacterias?

Nuevamente te invitamos resolver el problema por tu cuenta. Si querés intentarlo ¡no leas el siguiente párrafo! Como el que avisa no traiciona, ahora damos la solución al problema. Si originalmente la colonia tenía β bacterias, luego del 1er día tiene $2 \times \beta$, y luego del 2do día tiene $3 \times 2 \times \beta$ bacterias. El problema pregunta el factor de escala diario k que deberíamos aplicar para obtener el mismo resultado. Esto obliga a que $k \times k \times \beta = 3 \times 2 \times \beta$, es decir que $k = \sqrt{2 \times 3} \approx 2{,}45$, que es la media geométrica de 2 y 3.

Notar que lo que dice (a) del teorema es que las longitudes de los perímetros de los polígonos regulares inscriptos y circunscriptos de $2n$ lados se obtienen como la media armónica y geométrica de los perímetros de los polígonos regulares inscriptos de n lados y circunscriptos de n y $2n$ lados, respectivamente, es decir

$$q_{2n} = M_{arm}(p_n, q_n) \qquad \text{y} \qquad p_{2n} = M_{geo}(p_n, q_{2n}).$$

Tanto la media armónica como la media geométrica son menores que la *media aritmética* (que es el promedio usual de x e y):

$$M_{aritm}(x,y) = \frac{x+y}{2},$$

Es más, en realidad tenemos $M_{arm} \leq M_{geo} \leq M_{aritm}$, es decir

$$\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

y te dejamos la tarea de demostrar estas desigualdades.

3. Demostración del Teorema

Después de todo lo dicho, estamos en condiciones de encarar la prueba del teorema.

Llamemos α_n a la medida del ángulo central del polígono regular de n lados y sean, respectivamente, $\ell(P_n)$ y $\ell(Q_n)$ las medidas de los lados de P_n y Q_n. Tenemos así que

$$p_n = n\,\ell(P_n) \qquad \text{y} \qquad q_n = n\,\ell(Q_n).$$

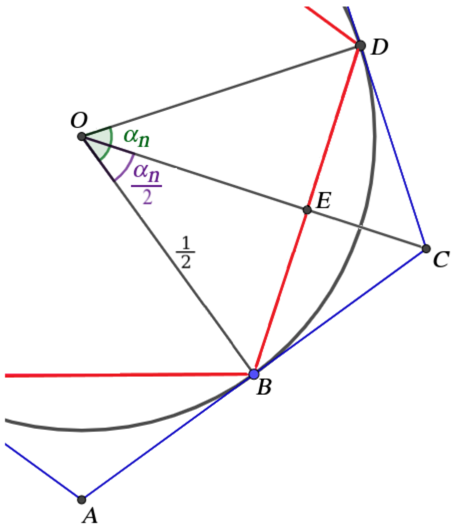
Comenzamos obteniendo $\ell(P_n)$ y $\ell(Q_n)$ en términos del ángulo α_n.

En la figura podemos ver que

$$\ell(P_n) = 2\overline{BE} = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)$$

y

$$\ell(Q_n) = 2\overline{BC} = 2\tan\left(\frac{\alpha_n}{2}\right) = 2\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)}.$$



Al duplicar la cantidad de lados, el ángulo del polígono se divide en dos, así que

$$\ell(P_{2n}) = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha_n}{4}\right)$$

y

$$\ell(Q_{2n}) = 2\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha_n}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha_n}{4}\right)}.$$

Ahora vamos a relacionar $\ell(P_n)$ y $\ell(Q_n)$ con $\ell(P_{2n})$ y $\ell(Q_{2n})$ utilizando principalmente las fórmulas del “seno y coseno del doble del ángulo”:

$$\mathrm{sen}(x) = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \text{y} \qquad \cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right). \tag{3.1}$$

De este modo tenemos

$$\ell(P_n) = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha_n}{2}\right) = 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha_n}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha_n}{4}\right),$$

es decir

$$\ell(P_n) = 2 \cdot 2^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha_n}{4}\right) \frac{\cos\left(\frac{\alpha_n}{4}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_n}{4}\right)} = 2\,\frac{\ell(P_{2n})^2}{\ell(Q_{2n})}.$$

Por lo tanto, obtenemos que

$$\ell(P_{2n}) = \sqrt{2\ell(P_n)\ell(Q_{2n})}. \tag{3.2}$$

Por otro lado,

$$\frac{\ell(P_n)\ell(Q_n)}{\ell(P_n)+\ell(Q_n)} = \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)\, 2\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)}}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_n}{2}\right) + 2\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)}} = 2\,\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)+1},$$

y aplicando las fórmulas (3.1) obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\ell(P_n)\ell(Q_n)}{\ell(P_n)+\ell(Q_n)} &= 2\,\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_n}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha_n}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha_n}{4}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha_n}{4}\right)+1} \\ &= 2\,\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_n}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha_n}{4}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\alpha_n}{4}\right)} = 2\,\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_n}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha_n}{4}\right)} = \ell(Q_{2n});\end{aligned}$$

es decir que

$$\ell(Q_{2n}) = \frac{\ell(P_n)\ell(Q_n)}{\ell(P_n)+\ell(Q_n)}. \tag{3.3}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que

$$p_n = n\,\ell(P_n) \qquad \text{y} \qquad q_n = n\,\ell(Q_n)$$

y que, por lo tanto,

$$p_{2n} = 2n\,\ell(P_{2n}) \qquad \text{y} \qquad q_{2n} = 2n\,\ell(Q_{2n})$$

las fórmulas (3.2) y (3.3) implican las fórmulas de la parte (a) del teorema.

Dejamos la parte (b) como tarea para el lector (aunque no es tan sencillo) y pasamos a la parte (c). En la figura anterior, usando la desigualdad triangular, obtenemos que

$$\overline{CD} < \overline{DE} + \overline{CE}$$

y por lo tanto

$$q_n - p_n = n\left(2\overline{CD} - 2\overline{DE}\right) \le 2n\,\overline{CE}.$$

Como los triángulos $\triangle OED$ y $\triangle DEC$ son semejantes, resulta que

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DO}} = \overline{DE}$$

y por lo tanto

$$q_n - p_n \leq 2n \cdot \overline{CD} \cdot \overline{DE} = \frac{2}{n} p_n q_n.$$

Dado que $p_n, q_n \leq 6$ para todo n (queda para el lector justificar esto) resulta que

$$0 < q_n - p_n < \frac{12}{n}$$

para todo n y esto demuestra que $\lim_{n\to\infty}(q_n - p_n) = 0$. Teniendo en cuenta que ambas sucesiones son monótonas y acotadas, resulta que ambas convergen y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} p_n,$$

como queríamos probar. Esto implica que la longitud de la circunferencia de radio 1, que por definición es π se obtiene como límite de estas longitudes de perímetros regulares inscriptos y circunscriptos.

Para concluir, usemos las fórmulas de la parte (a) del teorema para aproximar el valor de π.

Calculamos π

Por ejemplo, es sencillo calcular

$$p_4 = 2\sqrt{2} \approx 2{,}828 \quad \text{y} \quad q_4 = 4.$$

B6 fx =RAIZ(B5*C6)

	A	B	C
1	n	p_n	q_n
2	4	2,828427125	4
3	8	3,061467459	3,313708499
4	16	3,121445152	3,182597878
5	32	3,136548491	3,151724907
6	64	3,140331157	3,144118385
7	128	3,141277251	3,14222363
8	256	3,141513801	3,141750369
9	512	3,14157294	3,141632081
10	1024	3,141587725	3,14160251
11	2048	3,141591422	3,141595118
12	4096	3,141592346	3,14159327

C6 fx =(2*B5*C5)/(B5+C5)

	A	B	C
1	n	p_n	q_n
2	4	2,828427125	4
3	8	3,061467459	3,313708499
4	16	3,121445152	3,182597878
5	32	3,136548491	3,151724907
6	64	3,140331157	3,144118385
7	128	3,141277251	3,14222363
8	256	3,141513801	3,141750369
9	512	3,14157294	3,141632081
10	1024	3,141587725	3,14160251
11	2048	3,141591422	3,141595118
12	4096	3,141592346	3,14159327

Vemos en la planilla que con 2048 lados, podemos estar estamos seguros de que 3,1495 indican los primeros 5 dígitos de π.

La idea de aproximar la longitud de la circunferencia a través de polígonos regulares de muchos lados es la piedra basal del llamado *método de exhaución* de Arquímedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.). Arquímedes es considerado uno de los científicos más destacados de la antigüedad, muy especialmente en matemática. A tal punto, que la famosa medalla Fields tiene grabado su rostro en una de sus caras.