Revista de Educación Matemática
Volumen 39, N° 2 (2024), páginas 37–73
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Artículo de Matemática

LAS PROPIEDADES ÚNICAS DEL 73

Ricardo A. Podestá

Dedicado a Roberto Miatello

Resumen. Primero mostramos un gran número de propiedades del número 73 y su reverso el 37. Luego contamos la Conjetura de Sheldon que dice que el 73 es el único primo que satisface dos propiedades concretas y damos una idea de la demostración de Spicer y Pomerance. Finalmente, consideramos números de Sheldon en sucesiones enteras.

Palabras clave: Números primos, reversos de números, Conjetura de Sheldon.

Abstract. First we present several properties of the prime 73 and its reverse 37. Next, we introduce the Sheldon conjecture stating that 73 is the only prime satisfying two specific properties. Later, we give an idea of the proof of the conjecture given by Pomerance and Spicer. Finally, we consider Sheldon numbers defined on integer sequences.

Keywords: Prime numbers, reverse numbers, Sheldon conjecture.

§1. Introducción

Desde muy pequeño me gustan los números impares, pero no sé por qué, 'feeling' que le dicen. Y algunos impares me gustaban más que otros, como el 3, el 7 o el 11, pero no el 15, y no sabía por qué. Desde que cursé Álgebra I de la Licenciatura en Matemática en FaMAF (UNC) me gustan mucho los números primos y entonces entendí por qué algunos impares sí y por qué otros no. Nací en el '73 y soy hincha del Rojo. Ese año *Independiente* de la mano (del pie diría) del *Bocha* ganó todo (Copa Libertadores, Copa Interamericana, Copa Intercontinental). ¡Me encanta el 73!

También me gustan *Los Simpsons* y *The Big Bang Theory*. En los episodios de estas series, además de críticas mordaces a la sociedad, suele haber algunos guiños a temas de matemática y física actuales de investigación, muy interesantes, por lo general conjeturas. Esta vez, lo que me llamó la atención es que en la serie The Big Bang Theory, allá por el 2010 y justamente en el Capítulo 73, el personaje *Sheldon Cooper* afirma rotundamente que 73 *es el mejor número de todos* y da sus motivos. Resulta que 73 es un número primo que tiene ciertas propiedades muy interesantes, en particular en relación a su reverso 37, que también es primo.

Implícito en el diálogo con sus colegas estaba que 73 es el único número primo con esas propiedades. Este hecho seguramente llamó la atención de algunos matemáticos seguidores de la serie. En particular, la de Chris Spicer y colaboradores, que en 2015 estudiaron un poco más estas propiedades y enunciaron la que llamaron la *Conjetura de Sheldon*, que dice que 73 es el único primo con esas propiedades. Unos años mas tarde, en 2019, el mismo Chris junto a Carl Pomerance pudieron probar la Conjetura de Sheldon.

La idea de este artículo es, por un lado, dar cuenta de algunas propiedades del número 73 (y su amigo el 37) que me parecen curiosas y fascinantes. Por otro lado, explicar de forma clara la Conjetura de Sheldon y esbozar la idea de la demostración de la prueba de Spicer y Pomerance sobre dicha conjetura. O sea, mostrar por qué, desde ahora, yo también pienso que 73 es un número super copado (como el rojo). Y que ya no es que me guste mucho, si no que desde ahora soy uno de sus fans.

§2. Propiedades del número 73 y su reverso 37

El número 73 es *primo*, es decir sus únicos divisores positivos son el 1 y el 73. Es el primo número 21 en la lista infinita de primos, cosa que se denota por

$$73 = p_{21}.$$

O sea, en general p_n denota el n-ésimo primo natural. Además, $21 = 7 \cdot 3$, por lo que podemos escribir mas sugestivamente

$$73 = p_{7\cdot 3}.$$

De hecho, 73 es un primo gemelo. Los *primos gemelos* son, por definición, pares de números primos que difieren en 2, es decir primos de la forma

$$\{p, p+2\}$$

con $p \in \mathbb{N}$. Los primeros pares de primos gemelos son

$$\{3,5\},\ \{5,7\},\ \{11,13\},\ \{17,19\},\ \{29,31\},\ \{41,43\},\ \{59,61\},\ \{71,73\},\ etc.$$

Aunque parezca raro, no se sabe si existen infinitos pares de primos gemelos. La Conjetura de los Primos Gemelos asegura que sí. El par más grande conocido es

$$2.996.863.034.895 \times 2^{1.290.000} - 1 \quad \text{y} \quad 2.996.863.034.895 \times 2^{1.290.000} + 1,$$

con 388.342 cifras decimales cada uno.

Como $73 = 64 + 8 + 1$, tenemos las descomposiciones en sumas de cuadrados y cubos

$$73 = 8^2 + 3^2 = 4^3 + 2^3 + 1^3$$

(estas sumas de dos cuadrados y tres cubos son únicas) y además que

$$(2.1) \qquad 73 = 2^6 + 2^3 + 2^0 = (1001001)_2 \quad \text{y} \quad 73 = 8^2 + 8^1 + 8^0 = (111)_8$$

son sus expresiones en sistema binario y octal.

Siguiendo con la representación binaria, de los 7 dígitos binarios que representan al 73, 3 son 1's. Mas aún, el índice primo de 73 es 21 y en binario tenemos

$$(2.2) \qquad 21 = (10101)_2 = (111)_2 \cdot (11)_2.$$

Además, $21 = 3 \cdot 7$ y $7 + 3 = 10$ y tenemos la relación

$$(21)_3 = (7)_{10},$$

que más sugestiva y simétricamente podemos escribir

$$(3 \cdot 7)_3 = (7)_{3+7}.$$

Resulta que 373 también es un primo, el número $74 = 37 \cdot 2$. ¡Cuántas coincidencias!

Como ya habrás notado, las expresiones binarias y octales en (2.1) y (2.2) son todas capicúas (son sus propios reversos). Sin embargo $(73)_{10}$, i.e. 73 en sistema decimal, no es capicúa. Su reverso es el 37, que es el duodécimo primo, o sea

$$37 = p_{12}.$$

Notar que el índice primo de 37 que es 12 es el reverso del índice primo del 73 que es 21. Volveremos más adelante sobre esta curiosidad que se las trae, y que ya hace un poco de cosquillas. Más aún, los cuadrados de los índices primos de 37 y 73 también son reversibles:

$$12^2 = 144 \qquad \text{y} \qquad 21^2 = 441.$$

Creer o reventar.

A partir de ahora mostraremos una gran cantidad de sorprendentes (para mí) propiedades de este par de números. Sin embargo, no puedo dejar de mencionar esta curiosidad del 37 y su índice 12. Cuenta la anécdota que cuando Hardy fue a visitar a Ramanujan al hospital allá por 1917 éste le dijo: 'he venido en un taxi cuyo número 1729 me parece que no tiene ninguna propiedad interesante'; a lo que Ramanujan respondió: 'No, para nada, es muy interesante, es el menor número que se puede escribir como suma de dos cubos de enteros positivos de dos formas distintas'. En efecto

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3.$$

Notar que $1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$ y que si no se aclara que la suma es con cubos de enteros positivos, entonces el menor número que satisface eso es $1729/19 = 91$ pues

$$7 \cdot 13 = 91 = 6^3 + (-5)^3 = 4^3 + 3^3.$$

Hardy quedó impresionado por la anécdota y al contársela a Littlewood este contestó: 'todo número entero es uno de los amigos personales de Ramanujan'. Bueno, resulta que 1729 es el menor número que puede representarse por la forma cuadrática de Lösch

$$a^2 + ab + b^2$$

de cuatro formas distintas: $(a, b) = (25, 23), (32, 15), (37, 8), (40, 3)$. O sea, 1729 es minimal satisfaciendo estas dos propiedades que involucran cuadrados y cubos y la expresión

$$1729 = 37^2 + 8 \cdot 37 + 8^2 = 1^3 + 12^3$$

involucra tanto a 37 como a su índice primo 12.

Propiedades aritméticas básicas de 37 y 73. Ahora veremos algunas curiosidades y propiedades en común de estos números, en particular, aquellas que los ligan o relacionan.

Para empezar, tenemos que

$$73 = 2 \cdot 37 - 1,$$

lo cual dice que 37 es el promedio de los divisores de su reverso: $37 = \frac{1+73}{2}$. Además, se tiene que

$$73 = 37^2 - 36^2 = (37 - 36)(37 + 36) = 36 + 37.$$

O sea, 73 es diferencia de cuadrados (involucrando a su reverso) y es un número *amable* (polite) por ser suma de números consecutivos (involucrando a su reverso). El 37 también es un número amable pues $37 = 18 + 19$. Además, es diferencia de cubos consecutivos

$$37 = 4^3 - 3^3 = 64 - 27$$

lo que lo convierte en un primo cubano, es decir de la forma $p = (n + 1)^3 - n^3$ con $n \geq 0$. Los primeros primos cubanos son 1, 7, 37, 61.

Simetrías. Teniendo en cuenta los primos y sus índices $p_{21} = 73$ y $p_{12} = 37$, tenemos que $73 = 37 + 3 \cdot 12$ y

$$73 + 21 = 94,$$
$$37 + 12 = 49.$$

Es decir, la suma del primo y su índice es el reverso de la suma del reverso y su índice. O sea, tanto el primo, su índice y la suma del primo y el índice son todos reversibles. ¡Sorprendente! De yapa, vemos que sus índices son ambos de la forma $9k - 6$ para k's consecutivos. En efecto,

$$37 = p_{9\cdot 2-6} \qquad \text{y} \qquad 73 = p_{9\cdot 3-6}.$$

Residuos cuadráticos. Un entero x es residuo cuadrático módulo n si existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que

$$x \equiv a^2 \pmod{n}.$$

Resulta que 37 es un residuo cuadrático módulo 73 y, recíprocamente, 73 es un residuo cuadrático módulo 37. En efecto

$$37 = 16^2 \pmod{73} \qquad \text{y} \qquad 73 = 6^2 \pmod{37}.$$

En términos de los símbolos de Legendre, esto se expresa así:

$$\left(\frac{37}{73}\right) = 1 = \left(\frac{73}{37}\right).$$

Más y más simetrías, ¡qué bonito!

Primos sexies. Además, 37 y 73 son *primos sexies* (el nombre viene de un juego de palabras en inglés entre 'six' y 'sex'), pues forman parte de un par de primos de la forma

$$\{p, p+6\},$$

ambos de manera doble. En efecto, tenemos los pares sexies

$$\{31, 37\}, \quad \{37, 43\}, \qquad \text{y} \qquad \{67, 73\}, \quad \{73, 79\}.$$

Acá menciono que 37 es un primo primo, pero 73 no lo es. Los números *primos primos* (cousin primes) son pares de números primos que difieren en 4, es decir primos de la forma

$$\{p, p+4\}.$$

Luego $\{37, 41\}$ es un tal par, pero ni $73 - 4 = 69$ ni $73 + 4 = 77$ son primos. Lástima. Resumiendo, 73 es primo gemelo, 37 es primo primo y juntos forman un par de primos sexies.

Cuadrados mágicos y apocalípticos. El cuadrado mágico más pequeño, usando sólo números primos y el 1, tiene al 37 en el centro e involucra al 73 también

31	73	7
13	37	61
67	1	43

Su constante mágica (es decir la suma de filas, de columnas y de diagonales) es

$$37 \cdot 3 = 111.$$

Como todos sabemos, la suma de los n primeros naturales es

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \tfrac{1}{2}n(n+1).$$

La ruleta tiene 37 números, del 0 al 36, y su suma es...

$$0 + 1 + \cdots + 36 = \tfrac{36 \cdot 37}{2} = 666,$$

el ¡número de la bestia! La suma de los primeros 73 números naturales es

$$1 + 2 + \cdots + 73 = \tfrac{73 \cdot 74}{2} = 37 \cdot 73. \tag{2.3}$$

El siguiente es un cuadrado mágico 6×6 apocalíptico, pues su constante mágica es $666 = 18 \cdot 37$, formado sólo por números primos y que involucra a 37 y 73:

3	107	5	131	109	311
7	331	193	11	83	41
103	53	71	89	151	199
113	61	97	197	167	31
367	13	173	59	17	37
73	101	127	179	139	47

Triángulos rectángulos. Tanto el 37 como el 73 son primos pitagóricos, o sea primos de la forma

$$p = 4k + 1,$$

es decir que pueden ser la hipotenusa de un triángulo rectángulo. De hecho, el teorema de Fermat sobre suma de cuadrados, dice que un primo p es suma de dos cuadrados, de forma única salvo el orden, si y sólo si

$$p = 2 \qquad \text{ó} \qquad p \equiv 1 \pmod 4.$$

En efecto, tenemos las ternas pitagóricas $(12, 35, 37)$ y $(48, 55, 73)$ pues

$$12^2 + 35^2 = 37^2 \qquad \text{y} \qquad 48^2 + 55^2 = 73^2.$$

Y aquí, una vez más, la magia: el cateto menor de cuya hipotenusa es 37 es 12, que es el índice primo de 37. El cateto menor de cuya hipotenusa es 73 es $48 = 4 \cdot 12$ y su reverso es $84 = 4 \cdot 21$, donde 21 es el índice primo de 73...

• Como consecuencia del teorema de Fermat de sumas de cuadrados, sólo los primos pitagóricos pueden ser la norma de algún elemento en el anillo de enteros Gaussianos

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Recordemos que la norma de $a + ib$ es $N(a + ib) = a^2 + b^2$ (el módulo al cuadrado como número complejo). Como se tienen las factorizaciones

$$\begin{aligned} 73 &= (8 - 3i)(8 + 3i) = 8^2 + 3^2, \\ 37 &= (6 + i)(6 - i) = (1 + 6i)(1 - 6i) = 6^2 + 1^2, \end{aligned}$$

73 y 37 son normas de enteros Gaussianos, pero no son primos en el anillo de enteros Gaussianos. La expresión $37 = 6^2 + 1^2$ dice que 37 es un primo de Cunningham (o sea, aquellos expresables de la forma $p = a^k \pm 1$ con $a, k > 1$).

• Como curiosidad adicional, notamos que el 37 es un número congruente. Un número n se dice *congruente* si es el área de un triángulo rectángulo de lados racionales a, b, c con área igual a $n = \frac{1}{2}ab$. Los números congruentes mas chicos son 5, 6 y 7. Por ejemplo 7 es congruente pues

$$(\tfrac{35}{12})^2 + (\tfrac{24}{5})^2 = (\tfrac{337}{60})^2 \qquad \text{y} \qquad \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{35}{12} \cdot \tfrac{24}{5} = 7.$$

Equivalentemente, un número n es congruente si existen 3 cuadrados racionales a^2, b^2 y c^2 en progresión aritmética tales que

$$b^2 - a^2 = c^2 - b^2 = n.$$

Y para aquellos que saben un poco más de teoría de números, un número n es congruente si y sólo si la curva elíptica

$$y^2 = x^3 - n^2 x$$

tiene rango positivo, o sea tiene un punto racional con $y \neq 0$.

Bueno, resulta que el 37 es congruente pues existe el triángulo rectángulo con catetos $a = 450660/777923$ y $b = 777923/6090$ e hipotenusa $c = 605170417321/4737551070$, en efecto se tiene

$$\left(\frac{450660}{777923}\right)^2 + \left(\frac{777923}{6090}\right)^2 = \left(\frac{605170417321}{4737551070}\right)^2,$$

y se cumple que

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{450660}{777923} \cdot \frac{777923}{6090} = \frac{225330}{6090} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 37}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29} = 37.$$

De hecho, 37 es el decimoséptimo número congruente.

Números triangulares, hexagonales y estelares. Con respecto a los *números triangulares*

$$T_n = \tfrac{1}{2}n(n + 1), \qquad n \geq 1,$$

tenemos que tanto la diferencia como el producto de 73 y 37 son números triangulares

$$\begin{aligned} 73 - 37 &= 36 = T_8, \\ 73 \cdot 37 &= 2701 = T_{73}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

(Recordar que en (2.3) vimos que $T_{73} = 1 + \cdots + 73$). Notar que el reverso de 2701 es 1027 y si sumamos ambos tenemos

$$2701 + 1027 = 3773.$$

Mas aún, como $3773 = 7^3 \cdot 11$, la suma de los divisores propios de 3773 es...

$$s(3773) = \sum_{\substack{d \,|\, 3773 \\ d < 3773}} d = 1027.$$

Luego, podemos escribir

$$37 \cdot 73 = 3773 - s(3773).$$

Y la cosa no termina ahí. El 2701 no sólo es el número triangular 73 si no que también es el número hexagonal número 37. El n-ésimo *número hexagonal* es

$$H_n = n(2n-1), \qquad n \geq 1.$$

Luego, $H_{37} = 37 \cdot 73$ y, por énfasis, vuelvo a escribir

$$H_{37} = 37 \cdot 73 = T_{73}.$$

• Además, 37 es el cuarto número hexagonal centrado. El *n-ésimo número hexagonal centrado* es

$$\tilde{H}_n = 3n^2 + 3n + 1 = 3n(n+1) + 1,$$

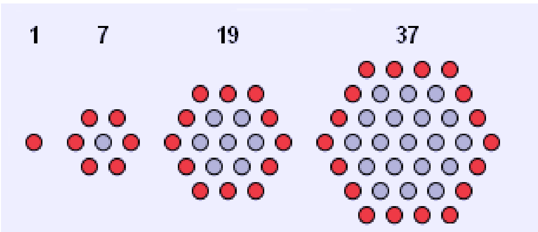
con $n \geq 0$, de donde tenemos la relación

$$\tilde{H}_n = 1 + 6T_n. \tag{2.5}$$

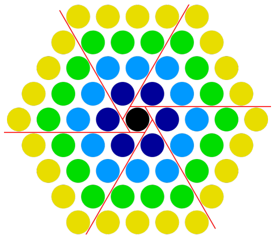
O sea

$$\tilde{H}_3 = 27 + 9 + 1 = 1 + 6T_3 = 37.$$

Gráficamente, los primeros 4 números hexagonales



El siguiente diagrama ilustra la descomposición de números hexagonales centrados en suma de números triangulares como en (2.5)



Notar que (expandiendo y simplificando) se cumple

$$\tilde{H}_n = (n+1)^3 - n^3$$

de donde, usando sumas telescópicas, se obtiene la identidad

$$\sum_{k=0}^{n} \tilde{H}_k = (n+1)^3.$$

Son notables las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{H}_n}{n!} = 4e, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{H}_n}{2^n} = 13 \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\tilde{H}_n} = \frac{\pi \tanh(\frac{\pi}{2\sqrt{3}})}{\sqrt{3}}.$$

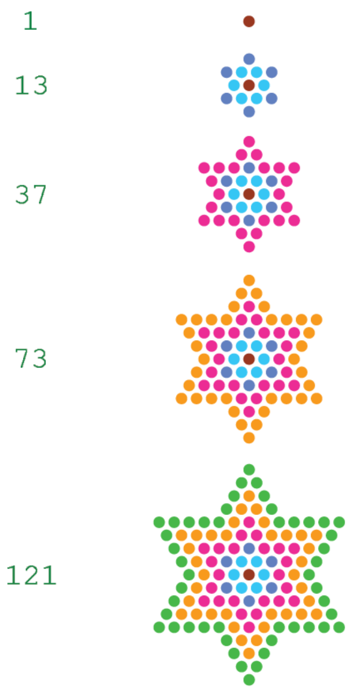
- El *n-ésimo número estelar* se define como

$$S_n = 6n(n-1) + 1, \qquad n \geq 1. \tag{2.6}$$

Notar que 37 y 73 son el tercer y cuarto números estelares pues

$$S_3 = 18 \cdot 2 + 1 = 37 \qquad \text{y} \qquad S_4 = 24 \cdot 3 + 1 = 73.$$

Los primeros números estelares son 1, 13, 37, 73, 121 y, gráficamente:



Cabe destacar el hecho fortuito de que el producto del segundo, tercer y cuarto números estelares es un número estelar:

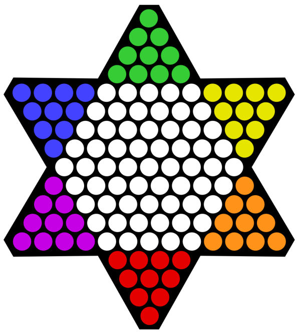
$$S_{77} = 35.113 = 13 \cdot 37 \cdot 73 = S_2 \cdot S_3 \cdot S_4$$

involucrando a nuestro par de primos 37 y 73 una vez más...

De la definición (2.6) es claro que

$$S_n = 12T_{n-1} + 1.$$

Gráficamente, a esto se lo puede interpretar reagrupando el punto central y 12 triángulos mas pequeños. Por ejemplo, el tablero del juego de las damas chinas es una estrella de $S_5 = 121$ puntos



Tenemos 6 triángulos exteriores de 10 puntos cada uno (60) y sabemos que el hexágono interior es de 61 $(H_4 = 61)$ y por lo tanto se lo puede descomponer como 6 triángulos más de 10 puntos y el punto central (ver figura de la página 45).

Notablemente, se tiene la serie de los recíprocos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \tan\Big(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\Big).$$

Para más propiedades de todos estos números ver por ejemplo las sucesiones A000217, A000384, A003215 y A003154 en la Enciclopedia en línea de sucesiones enteras (OEIS).

Números de Hogben El n-ésimo *número poligonal central de Hogben* es

$$\mathcal{H}_n = n^2 - n + 1 = \frac{n^3+1}{n+1}, \qquad n \geq 1.$$

El 73 es el noveno número de Hogben pues

$$\mathcal{H}_9 = 9^2 - 9 + 1 = \tfrac{729+1}{10} = 73.$$

Notar que se cumple $72 + 1 = 72 + \frac{9+1}{10} = \frac{729+1}{10}$. Más aún, el índice primo de 73, 21, también es un número de Hogben pues

$$\mathcal{H}_5 = 5^2 - 5 + 1 = 21.$$

Los primeros números de Hogben son

$$1,\ 3,\ 7,\ 13,\ 21,\ 31,\ 43,\ 57,\ 73,\ 91,\ 111,\ 133,\ etc.$$

Estos números satisfacen ciertas recurrencias; por ejemplo dos números de Hogben consecutivos $\mathcal{H}_{n+1}$ y $\mathcal{H}_n$ difieren en $2n$,

$$\mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{H}_n + 2n$$

y para tres términos consecutivos se cumple

$$\mathcal{H}_{n+3} = 3\mathcal{H}_{n+2} - 3\mathcal{H}_{n+1} + \mathcal{H}_n.$$

Al colocar los números naturales en una espiral concéntrica desde el 1 y rotando en sentido horario, los números de Hogben quedan en la diagonal principal (¿por qué?). Si bien 37 no es un número de Hogben, este queda en la diagonal secundaria o antidiagonal.

43	44	45	$\cdots$			
42	21	22	23	24	25	26
41	20	7	8	9	10	27
40	19	6	1	2	11	28
39	18	5	4	3	12	29
38	17	16	15	14	13	30
37	36	35	34	33	32	31

Notar que mientras que $73 = \mathcal{H}_9$, para el 37 tenemos

$$37 = \tfrac{1}{2}(31 + 43) = \tfrac{1}{2}(\mathcal{H}_6 + \mathcal{H}_7)$$

y su índice primo 12 satisface

$$12 = \mathcal{H}_7 - \mathcal{H}_6.$$

O sea, 73 y su índice primo 21 son números de Hogben y 37 y su índice primo 12 son respectivamente el promedio y la diferencia de números de Hogben consecutivos.

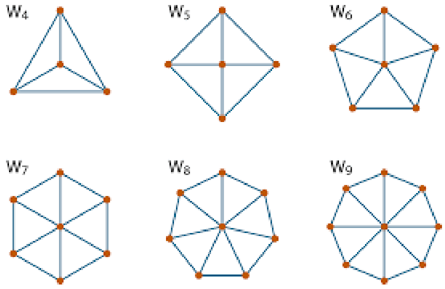
Todos los números de Hogben $\mathcal{H}_n$ se escriben como (111) en base $n-1$ (o sea, son repitunos en base $n-1$), pues

$$(n-1)^2 + (n-1) + 1 = n^2 - n + 1 = \mathcal{H}_n.$$

En nuestros casos de interés tenemos

$$\mathcal{H}_5 = (111)_4 = 21 \qquad \text{y} \qquad \mathcal{H}_9 = (111)_8 = 73.$$

Se sabe que: (a) $\mathcal{H}_n$ es el máximo número de 1's que una matriz $n \times n$ inversible con entradas $\{0,1\}$ puede tener, (b) $\mathcal{H}_n$ es el número máximo de regiones interiores de la intersección de n círculos, (c) el número de ciclos que hay en el grafo rueda W_n, para $n \geq 3$.



Para más propiedades de estos números ver la sucesión A002061 en OEIS.

Primos de la forma... Aquí veremos varias propiedades aritméticas particulares P tal que 37 y 73 son primos consecutivos que cumplen esa propiedad P.

Tenemos que 37 y 73 son:

(a) Primos de la forma $2k+1$, $3k+1$, $4k+1$, $6k+1$, $9k+1$, $12k+1$, $18k+1$ y $36k+1$. Y son primos consecutivos de la forma

$$9k+1$$

(y por lo tanto de la forma $18k+1$ y $36k+1$), los primeros son 19,37, 73, 109.

(b) Primos consecutivos de la forma $9 \cdot 2^k + 1$ pues

$$37 = 9 \cdot 2^2 + 1 \qquad \text{y} \qquad 73 = 9 \cdot 2^3 + 1.$$

Los primeros primos de esta forma son 19, 37, 73, 577, 1153, 18433, 147457. Más generalmente, son primos consecutivos de la forma

$$2^a 3^b + 1, \qquad a, b > 0. \tag{2.7}$$

Los primeros son

$$7, 13, 19, 37, 73, 97, 109, 163, 193, 433, 487, 577, 769, 1153, 1297. \tag{2.8}$$

(c) Números consecutivos que cumplen

$$\varphi(n) = 3\,\varphi(n-1),$$

con n natural y $\varphi(n)$ la función de Euler que cuenta el número de coprimos con n entre 1 y n. Claramente si p es primo se tiene que $\varphi(p) = p-1$ y que $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$ para todo k y se sabe que φ es multiplicativa, es decir $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ si $(m,n) = 1$.

Se cumple que

$$\varphi(37) = 36 \qquad \text{y} \qquad 3\,\varphi(36) = 3\,\varphi(2^2)\varphi(3^2) = 3 \cdot 2 \cdot 6 = 36,$$

$$\varphi(73) = 72 \qquad \text{y} \qquad 3\,\varphi(72) = 3\,\varphi(2^3)\varphi(3^2) = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 72.$$

Los primeros números así son

$$7, 13, 19, 37, 73, 91, 97, 109, 163, 193, 433, 487, 577, 703, 769, 793, 925, 1153.$$

Notablemente, los primos en esta secuencia, son los de la sucesión (2.8). En efecto, si $p = 2^a 3^b + 1$ es primo, entonces

$$3\varphi(p-1) = 3\varphi(2^a)\varphi(3^b) = 3 \cdot 2^{a-1}3^{b-1}(3-1) = 2^a 3^b = p - 1 = \varphi(p).$$

(d) Primos consecutivos que son el promedio de dos cuadrados de primos, es decir primos de la forma

$$\tfrac{1}{2}(p^2 + q^2)$$

con p y q primos. Equivalentemente, son primos de la forma $x^2 + y^2$ con $x > y > 0$ tales que

$$x - y = p \qquad \text{y} \qquad x + y = q$$

son primos. En efecto,

$$\tfrac{1}{2}(p^2 + q^2) = \tfrac{1}{2}((x-y)^2 + (x+y)^2) = x^2 + y^2$$

de donde $x = \frac{1}{2}(p+q)$ e $y = \frac{1}{2}(q-p)$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} 37 &= 6^2 + 1^2 \qquad \text{con} \qquad 6 - 1 = 5 \quad \text{y} \quad 6 + 1 = 7, \\ 73 &= 8^2 + 3^2 \qquad \text{con} \qquad 8 - 3 = 5 \quad \text{y} \quad 8 + 3 = 11, \end{aligned}$$

y también tenemos que

$$37 = \tfrac{1}{2}(5^2 + 7^2) \qquad \text{y} \qquad 73 = \tfrac{1}{2}(5^2 + 11^2).$$

Los primeros primos de este tipo son 17, 29, 37, 73, 89, 97, 109, 149, etc.

(e) Primos consecutivos de la forma $a^2 + b^6$, pues

$$37 = 6^2 + 1^6 \qquad \text{y} \qquad 73 = 3^2 + 2^6.$$

Los primeros primos de este tipo son 2, 5, 17, 37, 73, 89, 101, 113, 197, 233, 257.

(f) Primos de la forma $n^2 + n + 17$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Los primeros son

$$17, 19, 23, 29, 37, 47, 59, 73, 89, 107, 127, 149, 173, 199, 227, 257, 359, 397, 479, 523.$$

Lo interesante aquí es que Legendre en 1798 observó que el polinomio entero

$$p(x) = x^2 + x + 17$$

toma valores primos para los 16 enteros consecutivos $x = 0, 1, \ldots, 15$. Por ejemplo $p(0) = 17$, $p(4) = 37$, $p(7) = 73$ y $p(15) = 257$, pero

$$p(16) = 16^2 + 16 + 17 = 16(16+1) + 17 = 17^2.$$

(g) Primos consecutivos de la forma

$$(n-1)F_{n-1} + nF_n$$

donde F_n es el n-ésimo número de Fibonacci. Los primeros números de Fibonacci son 1, 1, 2, 3, 5, 8 y se tiene

$$37 = 4F_4 + 5F_5 = 4 \cdot 3 + 5 \cdot 5 = 12 + 25,$$

$$73 = 5F_5 + 6F_6 = 5 \cdot 5 + 6 \cdot 8 = 25 + 48.$$

(h) Primos consecutivos de la forma $3x^2 + 25y^2$. Tenemos

$$37 = 3 \cdot 2^2 + 25 \cdot 1^2 \qquad \text{y} \qquad 73 = 3 \cdot 4^2 + 25 \cdot 1^2.$$

Los primeros son 3, 37, 73, 103, 127, 457, 463, 547, 607, 613, 643, 673, 733.

(i) Primos consecutivos de la forma $5x^2 + 17y^2$. Tenemos

$$37 = 5 \cdot 2^2 + 17 \cdot 1^2 \qquad \text{y} \qquad 73 = 5 \cdot 1^2 + 17 \cdot 2^2.$$

Los primeros son 5, 17, 37, 73, 97, 113, 173, 193, 197, 233, 277, 313, 317.

(j) Primos consecutivos p tales que $4p + 1$ y $6p + 1$ son también primos. Tenemos las ternas

$$\{37, 149, 223\} \qquad \text{y} \qquad \{73, 293, 439\}.$$

Los primeros son de la forma 13, 37, 73, 97, 193, 277, 373, 409, 433, 577, 673, 709.

(k) Primos consecutivos p tales que $2p + 1$ tiene 3 factores primos:

$$2 \cdot 37 + 1 = 75 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \qquad \text{y} \qquad 2 \cdot 73 + 1 = 147 = 3 \cdot 7 \cdot 7.$$

Los primeros son de la forma 13, 31, 37, 73, 97, 103, 127, 137, 139, 181, 193, 199, 211.

Primos de la suerte. Un *número suertudo* o *número de la suerte* es un número natural que es generado por una especie de criba que explicamos a continuación, donde el cribado elimina los números según su posición y no su valor. Veremos que tanto 37 como 73 son primos suertudos.

Digamos que 1 es un número suertudo y comenzamos a cribar solo los números impares:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ 21,\ 23,\ 25,\ 27,\ 29,\ 31,\ 33,\ 35,\ 37,\ 39, \dots \tag{2.9}$$

El primer número mayor que 1 es 3, así que declaramos a 3 un número de la suerte y tachamos todos los números de la lista de arriba, no que sean múltiplos de 3, si no que ocupen una *posición* que sea múltiplo de 3 en la lista (2.9), i.e., 5, 11, 17, 23, 29, 35 y así:

$$1,\ 3,\ \cancel{5},\ 7,\ 9,\ \cancel{11},\ 13,\ 15,\ \cancel{17},\ 19,\ 21,\ \cancel{23},\ 25,\ 27,\ \cancel{29},\ 31,\ 33,\ \cancel{35},\ 37,\ 39, \dots$$

Nos quedan los números

$$1,\ 3,\ 7,\ 9,\ 13,\ 15,\ 19,\ 21,\ 25,\ 27,\ 31,\ 33,\ 37,\ 39, \dots \tag{2.10}$$

El primer número nuevo que sobrevivió es el 7, así que declaramos al 7 suertudo y borramos todos los números de la lista que están en una posición múltiplo de 7 en (2.10), i.e. 19, 39, y así sucesivamente. El próximo número de la suerte es el 9 y continuando con este proceso se obtienen los números suertudos.

Los primeros números de la suerte son

$$1, 3, 7, 9, 13, 15, 21, 25, 31, 33, 37, 43, 49, 51, 63, 67, 69, 73, 75, 79, 87, 93, 99, 105, etc.$$

Un *primo de la suerte* es un número primo que es suertudo. Los primeros primos de la suerte son

$$3,\ 7,\ 13,\ 31,\ 37,\ 43,\ 67,\ 73,\ 79,\ etc.$$

Se conjetura que hay infinitos primos de la suerte, pero esto tampoco se sabe.

Primos de Pierpont y origamis. Tanto 37 como 73 son primos de Pierpont. Un número primo p es un *primo de Pierpont* si se lo puede escribir como

$$p = 2^r \cdot 3^s + 1$$

con $r, s \geq 0$ (notar la diferencia con (2.7) donde los exponentes no son 0)). Los primeros primos de Pierpont son

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 13,\ 17,\ 19,\ 37,\ 73,\ 97,\ etc.$$

En efecto, ya vimos que

$$37 = 2^2 \cdot 3^2 + 1 \qquad \text{y} \qquad 73 = 2^3 \cdot 3^2 + 1.$$

A.M. Gleason probó en 1988 (Gleason, 1988) que un polígono regular de n lados puede construirse con regla, compás y un trisector de ángulos, y por lo tanto doblando papeles (origami), si y sólo si

$$n = 2^r 3^s p_1 \cdots p_k,$$

con $r, s \geq 0$, donde los p_i's son primos de Pierpont distintos.

Comparemos esto con el resultado clásico de polígonos construibles solamente con regla y compás. El teorema de Gauss-Wantzel (clásico, 1836) asegura que un polígono regular de n lados es construible con regla y compás si y sólo si

$$n = 2^r \qquad \text{ó} \qquad n = 2^r p_1 \cdots p_k$$

donde $r > 0$ y los p_i's son primos de Fermat distintos, es decir primos de la forma $2^{2^m} + 1$ para algún $m \in \mathbb{N}$.

Redondeando, no es posible construir polígonos regulares de 37 y 73 lados sólo usando regla y compás, pero si es posible construirlos si permitimos además usar un trisector (o equivalentemente, plegado del papel). ¡Qué maravilla!

Números de Waring. Un problema famoso en teoría de números es el propuesto por Edward Waring en1770. Él se preguntaba si para cada número natural fijo k, existe un $s \in \mathbb{N}$ tal que todo natural n puede ser escrito como la suma de a lo sumo s potencias k-ésimas de enteros. Es decir, si dado k existe un s tal que para todo n existen $n_1, \ldots, n_s \in \mathbb{Z}$ tales que

$$n = n_1^k + \cdots + n_s^k$$

(pudiendo algunos n_i ser 0). Desde entonces se lo conoce como el *problema de Waring*. La respuesta afirmativa general fue dada en 1909 por Hilbert en el que se conoce como Teorema de Hilbert–Waring. Al menor natural s tal que todo $n \in \mathbb{N}$ se lo puede escribir como a lo sumo s potencias k-ésimas se lo denota $g(k)$ y se lo llama el k-ésimo *número de Waring*.

Obviamente que $g(1) = 1$. Por el famoso teorema de los cuatro cuadrados de 1770 de Lagrange sabemos que todo natural es suma de a lo sumo 4 cuadrados. Pero 3 cuadrados no son suficientes, pues los cuadrados módulo 8 son 0, 1 y 4 y entonces todo número congruente a 7 módulo 8 no puede ser suma de 3 cuadrados $(7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)$. Entonces tenemos que

$$g(2) = 4.$$

El teorema de Lagrange fue conjeturado por Bachet en la edición de 1621 del libro *Aritmética* de Diofanto. Se cuenta que Fermat decía que tenía una prueba pero que no la publicó...

A partir del teorema de Hilbert en 1909, los casos para k pequeños fueron resueltos durante el siglo XX. Que $g(3) = 9$ fue probado independientemente por A. Wieferich en 1909 y por A.J. Kempner en 1912. Chen Jingrun (1964) y S.S. Pillai (1940) probaron respectivamente que

$$g(5) = 37 \qquad \text{y} \qquad g(6) = 73.$$

Finalmente en 1986, R. Balasubramanian, F. Dress y J.-M. Deshouillers probaron que $g(4) = 19$. Es decir, 37 y 73 son números de Waring consecutivos.

J.A. Euler, el hijo de Leonhard Euler, notó en 1772 que $g(k) \leq 2^k + \lfloor (\frac{3}{2})^k \rfloor - 2$. Dickson, Pillai, Rubugunday, Niven y otros probaron que

$$g(k) = 2^k + \lfloor (\tfrac{3}{2})^k \rfloor - 2 \qquad \text{si} \qquad 2^k \{ (\tfrac{3}{2})^k \} + \lfloor (\tfrac{3}{2})^k \rfloor \leq 2^k,$$

donde $\{x\}$ denota la parte fraccionaria de $x \in \mathbb{R}$. Pero no se conoce ningún valor de k tal que $2^k \{ (\frac{3}{2})^k \} + \lfloor (\frac{3}{2})^k \rfloor > 2^k$, y Mahler probó que sólo puede haber un número finito de tales k. En 1990, Kubina y Wunderlich mostraron que

$$g(k) = 2^k + \lfloor (\tfrac{3}{2})^k \rfloor - 2 \tag{2.11}$$

vale para todo $k \leq 471.600.000$ y se conjetura que vale para todo k. Los primeros valores de los números de Waring son entonces

$$1, 4, 9, 19, 37, 73, 143, 279, 548, 1079, 2132, 4223, 8384, \textit{etc.}$$

Chequeamos la formula (2.11) en los casos que nos interesa:

$$g(5) = 2^5 + \lfloor (\tfrac{3}{2})^5 \rfloor - 2 = 32 - \lfloor \tfrac{243}{32} \rfloor - 2 = 30 + \lfloor 7 + \tfrac{19}{32} \rfloor = 37,$$
$$g(6) = 2^6 + \lfloor (\tfrac{3}{2})^6 \rfloor - 2 = 64 + \lfloor \tfrac{729}{64} \rfloor - 2 = 62 + \lfloor 11 + \tfrac{25}{64} \rfloor = 73.$$

Cosa'e mandinga.

Números de Sierpinski y de Riesel. Un *número de Sierpiński* (resp. *de Riesel*) es un impar $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \cdot 2^n + 1 \quad (\text{resp. } k \cdot 2^n - 1)$$

es compuesto para todo $n \in \mathbb{N}$. En 1956 Hans Riesel probó que existen infinitos números de Riesel y en 1960 Wacław Sierpiński probó que existen infinitos números de Sierpiński.

La sucesión de los números de Sierpiński conocidos comienza

$$78557, 271129, 271577, 322523, 327739, 482719, 575041, 603713, 903983.$$

John Selfridge probó en 1962 que el número 78557 es de Sierpiński y conjeturó que es el más chico (aún no se sabe si lo es). Mas aún, Selfridge probó que

$$78557 \cdot 2^n + 1$$

tiene un factor en el conjunto de cubrimiento

$$\{3, 5, 7, 13, 19, 37, 73\} \tag{2.12}$$

para todo n. Por ejemplo,

$$78557 \cdot 2^3 + 1 = 628457 = 73 \cdot 8609,$$
$$78557 \cdot 2^{12} + 1 = 321769473 = 3 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 73 \cdot 727,$$
$$78557 \cdot 2^{21} + 1 = 164745969665 = 5 \cdot 73 \cdot 451358821,$$

y

$$78557 \cdot 2^{27} + 1 = 10543742058497 = 37 \cdot 167 \cdot 40427 \cdot 42209.$$

Más generalmente se tiene que

$$78557 \cdot 2^{2n} + 1 \text{ es múltiplo de } 3,$$
$$78557 \cdot 2^{4n+1} + 1 \text{ es múltiplo de } 5,$$
$$78557 \cdot 2^{3n+1} + 1 \text{ es múltiplo de } 7,$$
$$78557 \cdot 2^{12n+11} + 1 \text{ es múltiplo de } 13,$$
$$78557 \cdot 2^{18n+15} + 1 \text{ es múltiplo de } 19,$$
$$78557 \cdot 2^{36n+27} + 1 \text{ es múltiplo de } 37,$$
$$78557 \cdot 2^{9n+3} + 1 \text{ es múltiplo de } 73,$$

para todo $n \geq 0$.

En 1956, Riesel probó que 509203 es un número de Riesel. La sucesión de números de Riesel conocidos comienza:

$$509203, 762701, 777149, 790841, 992077, 1106681, 1247173, 1254341, 1330207,$$
$$1330319, 1715053, 1730653, 1730681, 1744117, 1830187, 1976473, 2136283,$$
$$2251349, 2313487, 2344211, 2554843, 2924861, 3079469, 3177553, 3292241, 3419789,$$
$$3423373, 3580901, 3661529, 3661543, 3781541, 3784439, 4384979, 4442323,$$
$$4485343, 4506097, 4507889, 4570619, 4626967, 4643293, 4953397.$$

Se conjetura que 509203 es el más chico. Por ejemplo, los números de Riesel 777149, 790841, 1106681, 1715053, 3079469, 3580901, 4485343, 4570619 y 4953397 tienen conjunto de cubrimiento dado en (2.12). Por ejemplo, tenemos que

$$777149 \cdot 2^3 - 1 = 6217191 = 3^2 \cdot 73 \cdot 9463,$$
$$777149 \cdot 2^{12} - 1 = 3183202303 = 73 \cdot 43605511,$$
$$777149 \cdot 2^{21} - 1 = 1629799579647 = 3^2 \cdot 23 \cdot 47 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 32321,$$

y

$$777149 \cdot 2^{36} - 1 = 53405272625905663 = 37 \cdot 103 \cdot 14013453850933.$$

O sea, 37 y 73 son números consecutivos en los conjuntos de cubrimiento de muchos números de Riesel y Sierpiński.

§2. La Conjetura de Sheldon

Hasta aquí hemos visto muchísimas curiosidades que comparten el número 73 y su reverso 37. Ahora veremos cuáles son las propiedades que hacen que este par sea único.

Como ya mencionamos en la introducción, en el episodio 73 (2010) Sheldon afirma ante sus amigos que 73 es el mejor número de todos. Y lo justifica así: 73 es el primo número 21. Su reverso es el primo 37, que es el primo número 12 y 12 es reverso de 21 que es (ta-tán, ta-tán..) el producto de 3 y 7. Más aún, 73 en binario es 1001001, que es capicúa, es decir, su reverso es el mismo 1001001, y tiene 7 dígitos y 3 unos. Y aunque Sheldon no lo dijo explícitamente, deja entrever que 73 es el único número con estas propiedades.

En 2015, Jessie Byrnes, Chris Spicer y Alyssa Turnquist, en homenaje a Sheldon, definieron un primo de Sheldon como el primo que satisface estas condiciones (las daremos formalmente mas abajo) y conjeturaron que 73 es el único primo así, bautizando a esta como la Conjetura de Sheldon. Justamente, en esta sección seguiremos su artículo (Byrnes, Spicer, y Turnquist, s.f.) bastante, por ser muy claro y pedagógico.

Propiedad espejo. El reverso (o espejo) de un número natural n, denotado por $\mathrm{rev}(n)$, es el número escrito con sus dígitos en orden inverso. Por ejemplo,

$$\mathrm{rev}(2024) = 4202, \qquad \mathrm{rev}(1980) = 891 \qquad \text{y} \qquad \mathrm{rev}(10000) = 1.$$

Formalmente, si

$$n = a_k \cdots a_2 a_1$$

es la representación decimal de n con $0 \leq a_i \leq 9$ para $i = 1, \ldots, k$, entonces el *reverso* de n es

$$\mathrm{rev}(a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1) = a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k.$$

Si un número n es igual a su propio reverso, es decir

$$\mathrm{rev}(n) = n,$$

decimos que el número n es *palíndromo* (también *palindrómico* o *capicúa*). Los primos palindrómicos como 101 u 11311 son raros. Claramente, hay infinitos números capicúas, pero se desconoce si hay infinitos primos palindrómicos.

Bueno, ya podemos dar la definición de la primera propiedad.

Definición 3.1 ((Byrnes y cols., s.f.)). *El n-ésimo primo p_n satisface la propiedad espejo si el reverso de p_n es el rev(n)-ésimo primo, es decir si*

$$\mathrm{rev}(p_n) = p_{\mathrm{rev}(n)}. \tag{3.1}$$

Notar que hay dos afirmaciones en la propiedad previa:

(a) La primera es que el reverso de p_n es un primo (no garantizado).

(b) La segunda es que $\mathrm{rev}(p_n)$ es el $\mathrm{rev}(n)$-ésimo primo (definitivamente no garantizado).

Estudiemos un poco cada una de estas afirmaciones por separado. Los primos palindrómicos claramente satisfacen la primera, pero no son los únicos. Por ejemplo

$$389 \qquad \text{y} \qquad \mathrm{rev}(389) = 983$$

son ambos primos, al igual que 73 y $\mathrm{rev}(73) = 37$. Aunque hay condiciones obvias que impiden que un primo satisfaga esta propiedad, como que no pueden comenzar con los dígitos 2, 4, 5, 6 y 8, los primos que satisfacen (a) son bastante comunes. De los primeros 10 millones de primos, el $14{,}99\,\%$ satisfacen la primer condición.

La segunda mitad de la propiedad espejo afirma que $\mathrm{rev}(p_n)$ es el $\mathrm{rev}(n)$-ésimo primo. Esto es una condición mucho más fuerte que la primera. Los primos $2 = p_1$, $3 = p_2$, $5 = p_3$, $7 = p_4$ y $11 = p_5$ satisfacen esta propiedad trivialmente porque tanto n como p_n son palíndromos. De hecho, esto es general, si un primo capicúa tiene índice capicúa, entonces obviamente satisfará la condición (b) y por lo tanto la propiedad espejo.

Incluidos en esta lista están el $73 = p_{21}$ y el $37 = p_{12}$ pues

$$\mathrm{rev}(73) = \mathrm{rev}(p_{21}) = p_{\mathrm{rev}(21)} = p_{12} = 37$$

y obviamente $\mathrm{rev}(37) = \mathrm{rev}(p_{12}) = p_{\mathrm{rev}(12)} = p_{21} = 73$. Mirando a los primeros 10 millones de primos otra vez, la cosa resulta muy diferente. Sólo hay un primo mayor que 73 que satisface la propiedad espejo y es

$$143.787.341 = p_{8.114.118}$$

Anecdóticamente, aquí también, como en el caso de los primos de un dígito, el primo y su índice son capicúas.

Propiedad producto. Para un natural n, denotaremos por $\Pi(n)$ el producto de sus dígitos. Por ejemplo,

$$\Pi(73) = 21, \qquad \Pi(123.456.789) = 9! \qquad \text{y} \qquad \Pi(2024) = 0.$$

En general, si $n = (a_k \cdots a_1)_{10}$ entonces

$$\Pi(n) = a_k \cdots a_1.$$

Estamos en condiciones de dar la segunda propiedad que nos interesa.

Definición 3.2 ((Byrnes y cols., s.f.))**.** *El n-ésimo primo satisface la propiedad producto si el producto de sus dígitos es igual a n. En símbolos, si*

(3.2) $$\Pi(p_n) = n.$$

Notar que si el primo p contiene a 0 como dígito entonces no cumplirá la propiedad producto pues

$$\Pi(p) = 0.$$

Este sencillo hecho reduce significativamente el número de primos que pueden satisfacer la propiedad producto. Supongamos que q es un primo de k dígitos. Claramente, q no puede ni empezar ni terminar en 0. Supongamos que para los demás $k-2$ dígitos los números del 0 al 9 son igual de probables. La probabilidad de que q no contenga un 0 es

$$\left(\frac{9}{10}\right)^{k-2}.$$

Hay una probabilidad relativamente alta de que un primo pequeño no contenga un dígito 0. Sin embargo, para primos mayores la probabilidad es muy pequeña. Por ejemplo, para un primo de 512 dígitos de longitud, dicha probabilidad es $4{,}6 \times 10^{-24}$, aproximadamente.

Como $\Pi(n)$ es el producto de los dígitos de n, y éstos pertenecen al conjunto de dígitos $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, deducimos que 2, 3, 5 y 7 son los únicos factores primos posibles de $\Pi(n)$, es decir es de la forma

(3.3) $$\Pi(n) = 2^i\, 3^j\, 5^k\, 7^l, \qquad i, j, k, l \geq 0.$$

En teoría de números, a los enteros que tienen pocos factores se los conoce como números suaves. Formalmente, a los enteros cuyos factores primos son menores o iguales que m se los llaman m-*suaves*. Por ejemplo, $72 = 2^3 \cdot 3^2$ es 3-suave y $125 = 5^3$ es 5-suave, pero no 3-suave. Así,

$$\Pi(n) \text{ es un número 7-suave para todo } n. \tag{3.4}$$

En particular, si n tiene un factor primo mayor que 7, entonce p_n no satisface la propiedad producto. Esto lógicamente reduce enormemente el número de enteros que pugnan por ser primos de Sheldon.

Sabemos que $73 = p_{21}$ satisface la propiedad producto pues

$$\Pi(73) = 7 \cdot 3 = 21$$

y también la cumple el $17 = p_7$ trivialmente pues

$$\Pi(17) = 1 \cdot 7 = 7.$$

El único primo mayor que 73 de entre los primeros 10 millones de primos que cumple esta propiedad producto es el primo 2.475.989 pues

$$2.475.989 = p_{181.440}$$

y se tiene que

$$\Pi(2.475.989) = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 181.440.$$

Primos de Sheldon. Damos finalmente la definición de los primos que nos interesan.

Definición 3.3 ((Byrnes y cols., s.f.)). *A un número natural que satisface la propiedad espejo y la propiedad producto se lo llama primo de Sheldon.*

Es decir, p_n es primo de Sheldon si

$$\operatorname{rev}(p_n) = p_{\operatorname{rev}(n)} \qquad \text{y} \qquad \Pi(p_n) = n. \tag{3.5}$$

Además, por (3.3) y (3.4) sabemos que el índice n es 7-suave de la forma

$$n = 2^i\, 3^j\, 5^k\, 7^l, \qquad i, j, k, l \geq 0. \tag{3.6}$$

Por lo visto hasta ahora, sabemos que

- $73 = p_{21}$ es un primo de Sheldon,

y de entre los primeros 10 millones de primos sólo encontramos:

- uno que satisface la propiedad espejo $143.787.341 = p_{8.114.118}$,
- y otros dos que satisfacen la propiedad producto: $17 = p_7$ y $2.475.989 = p_{181.440}$.

Sin embargo, $143.787.341 = p_{8.114.118}$ no satisface la propiedad producto y $17 = p_7$ y $2.475.989 = p_{181.440}$ no satisfacen la propiedad espejo. Es decir, entre los primeros

10 millones de primos solo el 73 es un primo de Sheldon. ¿Podemos decir algo más?

Este es un buen momento para finalmente enunciar la Conjetura de Sheldon

Conjetura 3.4 ((Byrnes y cols., s.f.)). *73 es el único primo de Sheldon.*

§3. ¡Sheldon tenía razón!

En la búsqueda de probar la Conjetura de Sheldon, intentaremos primero conocer un poco más sobre la naturaleza de los primos de Sheldon. Veremos que de existir mas primos de Sheldon, estos están acotados y deben satisfacer propiedades aritméticas bien concretas. Mas adelante usaremos estas cosas para probar que 73 es el único primo de Sheldon. En esta sección seguiremos el artículo (Pomerance y Spicer, 2019).

Si hay otro primo de Sheldon, es grande pero no tanto. Ya vimos que no hay primos de Sheldon p_n mayores a 73 entre los primeros 10 millones de primos ($n < 10^7$). O sea que si hay un primo de Sheldon p mayor a 73 debe ser muy grande... ¡pero no tanto! Veremos que necesariamente $p < 10^{45}$.

Para ello necesitamos recordar algunas cosas. Dado $x \in \mathbb{R}$, se denota por $\pi(x)$ al número de primos menores que x, es decir

$$\pi(x) = \#\{p \in \mathbb{P} : 2 \leq p \leq x\}.$$

Por el famoso teorema del número primo (probado en 1896 independientemente por Hadamard y de la Valleé Poussin) sabemos que $\pi(x)$ es asintóticamente equivalente a la función $x/\log(x)$, en símbolos

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$$

(donde $\log$ es la función logaritmo natural). Esto significa que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log(x)}} = 1.$$

Se sabe que, salvo para valores pequeños de x, $\pi(x)$ es mayor que $x/\log(x)$. En efecto, Rosser y Schoenfeld probaron en 1962 (Rosser y Schoenfeld, 1962) que

$$x \geq 17 \qquad \Rightarrow \qquad \pi(x) > \frac{x}{\log(x)}. \tag{4.1}$$

Ahora estamos en condiciones de ver que los primos de Sheldon están acotados superiormente.

Proposición 4.1 ((Byrnes y cols., s.f.)). *Si p_n es un primo con la propiedad producto entonces $p_n < 10^{45}$.*

Demostración. Supongamos que p_n tiene k dígitos, digamos $p_n = a_k \cdots a_2 a_1$. Luego,

$$a_k \cdot 10^{k-1} < p_n < 10^k. \tag{4.2}$$

Además, el producto de esos dígitos es menor que $a_k \cdot 9^{k-1}$, es decir

$$\Pi(p_n) = \prod_{i=1}^{k} a_i \leq a_k \cdot 9^{k-1}. \tag{4.3}$$

Usando la desigualdad (4.1), para $p_n \geq 17$ tenemos que

$$n = \pi(p_n) > \frac{p_n}{\log(p_n)}. \tag{4.4}$$

Por lo tanto, si p_n satisface la propiedad producto, tenemos $n = \Pi(p_n)$ y juntando las desigualdades (4.2), (4.3) y (4.4) tenemos

$$\frac{a_k \cdot 10^{k-1}}{\log(a_k \cdot 10^{k-1})} < \frac{p_n}{\log(p_n)} < n < a_k \cdot 9^{k-1}.$$

Mirando los extremos llegamos a que $\log(a_k \cdot 10^{k-1}) > a_k \cdot 10^{k-1}/a_k \cdot 9^{k-1}$, o sea

$$\log(a_k) + \log(10^{k-1}) > \left(\frac{10}{9}\right)^{k-1}. \tag{4.5}$$

Claramente, si la desigualdad de arriba falla para $a_k = 9$, entonces falla para cualquier otro valor de a_k. Algunas cuentas muestran que la desigualdad es válida para $k < 46$, pero falla para $k = 46$, es decir

$$\log(9) + \log(10^{45}) \leq \left(\frac{10}{9}\right)^{45}.$$

Haciendo inducción en t, sale que $\log(9) + \log(10^t) \leq (\frac{10}{9})^t$ vale para todo $t \geq 45$, es decir que (4.5) falla para todo $k \geq 46$. Luego, $p_n < 10^{45}$. □

Los autores Pomerance y Spicer conjeturan (Conjecture 2.2 en (Pomerance y Spicer, 2019)) que los únicos primos con la propiedad producto son los 3 ya mencionados previamente:

$$p_7 = 17, \qquad p_{21} = 73 \qquad \text{y} \qquad p_{181.440} = 2.475.989.$$

Además, realizaron una búsqueda por computadora para $n \leq 10^{10}$ sin encontrar otros nuevos primos de esta forma.

Si hay otro primo de Sheldon es muy raro. Como un primo de Sheldon debe satisfacer tanto la propiedad producto como la propiedad espejo, que son muy especiales y ya vimos muy restrictivas (a juzagar por los ejemplos encontrados), nos preguntamos si podemos decir algo más sobre estos primos.

A continuación listamos propiedades que un primo de Sheldon debe tener.

Proposición 4.2 ((Pomerance y Spicer, 2019))**.** *Si p_n es un primo de Sheldon con $n > 10^{10}$, entonces*

(a) *n es 7-suave;*

(b) *el dígito principal de p_n está en $\{1, 3, 7, 9\}$;*

(c) $5^4 \nmid n$*; y, si* $p_n > 10^{19}$*, entonces* $5^3 \nmid n$*;*

(d) *p_n no puede tener un dígito 0 y no puede contener un dígito 1 (excepto quizás por el dígito principal);*

(e) *el dígito principal de $p_{\mathrm{rev}(n)}$ debe estar en $\{3, 7, 9\}$.*

Demostración. (a) Ya lo vimos en (3.4).
(b) Es claro ya que $\mathrm{rev}(p_n)$ debe ser primo y los primos (con más de un dígito) deben terminar en 1, 3, 7 ó 9.
(c) Esto se puede probar de la misma forma que la Proposición 4.1. En particular

$$a_k \cdot 5^4 \cdot 9^{k-5} < \frac{a_k \cdot 10^{k-1}}{\log(a_k \cdot 10^{k-1})}$$

para $a = 1, 3, 7$ ó 9 y $k \geq 5$. La afirmación restante sale análogamente.
(d) Es obvio que ningún primo que cumpla la propiedad producto puede tener un dígito 0. Para la parte que falta, supongamos que p_n tiene un dígito 1 después del dígito principal. Pero

$$a_k \cdot 9^{k-2} < \frac{a_k \cdot 10^{k-1}}{\log(a_k \cdot 10^{k-1})}$$

para $a = 1, 3, 7$ ó 9 y $k \geq 6$.
(e) Esto es consecuencia directa de que sabemos que ningún dígito que no sea el principal p_n puede ser 1. □

Ahora necesitamos recordar que el número de dígitos de un número natural n está dado por $\lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1$, donde $\lfloor x \rfloor$ es la función piso definida como el mayor entero menor o igual que x. O sea,

$$n = (a_k \cdots a_1)_{10} \qquad \Rightarrow \qquad k = \lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1. \tag{4.6}$$

Por ejemplo $n = 1973$ tiene 4 dígitos y

$$\lfloor \log_{10}(1973) \rfloor + 1 = \lfloor 3{,}295127 \rfloor + 1 = 4.$$

Con esto ya podemos probar una propiedad mas para los primos de Sheldon y es que su índice no es divisible por 100.

Proposición 4.3 ((Byrnes y cols., s.f.)). *Si p_n es un primo de Sheldon con $n > 10^{10}$ entonces $100 \nmid n$.*

Demostración. Supongamos por el absurdo que $100 \mid n$. Entonces $\mathrm{rev}(n)$ tiene por lo menos dos dígitos menos que n. Por otro lado, p_n y $\mathrm{rev}(p_n)$ tienen el mismo número de dígitos porque p_n es primo y no puede terminar en 0.

La idea es mostrar que el número de dígitos de $p_{\mathrm{rev}(n)}$ es demasiado chico para corresponder al número de digitos de $\mathrm{rev}(p_n)$.

Para ello usaremos las siguientes cotas (ver (Bach y Shallit, 1996) y (Dusart, 1999))

$$n\log(\tfrac{n}{e}) + n\log(\log(n)) < p_n < n\log(n) + n\log(\log(n)). \tag{4.7}$$

Usando la cota superior para $p_{\mathrm{rev}(n)}$ y el hecho que $\mathrm{rev}(n) < \frac{n}{10} < \frac{n}{e}$ tenemos

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{rev}(n)} &< \mathrm{rev}(n)\log(\mathrm{rev}(n)) + \mathrm{rev}(n)\log(\log(\mathrm{rev}(n)) \\ &< \tfrac{n}{e}\log(\tfrac{n}{e}) + \tfrac{n}{e}\log(\log(\tfrac{n}{e})) \\ &< \tfrac{n}{e}\log(\tfrac{n}{e}) + \tfrac{n}{e}\log(\log(n)). \end{aligned}$$

Usando las propiedades del logaritmo y la función piso, vemos que el número de dígitos de $p_{\mathrm{rev}(n)}$ es *a lo sumo* de

$$\left\lfloor \log_{10}\left(\tfrac{n}{10}\log(\tfrac{n}{10}) + \tfrac{n}{10}\log(\log(\tfrac{n}{10}))\right)\right\rfloor + 1 = \left\lfloor \log_{10}\left(n\log(\tfrac{n}{10}) + n\log(\log(n))\right)\right\rfloor.$$

Usando la cota inferior en (4.7) para p_n tenemos que

$$p_n > n\log(\tfrac{n}{e}) + n\log(\log(n)) > n\log(\tfrac{n}{10}) + n\log(\log(n)).$$

Luego, el número de dígitos de p_n es *por lo menos*

$$\left\lfloor \log_{10}\left(n\log(\tfrac{n}{10}) + n\log(\log(n))\right)\right\rfloor + 1$$

De esta manera, el número de dígitos de p_n, y por lo tanto de $\mathrm{rev}(p_n)$ porque tienen el mismo número de dígitos, es por lo menos uno más que el número de dígitos de $p_{\mathrm{rev}(n)}$ Luego,

$$p_{\mathrm{rev}(n)} \neq \mathrm{rev}(p_n).$$

Esto es absurdo, pues p_n es primo de Sheldon y por lo tanto $100 \nmid n$. □

Dado un primo grande que es candidato a ser primo de Sheldon, vemos si no cumple alguna de las propiedades de las Proposiciones 4.2 o 4.3 y lo descartamos. La prueba se basará fuertemente en esto.

Por ejemplo, si p_n es un primo de Sheldon entonces n es 7-suave y no divisible por 100. Esto restringe la búsqueda un montón. Sólo 3039 de los primeros mil millones de números ($n \leq 10^{10}$) son de esta forma. En otras palabras, sólo este criterio deja afuera al $99{,}9997\,\%$ de los primeros mil millones de primos como posibles primos de Sheldon.

La prueba de Pomerance y Spicer. Resulta que 73 es el único primo de Sheldon y Pomerance y Spicer se tomaron el trabajo de demostralo. Es imposible entrar aquí, por dificultad y extensión, en los detalles por demás técnicos de la demostración, así que sólo intentaremos dar una idea, salteando los detalles.

Dos cotas importantes. Se sabe que el logaritmo entero

$$\mathrm{li}(x) = \int_2^\infty \frac{dt}{\log(t)}$$

definido y considerando por Gauss, aproxima mejor a $\pi(x)$ que la función $x/\log(x)$ del teorema del número primo.

Definamos las función aritmética

$$C(n) = p_n - \frac{1}{\mathrm{li}(n)}$$

para $n \in \mathbb{N}$ y la función real

$$E(x) = \Big(5{,}5 \times 10^9 + 2{,}3 \times 10^{-8} \frac{x}{\log(x)} + 1{,}202 \times 10^{-11} x\Big) \log(x)$$

para $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. En los Lemmas 4.3 y 4.5 de (Pomerance y Spicer, 2019), los autores llegan después de bastante trabajo a estas cotas (quizás sea la parte mas difícil de la demostración).

Proposición 4.4 ((Pomerance y Spicer, 2019)). *Sea p_n el n-ésimo primo.*

(a) *Si $p_n < 10^{19}$ entonces*

$$0 < C(n) < \sqrt{p_n}\Big(1{,}95 + \frac{3{,}9}{\log(p_n)} + \frac{19{,}5}{(\log(p_n))^2}\Big).$$

(b) *Si $p_n > 10^{19}$ entonces $|C(n)| < E(\mathrm{li}(n)^{-1})$.*

Gracias a esta proposición, la demostración consiste en descartar todos los candidatos a primos de Sheldon usando los resultados previos (Proposiciones 4.2 y 4.3) distinguiendo los casos en que $p_n < 10^{19}$ y $10^{19} < p_n < 10^{45}$.

En general, dado n grande es difícil saber cuál es el primo n-ésimo asociado. Pero es facil calcular el inverso de $\mathrm{li}(n)$. Notar que (a) de la proposición se usa justamente para estimar el error de aproximar p_n por $\mathrm{li}(n)^{-1}$. Si solo conocemos n aún así podemos usar (a) de la proposición, combinado con la cota derecha de (4.7) para $n \geq 6$. Por ejemplo, supongamos que $n = 3^{35}$. ¿Quién es el primo p_n? Calculamos

$$\mathrm{li}(3^{35})^{-1} = 2{,}0584418265351821354 1 \times 10^{18} \tag{4.8}$$

con un error menor al $0,01$. El error dado por (4.7) y la parte (a) de la Proposición (4.4) es $< 3 \times 10^9$. Luego, deducimos que p_n tiene 19 dígitos y que los 9 primeros dígitos son 205844182. Claramente

$$p_n = 205844182 a_{11} a_{10} \cdots a_2 a_1 \tag{4.9}$$

no es un primo de Sheldon, pues fallará la propiedad producto (ya que $\Pi(p_n) = 0$).

Descartando primos menores que 10^{19}*.* Definamos el número

$$N := 2{,}341 \times 10^{17},$$

y notemos que por (a) de la Proposición 4.4 se tiene

$$p_n < 10^{19} \qquad \Rightarrow \qquad n \leq N.$$

Los autores comienzan la búsqueda listando todos los números 7-suaves hasta N. Es decir, números de la forma $2^a 3^b 5^c 7^d$ tales que

$$\begin{aligned}
&0 \leq a \leq \log_2(N),\\
&0 \leq b \leq \log_3(N/2^a),\\
&0 \leq c \leq \log_5(N/2^a 3^b),\\
&0 \leq d \leq \log_7(N/2^a 3^b 5^c).
\end{aligned}$$

En particular, hay 57.776 enteros de esta forma. Se descartan los 7.575 que son menores que 10^{10} pues ya habían sido previamente barridos al encontrar los 3 primos que satisfacen la propiedad producto.

Luego usan las Proposiciones 4.2 y 4.3 para descartar los 50.201 valores de n que faltan. Primero se descartan los n tales que $100 \mid n$ ó $5^4 \mid n$, dejando 13.335 números. Luego se quedan con aquellos que tienen el dígito principal de p_n en $\{1, 3, 7, 9\}$. Esto reduce la lista a a 6.893 candidatos. Estimando p_n con $\mathrm{li}(n)^{-1}$ como en (4.8) y (4.9), las autores se quedan con 309 candidatos cuyos primeros 5 o 6 dígitos coinciden con los primeros 5 o 6 dígitos de $\mathrm{li}(n)^{-1}$ (usando la Proposición 4.4). Para esos n restantes, los autores calculan $\mathrm{rev}(n)$, y por (e) de la Proposición 4.2, sólo hay 60 de éstos tales que el dígito principal de $p_{\mathrm{rev}(n)}$ está en $\{3, 7, 9\}$. De éstos, 55 tienen los primeros 5 dígitos conocidos. Las 5 excepciones corresponden a los n tales que $\mathrm{rev}(n)$ es uno de estos

$$4.019.155.056, \quad 4.032.803.241, \quad 4.079.545.092,$$
$$12.427.422.237, \quad 29.794.252.274.$$

Estos son suficientemente pequeños como para poder calcular los primos p_n directamente:

$$97.496.326.163, \quad 97.841.660.857, \quad 99.024.780.191,$$
$$316.109.730.941, \quad 785.009.387.557.$$

Todos tienen un dígito 0 o un dígito 1 interior por lo que son descartados por parte (d) de la Proposición 4.2.

Con los 55 números restantes, se usa el test del producto con $\mathrm{rev}(n)$ como arriba y esto elimina todos salvo 6 números. Estos n son muy grandes para calcular sus primos $p_{\mathrm{rev}(n)}$, pero se estudian el número de dígitos y sólo 2 de ellos tienen la misma cantidad de dígitos que el primo p_n. Para esos 2 primos, se conocen los primeros 6 dígitos de p_n y los primeros 5 dígitos de $p_{\mathrm{rev}(n)}$, que deberían ser los últimos 5 dígitos de p_n si este fuera un primo de Sheldon. El producto de estos 11 dígitos por la cantidad apropiada de potencias de 9 (para los dígitos desconocidos) es demasiado pequeña para satisfacer la propiedad producto. Esto completa la búsqueda hasta 10^{19}.

Descartando primos menores que 10^{45}. Acá se aplica el mismo método que antes pero ahora usando la parte (b) de la Proposición 4.4:

$$p_n < 10^{45} \quad \Rightarrow \quad n < 9,746 \times 10^{42}.$$

Se calculan números 7-suaves hasta esta cantidad, hay 1.865.251 de ellos. Quitando los que son menores a $2,34 \times 10^{17}$ y aquellos que son divisibles por 100 o 125 queda una lista de 213.449 números. Cada uno de éstos da un primer dígito para p_n, y seleccionando solo aquellos tal que el primer dígito está en $\{1,3,7,9\}$ nos deja con 112.344 números. Luego se chequea que para cada uno de ellos se pueda usar $\mathrm{li}(n)^{-1}$ para determinar el números exacto de dígitos de p_n.

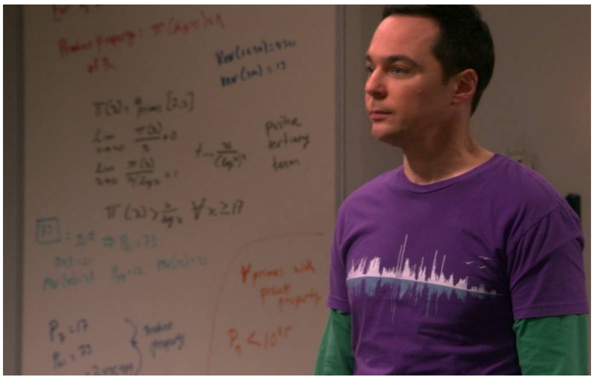
Luego se testea si los primeros 5 dígitos de p_n no son ambiguos y resulta que, salvo 167, todos son de esta forma. Para aquellos que satisfacen la propiedad, multiplicamos los primeros 5 dígitos por la potencia apropiada de 9 para tener una cota superior sobre el producto de dígitos de p_n, manteniendo sólo los 992 de ellos donde esta cota es por lo menos n. Luego, se repite este procedimiento pero con los primeros 6 dígitos. Todos, salvo 27, tienen los primeros 6 dígitos determinados; y, de los que quedan, todos, salvo 278, son descartados por que el producto de sus dígitos es muy pequeño. Luego, uno se queda con aquellos tal que el producto de los primeros 6 dígitos divide a n, sólo hay 142 de estos.

Así, nos queda un remanente de $336 = 167 + 27 + 142$ números n que aún no pudimos descartar. Para éstos, se verifica que el número de dígitos y el primer dígito de $p_{rev(n)}$ está determinado por $\mathrm{li}(\mathrm{rev}(n))^{-1}$. Ahora, se descartan aquellos para los que el número de dígitos de p_n no coincide con el número de dígitos de $p_{\mathrm{rev}(n)}$ y aquellos cuyo primer dígito de $p_{\mathrm{rev}(n)}$ no está en $\{3,7,9\}$. Esto solo deja 44 números... Para cada uno de éstos, $\mathrm{li}(\mathrm{rev}(n))^{-1}$ determina los primeros 5 dígitos de $p_{\mathrm{rev}(n)}$, y todos estos valores de n fallan el test de multiplicar los primeros 5 dígitos $p_{\mathrm{rev}(n)}$ por la potencia apropiada de 9 y compararlo con n. Esto completa la demostración de que 73 es el único primo de Sheldon.

Ya puedo escuchar retumbando en mi cabeza a Sheldon gritando un estridente

ese especie del '¡Eureka!' de Arquímides moderna...

La historia, como no podía ser de otro modo, se cierra de forma perfecta: una pizarra con partes de la demostración de Pomerance y Spicer de la conjetura de Sheldon aparece en el episodio 274 (abril de 2019) de la serie.



Finalmente, todo lo hecho en el artículo está hecho en base 10, pero bien se podría definir números de Sheldon en una base b. La propiedad producto se basa en la representación en base 10, pero esto puede ser cambiado. Pomerance y Spicer dan el siguiente ejemplo: 226.697 es el primo número 20.160, y su representación en base 9 es $(3748659)_9$. Multipicando estos dígitos entre sí da 20.160, o sea que $226.697 = p_{20.160}$ satisface la propiedad producto en base 9.

§4. Números de Sheldon en sucesiones.

Finalmente, dejamos de seguir los trabajos de Spicer y colaboradores ((Byrnes y cols., s.f.) y (Pomerance y Spicer, 2019)) para dar una generalización propia de los primos de Sheldon, a números de Sheldon en sucesiones. Es decir, pasamos de buscar números que satisfacen ciertas condiciones en la sucesión de números primos a buscar números que satisfagan esas condiciones en otras sucesiones.

Las propiedades espejo y producto que hemos visto involucran el reverso de números indexados y producto de los dígitos de los números. Estas propiedades pueden definirse en general para cualquier sucesión de números $\{a_n\}$ y por lo tanto podemos hablar de números de Sheldon en $\{a_n\}$.

Definición 5.1. *Sea $\mathbb{A} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números naturales. Decimos que el número a_n satisface la propiedad espejo (PE) si el reverso de a_n es el rev(n)-ésimo término de la sucesión, es decir si*

$$\operatorname{rev}(a_n) = a_{\operatorname{rev}(n)}.$$

Decimos que a_n satisface la propiedad producto (PP) si

$$\Pi(a_n) = n.$$

Luego, a_n es un número de Sheldon en $\mathbb{A}$ si a_n satisface la propiedad espejo y la propiedad producto.

No hemos puesto condiciones sobre la sucesión; pero, para descartar casos triviales, conviene pensar que no hay repeticiones, por lo que conviene suponer que $a_n \neq a_m$ para todo $n \neq m$. Tampoco es necesario pedir que la sucesión sea creciente, pero es usual asumirlo.

Notar que con esta generalidad (una sucesión cualquiera) no hay mucho que se pueda decir. Sin embargo si n es capicúa y a_n satisface la PP entonces a_n debe ser capicúa pues

$$\mathrm{rev}(a_n) = a_{\mathrm{rev}(n)} = a_n.$$

Del mismo modo, si a_n es capicúa y satisface PP entonces n es capicúa necesariamente. Y si ambos a_n y su índice n son capicúas entonces a_n debe satisfacer PP. O sea, dos cualesquiera de las condiciones implica la tercera. Estos son candidatos naturales a números de Sheldon en $\mathbb{A}$.

Denotamos por $\mathcal{E}(\mathbb{A})$ y $\mathcal{P}(\mathbb{A})$ a los conjuntos de números que cumplen la propiedad espejo y la propiedad producto en $\mathbb{A}$, respectivamente, y denotamos por $\mathcal{S}(\mathbb{A})$ al conjunto de números de Sheldon en $\mathbb{A}$. Luego, tenemos

$$\mathcal{S}(\mathbb{A}) = \mathcal{E}(\mathbb{A}) \cap \mathcal{P}(\mathbb{A}).$$

Lo que dice el Teorema de Pomerance-Spicer es que

$$\mathcal{S}(\mathbb{P}) = \{73\}$$

donde $\mathbb{P} = \{p_n\}$ es la sucesión de primos positivos y vimos que $\mathcal{E}(\mathbb{P}) = \{73, 143.787.341\}$ y que $\mathcal{P}(\mathbb{P}) \supset \{17, 73, 2.475.989\}$ y se conjetura que vale la igualdad.

Podemos entonces preguntarnos por los números de Sheldon en los naturales $\mathbb{N}$ o bien en sucesiones famosas como los números de Fibonacci $\{F_n\}$, de Catalan $\{C_n\}$ o de Bell $\{B_n\}$, etc. O bien para números triangulares $\{T_n\}$, hexagonales $\{H_n\}$ (k-poligonales en general), estelares $\{S_n\}$, etcétera.

Para los naturales tenemos lo siguiente.

Proposición 5.2. *Los números de Sheldon en* $\mathbb{N}$ *son los dígitos* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Demostración. En primer lugar es claro que todo natural satisface la PE. En efecto, como $a_n = n$ para todo n, se tiene que

$$\mathrm{rev}(a_n) = \mathrm{rev}(n) = a_{\mathrm{rev}(n)}.$$

Sobre la propiedad producto debemos ver si

$$\Pi(n) = n.$$

Es claro que todo $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ la cumple. Veamos que ningún $n \geq 10$ la puede cumplir. Supongamos que n tiene k dígitos con $k \geq 2$, luego

$$n = (b_k \cdots b_1)_{10} = b_k 10^{k-1} + \cdots + b_2 10 + b_1$$

con $b_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ para todo $i = 1, \dots, k$ y $b_k \neq 0$. Tenemos que

$$\Pi(n) = b_k \cdot b_{k-1} \cdots b_2 \cdot b_1 \leq b_k \cdot 9^{k-1} \qquad \text{y} \qquad n > b_k \cdot 10^{k-1}.$$

Luego $\Pi(n) < n$ para todo $n > 9$.

De este modo,

$$\mathcal{S}(\mathbb{N}) = \mathcal{E}(\mathbb{N}) \cap \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \cap \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},$$

como queríamos ver. □

Sobre las sucesiones más famosas como la de Fibonacci y los números de Catalán conjeturamos que no poseen números de Sheldon, es decir

$$\mathcal{S}(\{F_n\}) = \mathcal{S}(\{C_n\}) = \varnothing.$$

Aquí los números F_n y C_n crecen muy rápido y el argumento de números de dígitos usado por Pomerance y Spicer (ver prueba de Proposición 4.3) se aplicaría aquí del mismo modo.

Más aún, uno podría estudiar primos de Sheldon en subsucesiones de los primos. Es decir, ¿hay primos gemelos, o primos primos, o primos sexies de Sheldon? ¿Hay primos de Fermat, o de Mersenne, o de Germain de Sheldon? ¿Hay primos de Chen, o de Cunningham, o de Proth, o de Woodall, o de Wagstaff de Sheldon? En este caso, las Proposiciones 4.2 y 4.3 siguen siendo válidas por tratarse de sucesiones de primos, pero hay que estudiar la propiedad espejo en cada caso, pues cambian los índices. Dejo planteados estos interrogantes para el lector curioso.

Otra variante más que se me ocurre, es reemplazar la propiedad producto por la propiedad suma y definir primos de Sheldon aditivos. Un primo aditivo de Sheldon es un primo p_n que satisface la propiedad espejo y tal que la suma de sus dígitos es n. O sea, si definimos

$$\Sigma(n) = a_k + \cdots + a_1$$

donde $n = a_k \cdots a_1$ entonces p_n satisface la propiedad suma si

$$\Sigma(p_n) = n.$$

Más generalmente tenemos lo siguiente.

Definición 5.3. *Sea $\mathbb{A} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$. Un a_n es un número aditivo de Sheldon en $\mathbb{A}$ si a_n satisface la propiedad espejo y la propiedad suma, o sea si*

$$\mathrm{rev}(a_n) = a_{\mathrm{rev}(n)} \qquad y \qquad \Sigma(a_n) = n.$$

Denotemos por $\mathcal{A}(\{a_n\})$ al conjunto de números en $\{a_n\}$ que satisfacen la propiedad suma (adición) y por $\mathcal{S}_a(\{a_n\})$ a los números aditivos de Sheldon en $\{a_n\}$, luego

$$\mathcal{S}_a(\{a_n\}) = \mathcal{E}(\{a_n\}) \cap \mathcal{A}(\{a_n\}).$$

Es fácil ver que el conjunto de números aditivos de Sheldon de $\mathbb{N}$ es también el conjunto de dígitos, es decir

$$\mathcal{S}_a(\mathbb{N}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Como la suma de los dígitos de un número crece mucho menos que el producto de esos mismos dígitos (genéricamente, salvo casos triviales) es de esperar que de haber números aditivos de Sheldon estos sean pequeños.

Damos a continuación algunos ejemplos de sucesiones donde encontramos algunos números de Sheldon. En muchas otras sucesiones no encontramos números de Sheldon pequeños.

Ejemplo 5.4. Sean $\{B_n\}$, $\{C_n\}$ y $\{P_n\}$ las sucesiones de números de Bell, de Catalan y de Pell, respectivamente. Sus primeros términos son

$$\begin{aligned}
B_n &= 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, \\
C_n &= 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, \\
P_n &= 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860,
\end{aligned}$$

Sea $\{b_n\}$ cualquiera de estas sucesiones. Tenemos $b_2 = 2$. Todos estos son números de Sheldon (tanto aditiva como multiplicativamente). Como el índice y el número es 2 que es capicúa, la propiedad espejo es automática y tanto la suma como el producto de los dígitos de 2 es 2.

Ejemplo 5.5. Sea $\{F_n\}$ la sucesión de números de Fibonacci. Esta comienza

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597.$$

Claramente, $F_1 = 1$ y $F_5 = 5$ son números de Sheldon en $\{F_n\}$, tanto multiplicativa como aditivamente.

Ejemplo 5.6. Sea $\{p_n\}$ la sucesión de primos de Proth definidos como los primos de la forma $k \cdot 2^m + 1$ donde k es impar y $k < 2^m$ con $m \geq 1$. Esta sucesión comienza

$$3, 5, 13, 17, 41, 97, 113, 193, 241, 257, 353, 449, 577, 641, 673, 769, 929.$$

Luego

$$p_{11} = 353$$

es un número de Sheldon aditivo en $\{p_n\}$ pues como n y p_n son capicúas, la propiedad espejo se cumple y, como

$$3 + 5 + 3 = 11,$$

también se cumple la propiedad aditiva.

Ejemplo 5.7. Sea $\{P_n\}$ la sucesión de números pentagonales

$$P_n = \tfrac{1}{2}n(3n - 1).$$

Sus primeros términos son 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, 176, 210, 247, 287, 330, 376, 425. Luego

$$P_4 = 22$$

es un número de Sheldon en $\{P_n\}$ tanto aditiva como multiplicativamente pues como 4 y 22 son capicúas, la propiedad espejo se cumple automáticamente y como

$$2 + 2 = 2 \cdot 2 = 4$$

también se cumple la propiedad aditiva.

Ejemplo 5.8. Sea $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de números de Jacobsthal

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}.$$

El número J_n cuenta, por ejemplo, la cantidad de formas distintas en que un rectángulo de $(n-1) \times 2$ puede ser embaldosado solo usando dominós 2×1 y cuadrados 2×2. La sucesión empieza 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731. Luego

$$J_9 = 171$$

es un número de Sheldon aditivo en $\{J_n\}$ pues 9 y 171 son capicúas y $1 + 7 + 1 = 9$.

Ejemplo 5.9. Sea $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de números de Motzkin. M_n es el número de formas en que se pueden trazar cuerdas que no se intersecan entre n puntos en un círculo y se los puede calcular con la fórmula

$$M_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{n}{2k}.$$

Sus primeros términos son 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, 835, 2188, 5798. Luego

$$M_2 = 2 \qquad \text{y} \qquad M_8 = 323$$

son números de Sheldon en $\{M_n\}$ aditivos (M_2 también multiplicativo).

¿Cuáles son los conjuntos de números de Sheldon para las sucesiones dadas en los ejemplos?

Para concluir damos dos sucesiones (subsucesiones de la sucesión de capicúas) que poseen una cantidad infinita de números de Sheldon aditivos. Sea

$$\mathcal{C} = \{c_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, \dots, 99, 101, \dots\}$$

el conjunto de números capicúas de $\mathbb{N}$. Sea $\mathbb{U} = \{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de *repitunos* (repunits). Es decir,

$$R_n = \frac{10^n - 1}{9} = 10^{k-1} + \cdots + 10^2 + 10 + 1 = \underbrace{11 \cdots 1}_{n\text{-veces}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. O sea, la sucesión es $1, 11, 111, 1111, 11111$, etcétera.

Proposición 5.10. *El conjunto de números aditivos de Sheldon en $\mathbb{U}$ es $\mathcal{C}$.*

Demostración. Es claro que como R_n es capicúa, R_n satisface la propiedad espejo si y solo si n es capicúa. Luego $\mathcal{E}(\mathbb{U}) = \mathcal{C}$. Además, la suma de dígitos de R_n es obviamente n, es decir $\Sigma(R_n) = n$ para todo n. O sea que $\mathcal{A}(\mathbb{U}) = \mathbb{N}$. De este modo tenemos que

$$\mathcal{S}_a(\mathbb{U}) = \mathcal{E}(\mathbb{U}) \cap \mathcal{A}(\mathbb{U}) = \mathcal{C},$$

como queríamos ver. □

Sea $\mathbb{D} = \{D_n\}$ la sucesión de *repidígitos* (repdigits) definida así: se toman todos los números naturales de la forma

$$\underbrace{dd\cdots dd}_{k\text{-veces}}$$

con $1 \leq d \leq 9$ un dígito y $k \in \mathbb{N}$. Es decir,

$$\{D_n\} = \{R_n, 2R_n, \ldots, 9R_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Los primeros términos son

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99,$$
$$111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999, 1111, 2222, \ldots, 9999.$$

Proposición 5.11. *El conjunto de números aditivos de Sheldon en $\mathbb{D}$ es*

$$\mathcal{S}_a(\mathbb{D}) = \{D_{9k} : k \in \mathcal{C}\}.$$

Demostración. Es claro que como D_n es capicúa para todo n, luego D_n satisface la propiedad espejo si y solo si n es capicúa. Notar que $D_9 = 9$, $D_{18} = 99$, $D_{27} = 999$ y en general se tiene

$$D_{9k} = \underbrace{99\cdots 9}_{k\text{-veces}} = 9R_k.$$

Estos números satisfacen la propiedad suma pues $\Sigma(D_{9k}) = 9k$. Es fácil convencerse que estos son los únicos repidígitos que satisfacen la propiedad suma. Luego, los números de Sheldon en $\mathbb{D}$ son los D_{9k} con $9k$ capicúa. □

Los primos de Sheldon aditivos de $\{R_n\}$ son los números D_{9k} formados por repeticiones de un número $9k$ de 9's tal que $9k$ resulta capicúa. Los primeros de estos números son

$$\begin{array}{llll}
D_9 = D_{9\cdot 1}, & D_{99} = D_{9\cdot 11}, & D_{171} = D_{9\cdot 19}, & D_{252} = D_{9\cdot 28}, \\
D_{333} = D_{9\cdot 37}, & D_{414} = D_{9\cdot 46}, & D_{585} = D_{9\cdot 65}, & D_{666} = D_{9\cdot 74}, \\
D_{747} = D_{9\cdot 83}, & D_{828} = D_{9\cdot 92}, & D_{909} = D_{9\cdot 101}, & D_{999} = D_{9\cdot 111} \\
D_{1881} = D_{9\cdot 209}, & D_{2772} = D_{9\cdot 308}, & D_{3663} = D_{9\cdot 407}, & D_{4554} = D_{9\cdot 506}.
\end{array}$$

Comentarios finales

Resulta interesante, y por que somos curiosos, preguntarnos por el número 73 en la cultura. Por ejemplo, es curiosa la siguiente anécdota. A mediados de los años '80 la editorial Hyspamérica le hizo una propuesta a Jorge Luis Borges: seleccionar 100 libros indispensables y escribir un prólogo para cada uno. La muerte lo sorprendió escribiendo el prólogo del libro número 73, que es nada más y nada menos que *'El libro de los muertos'*...

Para muestra basta un botón, por lo que solo dejo estas dos pequeñas referencias. Por cuestiones de tiempo y espacio no incluiré detalles aquí (pero sugiero que el lector haga su propia búsqueda profundizando estos ítems y buscando nuevos):

- Los sonetos 37 y 73 de William Shakespeare, que datan del año 1609 (¡primo!). Sólo damos el 73.

  SONNET 73

  That time of year thou mayst in me behold
  When yellow leaves, or none, or few, do hang
  Upon those boughs which shake against the cold,
  Bare ruin'd choirs, where late the sweet birds sang.

  In me thou see'st the twilight of such day
  As after sunset fadeth in the west,
  Which by and by black night doth take away,
  Death's second self, that seals up all in rest.

  In me thou see'st the glowing of such fire
  That on the ashes of his youth doth lie,
  As the death-bed whereon it must expire,
  Consum'd with that which it was nourish'd by.

  This thou perceiv'st, which makes thy love more strong,
  To love that well which thou must leave ere long.

  Recordamos que los sonetos son poemas de 14 versos. En los idiomas latinos están divididos en 2 cuartetos y 2 tercetos, pero el soneto inglés está estructurado en 3 cuartetos y un dístico final.

- Las Proposiciones 37 y 73 del Libro X de *Los Elementos* de Euclides. Están curiosamente relacionadas tratando el tema de rectas mediales y apótomas, casos particulares de lo que Euclides llama rectas irracionales.

> PROPOSICIÓN 37: *Si se suman dos rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un rectángulo racional, la recta entera no es racional; llámesela primera bimedial.*
>
> PROPOSICIÓN 73: *Si se quita de una recta racional otra recta racional que sea conmensurable sólo en cuadrado con la recta entera, la recta restante es irracional; llámese apótoma.*

Nunca viene mal volver a leer a Euclides; y, para aquel que no sabe, aprender sobre las rectas bimediales y apótomas.

Para terminar, sólo decir que el día número 73 de un año no bisiesto es el 14 de marzo (14 como los versos de un soneto). O sea, ¡el famoso día Pi! (π-day en inglés, pues la fecha es 3/14 (reversa de la fecha latina 14/3) y $3{,}14$ es una aproximación a π). Además,

$$365 = 5 \cdot 73,$$

por lo que este día es un quinto exacto de un año natural.

Sin embargo, una mejor aproximación racional a π es $\frac{22}{7}$. En efecto, tenemos $\pi \simeq 3,141592654$ y

$$\begin{aligned} 3{,}14 &\simeq \tfrac{314}{100} = \tfrac{157}{50} = 3 + \tfrac{7}{50}, \\ \tfrac{22}{7} &= 3 + \tfrac{1}{7} \simeq 3{,}14285714286. \end{aligned}$$

De donde $3{,}14 < \pi < \frac{22}{7}$ pero

$$\begin{aligned} \pi - 3{,}14 &\simeq 0{,}00159265358, \\ \tfrac{22}{7} - \pi &\simeq 0{,}00126448926. \end{aligned}$$

Por eso, y por que este año justo es bisiesto, es que envié el trabajo el 22 de julio (22/7 en países latinos). Y cómo se habrán alineado los planetas... que el artículo va de las páginas 37 a la 73.

Bibliografía

Bach, E., y Shallit, J. O. (1996). *Algorithmic Number Theory 1* (Vol. 233). MIT Press.

Byrnes, J., Spicer, C., y Turnquist, A. (s.f.). The Sheldon conjecture. *Math. Horiz.*, *23*(2).

Dusart, P. (1999). The k-th prime is greater than $k(\ln k + \ln(\ln k) - 1)$ for $k \geq 2$. *Mathematics of Computation*, *68*(225), 411–415.

Gleason, A. M. (1988). Angle Trisection, the Heptagon, and the Triskaidecagon. *The American Mathematical Monthly*, *95*(3), 185–194.

Pomerance, C., y Spicer, C. (2019). Proof of the Sheldon conjecture. *Am. Math. Mon.*, *126*(8), 688–698.

Rosser, J. B., y Schoenfeld, L. (1962). Approximate formulas for some functions of prime numbers. *Illinois J. Math.*, *6*, 64–945.

Ricardo A. Podestá
FaMAF – CIEM (CONICET), Universidad Nacional de Córdoba.
Av. Medina Allende 2144, Ciudad Universitaria, (5000), Córdoba, Argentina.
(✉) *podesta@famaf.unc.edu.ar*

Recibido: *22 de julio de 2024*.
Aceptado: *13 de agosto de 2024*.
Publicado en línea: *30 de agosto de 2024*.