Revista de Educación Matemática
Volumen 39, N° 2 (2024), páginas 18 – 36
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Aportes para la Enseñanza de la Matemática

ALGUNAS CONTRIBUCIONES DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y EL USO DE LA TECNOLOGÍA AL PENSAMIENTO MATEMÁTICO: EXPERIENCIA DE AULA CON ALUMNOS UNIVERSITARIOS DE PRIMER AÑO

Noelia Londoño Millán, José David Zaldívar Rojas y Miguel Vertiz Álvarez

Resumen. La enseñanza de las matemáticas se enriquece notablemente con la resolución de problemas, especialmente cuando se incorporan estrategias, diversas representaciones del objeto matemático y herramientas tecnológicas. Estos elementos permiten desarrollar una amplia gama de destrezas y habilidades, complementando el tradicional lápiz y papel. El propósito de este artículo es describir los procesos para abordar la solución de un problema sobre lugares geométricos, partiendo de dos elementos dados: una recta y un punto. En esta experiencia de aula, participaron diez estudiantes de segundo semestre de la carrera de Matemáticas Aplicadas en una universidad del norte de México. Se destacó el papel fundamental del software GeoGebra, que facilitó la exploración, comprobación, predicción y descubrimiento de varios tipos de soluciones, utilizando diferentes registros de representación. Además, se evidenciaron diversas formas de razonamiento matemático, desde el ensayo y error hasta el desarrollo de procesos analíticos bien estructurados, así como una variedad de estrategias de solución que requirieron el dominio de conocimientos y el uso sistemático de la tecnología.

Palabras clave: GeoGebra, resolución de problemas, estrategias.

Abstract. Mathematics teaching is enriched by problem resolution, apart from knowledge, a great variety of skills and abilities are generated when strategies, representations of the mathematical object and technological tools are incorporated, added to those developed using pencil and paper. The purpose of this article is to describe the processes approaching problem solutions of geometric places from two given elements (a line and a point). Ten second-semester students of the Applied Mathematics program at a university in northern Mexico participated in the classroom experience. The role played using the GeoGebra software was notorious, which helped to explore, verify, predict and discover various types of solutions, using different representation registers, as well as different forms of mathematical reasoning ranging from trial-error to the development of well-structured analytical processes and a variety of solution strategies that involved mastery of knowledge and the systematic use of technology.

Keywords: GeoGebra, problem solving, strategies.

§1. Introducción

A pesar de los cambios realizados en los currículos oficiales de matemáticas en los últimos años, la competencia conocida como resolución de problemas ha perdurado. Esto posiblemente se debe al valor agregado que esta competencia tiene en el desarrollo de destrezas tales como la comunicación, la comprensión, la realización de cálculos y procedimientos, entre otras. Estas destrezas son resumidas por Echenique (2006) en la siguiente frase: "Una persona matemáticamente competente es aquella que comprende los contenidos y procesos matemáticos básicos, los interrelaciona, los asocia adecuadamente a la resolución de diversas situaciones y es capaz de argumentar sus decisiones" (p. 16).

Resolver problemas no es una tarea fácil, ya que implica enfrentarse a una situación desconocida, lo cual puede generar incertidumbre, desconfianza, desapego, rechazo e incluso deseos de renunciar desde el principio. Polya (1965) sugiere que para que los estudiantes resuelvan problemas, deben estar motivados para hacerlo sin recibir ayuda excesiva o insuficiente. Comienza con la comprensión y ofrece ideas a través de preguntas, incluso generales, que llevan a los estudiantes a pensar en soluciones sin decirles realmente qué hacer. Porque una característica atribuible a la resolución de problemas es precisamente el uso del razonamiento, el cual puede surgir con preguntas como: "¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición?" (Polya, 1965, p. 26).

Son numerosas las contribuciones que se pueden extraer de la resolución de problemas y amplio es su impacto en los procesos didácticos en el aula de matemáticas. En particular, se destacan las ideas de Arteaga, Macías, y Pizarro (2020), quienes la caracterizan como una potente herramienta que permite articular ideas y movilizar "capacidades y habilidades como la síntesis, el análisis, la visualización, la argumentación, la fluidez, la audacia, la autonomía, etc." (p. 279). Estos procesos se convierten en elementos clave para los estudiantes, quienes posteriormente podrán autorregular su propio trabajo intelectual y enfrentar favorablemente situaciones más generales y complejas dentro y fuera del ámbito escolar.

Otros aportes que se atribuyen a la resolución de problemas están relacionados con los procesos didácticos, donde se evidencian métodos clave del pensamiento heurístico matemático, como la "inducción, la deducción, la generalización y la particularización" (Defaz, 2017, p. 17). Son precisamente estos elementos los que se ponen en práctica durante la resolución de problemas, lo que contribuye al desarrollo cognitivo del resolutor y fomenta una postura reflexiva ante la vida. Teniendo en cuenta lo anteriormente expuesto, reportamos una experiencia de aula realizada como parte de una investigación más amplia en la que nos planteamos describir y analizar las formas de razonamiento de los estudiantes cuando se enfrentan a la resolución de un problema, el uso que hacen de la tecnología y el dominio de conocimientos que poseen.

§2. Dos referentes conceptuales

En este apartado se hará referencia a dos temas relevantes que se tuvieron en cuenta durante la experiencia en el aula: la resolución de problemas y el uso de la tecnología. Se destacará la importancia de ambos y su combinación. Es bien sabido que la resolución de problemas ha sido una fuente de inspiración desde la antigüedad, y en tiempos actuales no es la excepción. Varios autores (Mason, Burton, y Stacey, 1989; Santos-Trigo, 2016; Schoenfeld, 1985), entre otros, continúan manteniendo vigente esta actividad a través de su producción científica, considerándola hoy día tanto una competencia matemática como una línea de investigación.

2.1. La resolución de problemas. Aunque la literatura reporta varios autores sobre este tema, la perspectiva a considerar en este artículo es la de Schoenfeld (1985). Este autor realizó un conjunto de investigaciones donde comparó el desempeño de estudiantes de primeros semestres de carreras de matemáticas con el trabajo que ejecutan los matemáticos profesionales al resolver los mismos problemas. De sus investigaciones dedujo que en la resolución de problemas intervienen cuatro dimensiones, las cuales, ejecutadas en conjunto, hacen posible la resolución de problemas de forma exitosa. Estas dimensiones son: el dominio de conocimientos, el sistema de creencias, las estrategias heurísticas y las estrategias metacognitivas.

El dominio de conocimientos se refiere al conjunto de recursos matemáticos que posee el resolutor y que puede emplear en la resolución del problema, como axiomas, definiciones, algoritmos, teoremas, etc. Las estrategias heurísticas, definidas por Polya (1965) y retomadas por Schoenfeld (1985), son métodos de búsqueda y exploración ante lo desconocido, resultando útiles en la resolución de problemas. Ejemplos de estas estrategias son particularizar, resolver un problema más simple, estudiar casos especiales, usar ensayo y error, iniciar de atrás hacia adelante, entre otras.

Las estrategias metacognitivas se refieren a las acciones que emprende el resolutor para ejercer control sobre el proceso de solución, como monitorear si ha entendido el enunciado, revisar si los cálculos están bien ejecutados o si la respuesta obtenida corresponde a la solución del problema. En caso de encontrar algún error, el resolutor debe tener la habilidad de seleccionar otros recursos o redireccionar el proceso empleando estrategias heurísticas diferentes. El sistema de creencias es una compleja red de concepciones que tiene el resolutor y que afecta (positiva o negativamente) su desempeño en la resolución de problemas.

Por otro lado, existen diversas percepciones sobre la resolución de problemas, que van desde la negación o imposibilidad de afrontarlos hasta sentirse incompetente para hacerlo. En este sentido, es relevante lo planteado por Echenique (2006), quien refiere que en el proceso de resolución intervienen aspectos internos como el esfuerzo, la concentración, el interés, el gusto por aceptar retos, la tranquilidad para afrontarlos, la perseverancia, la creatividad, la autoconfianza, los estados emocionales, etc. Además, los propios procesos de investigación, como analizar los datos del enunciado y su relevancia, pensar en posibles vías de resolución que, aunque no forman parte de los contenidos propiamente matemáticos, desempeñan un papel importante y ayudan a resolver con éxito la tarea.

2.2. El papel de la tecnología en la resolución de problemas. Según Santos-Trigo (2016), la tecnología se ha convertido en una necesidad actual, ya que contribuye al desarrollo de habilidades cognitivas en diversas áreas del conocimiento, incluida la resolución de problemas y la creación de conjeturas. Esto no se limita a los entornos escolares, ya que también en la vida cotidiana se ha convertido en un recurso indispensable para la búsqueda de información, la comunicación de resultados y la interacción entre individuos, entre otros aspectos.

Es un hecho que la era tecnológica ha llegado para quedarse, y tanto las autoridades como los individuos tienen la responsabilidad de proporcionar las condiciones para capacitarse en su uso. En particular, al describir la competencia digital, Santos-Trigo (2016) indica que se refiere a que los estudiantes desarrollen recursos y habilidades en el uso de tecnología digital en la resolución de problemas. Este documento tiene como objetivo emitir diferentes soluciones utilizando recursos matemáticos como los teoremas, definiciones y procesos analíticos, así como aprovechar los recursos tecnológicos que proporciona la geometría dinámica.

La integración de la tecnología en las actividades, que se describirán más adelante, se asume desde la perspectiva de la Mediación Semiótica (Mariotti, 2009). Bajo este marco, se postula que un artefacto puede ser utilizado por un profesor como una herramienta de mediación semiótica con la intención de desarrollar signos matemáticos, los cuales se hallan separados del uso del artefacto pero que mantienen una relación semiótica. En este contexto, un elemento central en el medio didáctico de una actividad matemática que los estudiantes intentan resolver es el papel del profesor. Dicho papel es actuar como guía en el proceso de mediación semiótica, permitiendo que los estudiantes evolucionen en la comprensión de los signos, ya sea a través de gestos, producción oral o escrita, o construcción realizada con el uso de un software de geometría dinámica.

La mediación semiótica postula que la construcción del conocimiento es una consecuencia de una actividad instrumental donde los signos y objetos matemáticos emergen y evolucionan dentro de la actividad matemática con el apoyo de la interacción social entre los estudiantes. Por lo tanto, el análisis del trabajo matemático de los estudiantes mientras un componente tecnológico media la actividad se centra en el uso del artefacto durante la resolución de una tarea específica, reconociendo la construcción del conocimiento dentro de la solución de la tarea. Así, el artefacto se emplea como un mediador semiótico, lo que implica que el profesor debe guiar a los estudiantes para relacionarse con los significados que emergen del funcionamiento del artefacto y los significados que se evidencian de esta experiencia mientras se intenta resolver una tarea o problema.

La resolución de problemas en sí misma aporta grandes beneficios al desarrollo del pensamiento, y cuando se combina con el uso de la tecnología, "enriquece el aprendizaje de las matemáticas" (National Council of Teachers of Mathematics NCTM, 2000, p. 26) en varios aspectos. Por un lado, permite explorar diferentes representaciones de los objetos matemáticos, como tablas, ecuaciones, gráficas, etc. Asimismo, facilita la exploración de ideas y conjeturas que pueden refutarse o aceptarse en poco tiempo. También es posible utilizar la tecnología sin tener un dominio amplio de conocimientos y habilidades en los procesos analíticos, ya que puede proporcionar ideas y orientación sobre lo que se debe buscar y utilizar.

Además, permite corroborar resultados y visualizarlos en una gran cantidad de casos, lo que constituye una representación visual incluso cuando no se dispone de una versión analítica de la situación. El uso de la tecnología hace que los procesos de búsqueda de soluciones sean más eficientes sin excederse en tiempo, como podría suceder con el lápiz y el papel.

§3. Diseño de la experiencia didáctica

En el programa oficial del curso de Geometría Analítica de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas se incluye una unidad denominada Circunferencia, precedida por otra que trata sobre la Línea Recta. Se consideró que los alumnos contaban con el dominio de conocimientos necesarios para enfrentarse a la resolución de problemas en estos temas. Además, es importante mencionar que ya tenían al menos seis meses de experiencia utilizando el software de geometría dinámica GeoGebra. Cada tema se desarrolla con el apoyo del software como mediador semiótico por parte de los alumnos y se complementa con los procesos analíticos que la asignatura requiere.

La experiencia que se reporta en el presente manuscrito involucra a un grupo de 10 alumnos de segundo semestre, que estaban cursando la asignatura de Geometría Analítica. Para la resolución del problema asignado, algunos de los estudiantes se agruparon en parejas. La tarea se llevó a cabo en el laboratorio de cómputo de la facultad, donde tenían a su disposición una computadora y varias horas de clase para explorar más opciones de solución.

En cuanto a los conocimientos previos, se asume que los alumnos contaban, en términos de Schoenfeld (1985), con un dominio de conocimientos adquiridos en el bachillerato, así como durante el curso de Geometría Euclidiana del semestre anterior, y los adquiridos hasta el momento en Geometría Analítica. Entre estos conocimientos destacan el postulado de Euclides: "con un centro y un radio se construye una circunferencia". También sabían que:

- la distancia de un punto a una recta se representa mediante el segmento perpendicular que los une,
- una circunferencia c es tangente a una recta t en un punto P si y sólo si la perpendicular a t por P pasa por el centro de c,
- diferentes formas de la ecuación de una recta, en particular, la ecuación normal cuya forma es: $\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$ (Lehmann, 2009), en esta ecuación los coeficientes A, B y C se obtienen de la ecuación general de la línea recta: $Ax + By + C = 0$. La forma normal es de gran utilidad para calcular la distancia de una recta a un punto (x_1, y_1), esto se logra reemplazando las coordenadas particulares del punto en la ecuación, dando como resultado la distancia
$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$
- Así mismo sabían calcular la distancia entre dos puntos y conocían las diferentes formas de la ecuación de una circunferencia.

El problema propuesto fue una variante del ejercicio sobre circunferencia propuesto por Lehmann (2009) en los ejercicios del grupo 15, inciso 24: "Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A = (7, -5)$ y es tangente a la recta $x - y - 4 = 0$ en el punto $B = (3, -1)$" (p. 103). A este ejercicio se le realizaron dos modificaciones: en primer lugar, se eliminó el punto de tangencia B, y, en segundo lugar, se incorporó la exploración con el software GeoGebra. Por lo tanto, el nuevo enunciado fue el siguiente:

> Usa GeoGebra para visualizar el problema. Describe qué procesos analíticos deben llevarse a cabo para solucionar el problema. Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A = (7, -5)$ y es tangente a la recta cuya ecuación es $x - y - 4 = 0$. ¿Cuántas soluciones tiene el problema?

La Teoría de la Mediación Semiótica propone un ciclo didáctico (Mariotti y Maffia, 2018) para la implementación de tareas y actividades matemáticas donde se empleará un mediador semiótico, que en nuestro caso es el programa de geometría dinámica GeoGebra. Dicho ciclo se adaptó a nuestras necesidades, resultando en lo siguiente:

1. Se propone a los estudiantes el problema anteriormente descrito. Para la resolución debían utilizar GeoGebra y además deben realizar soluciones analíticas.

2. Se realiza una etapa de producción de signos con el GeoGebra en parejas.
3. Se realiza una discusión con el profesor sobre las producciones realizadas y se hace entrega de los archivos generados para analizar la construcción realizada.

Para recopilar la información, los alumnos debían entregar los archivos electrónicos construidos en GeoGebra con la o las soluciones encontradas. Estos archivos se recibieron a través de la plataforma Schoology. Además, las soluciones analíticas construidas con lápiz y papel se reportaron en físico. También se tomaron algunas fotografías durante la implementación del problema con los estudiantes, como se mostrará más adelante.

Es fundamental mencionar que la otra parte de la evidencia empírica orquestada proviene de entrevistas individuales semiestructuradas con los estudiantes que resolvieron el problema, tras revisar sus archivos y soluciones escritas. Las construcciones en GeoGebra, que conforman la evidencia, se complementan con algunas respuestas de los estudiantes, lo cual contribuye al análisis semiótico realizado. Por último, es importante destacar que la profesora titular del curso fue la encargada de rediseñar e implementar el problema, además de realizar las entrevistas. Su papel principal fue mediar durante el proceso de construcción y trabajo con el software, respondiendo a las dudas de los estudiantes y fomentando el diálogo con los equipos en los casos en los que no se observaba un progreso notable en las estrategias de solución.

§4. Resultados de la experiencia didáctica

Una vez revisadas todas las evidencias proporcionadas por los alumnos, procedimos a clasificarlas en dos categorías según el tipo de soluciones presentadas. Una categoría fue denominada soluciones particulares, las cuales se definieron así porque consistían en casos particulares de la resolución del problema. La otra categoría fue denominada soluciones generales, donde se encontraron respuestas que abarcaban a las soluciones particulares y además incluían otros lugares geométricos. En estas soluciones, se emplearon mayores elementos de conocimiento matemático y se aplicaron otras estrategias (ver Tabla 1).

A continuación, se hará referencia a los diferentes enfoques que llevaron a cabo los estudiantes. Se observó que no tuvieron dificultades para comprender el enunciado del problema; desde el principio, tuvieron claridad sobre lo que se les pedía. Sin embargo, les llevó varios minutos idear un camino de solución, ya que no era evidente de inmediato. Aquí radica la riqueza del problema, ya que no se trataba simplemente de aplicar algún algoritmo particular, sino de pensar en cómo encontrar al menos una solución. Polya indica que primero se debe comprender el problema, mientras que Schoenfeld sugiere que entender el problema puede llevar más tiempo que la propia solución. De hecho, con algunos alumnos ocurrió que

Tipo de soluciones	Tipo de estrategia	Cantidad de soluciones
Particulares	Ensayo y error	1
	Trazado de recta perpendicular	1
	Trazado de una recta paralela	2
Generales	Construcción de la Bisectriz	Infinitas
	Trazado de una recta Perpendicular	
	Rastro	
	Construcción de Parábolas	Infinitas

TABLA 1. Resumen general sobre tipos y estrategias empleadas en la resolución del problema planteado.

parecían no estar haciendo nada, cuando en realidad estaban dedicando tiempo a diseñar una estrategia para abordarlo.

4.1. Características de las soluciones particulares. La estrategia del ensayo y error estuvo presente en la resolución del problema. Los alumnos que la aplicaron explicaron el proceso seguido de la siguiente manera: "se trata de trazar una circunferencia cualquiera y mover el centro hasta que coincida con la recta dada". En la Figura 1, se observa el uso de la técnica de ensayo y error porque la recta no es tangente a la circunferencia; esta fue construida por aproximación. Aunque el resultado no cumple con la prueba del arrastre, este método ayudó a iniciar la exploración y a realizar posteriormente trazos más acertados.

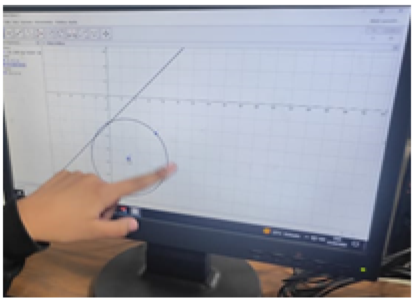

FIGURA 1. Alumnos explorando el problema mediante la estrategia ensayo-error con GeoGebra.

El uso de trazos auxiliares es común en geometría y se evidenció en las soluciones presentadas. Por ejemplo, la mayoría de los estudiantes trazó una recta perpendicular a la recta y que pasara por el punto dado $(7, -5)$. Aunque este trazo se utilizó con diferentes propósitos, para algunos alumnos la recta perpendicular sirvió para determinar el diámetro de la circunferencia, como se muestra en el caso de la Figura 2. (Es importante aclarar que la alumna no modificó la etiqueta del punto dado $(7,-5)$, por lo que en la imagen aparece con la letra E).

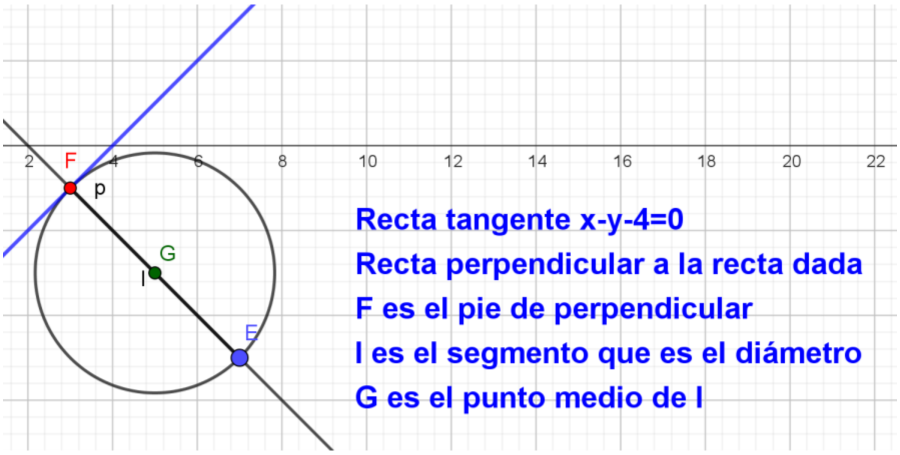

FIGURA 2. Trazado de una recta EF, perpendicular a la recta dada, que ayuda a generar el diámetro de una circunferencia solución.

Al preguntar sobre la estrategia, la alumna explica: "se utiliza una perpendicular a la recta que pase por el punto dado, esto porque la recta tangente es perpendicular al diámetro y el punto medio sería el centro de la circunferencia". Esto es coherente con lo que Schoenfeld (1985) define como dominio de conocimientos, ya que está realizando trazos con los conceptos geométricos que posee.

Otros alumnos que también realizaron trazos auxiliares construyeron una recta perpendicular (punteada) a la recta dada que pasara por el punto dado, como se muestra en la Figura 3. Esta recta fue utilizada para hallar el radio (segmento rojo). Además, realizaron otros trazos, como una recta paralela a la recta $x-y-4=0$ que pasara por el punto dado $(7,-5)$ y una circunferencia. Estas construcciones ayudaron a encontrar una solución (circunferencia azul), aunque el punto de tangencia en esta solución no es el pie de la perpendicular, como sí lo fue el caso anterior.

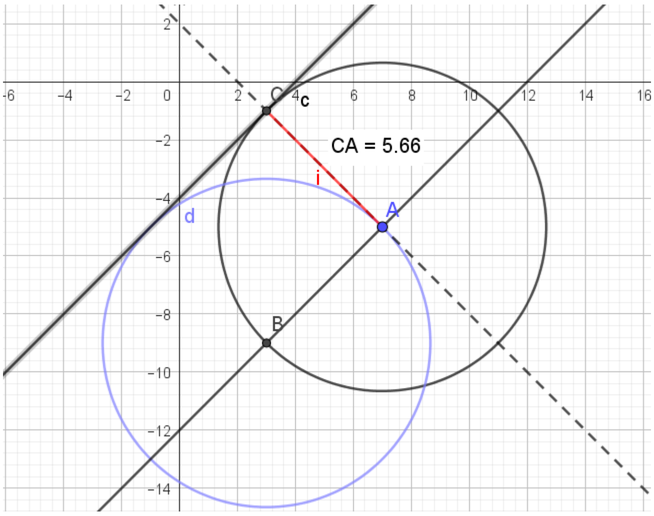

FIGURA 3. Construcción de trazos auxiliares: rectas, circunferencia y segmento.

4.2. Características de las soluciones generales. A continuación, se presentan dos resultados que se catalogaron como generales, obtenidos al explorar con el software de geometría dinámica GeoGebra. En el primero, se introducen varios trazos auxiliares como punto, recta y bisectriz, mientras que en el segundo se identificó que el centro de la circunferencia buscada pertenece a una parábola. En ambas soluciones se identifica el aporte del movimiento y una infinidad de soluciones.

4.2.1. El centro de la circunferencia pertenezca a una bisectriz. El hecho de que el centro de la circunferencia pertenezca a una bisectriz puede suscitar la pregunta inicial del lector y de nosotros mismos: ¿de qué bisectriz están hablando si en el enunciado del problema nunca se mencionó? Y tiene razón, puesto que no hay tal objeto geométrico en el enunciado, pero en la mente de los alumnos que lo exploraron sí. En términos de Santos-Trigo (2021), los alumnos activaron su esquema cognitivo y pudieron trazarlo y explorarlo en el software GeoGebra sin que representara demasiado tiempo y trabajo. El uso del software permitió la exploración de la idea de forma sencilla, ya que los métodos analíticos hubiesen requerido de procesos más elaborados.

Los alumnos Ángel y Miguel lo pensaron, optaron por hacerlo y lo explicaron con sus propias palabras de la siguiente manera:

> "Se traza una recta cualquiera que no sea paralela a la recta dada y que pase por el punto A, se traza la intersección entre las rectas y se traza la bisectriz del ángulo formado. Luego se traza una perpendicular de la segunda recta que pase por el punto A, se halla la intersección entre la bisectriz y la perpendicular, y ese es el centro."

Las palabras anteriores se ilustran en las Figuras 4 y 5. Es importante aclarar que la construcción con nombres fue realizada por los autores del artículo con el fin de mostrar gráficamente las palabras de los alumnos y hacerlas comprensibles para el lector. Además, es necesario aclarar que el punto B y la bisectriz que aparecen en la construcción fueron inventados por los alumnos. Ellos emplearon varios conceptos de la geometría euclidiana, como la idea de que el centro de una circunferencia tangente a dos rectas no paralelas pertenece a la bisectriz de uno de los ángulos formados por estas rectas.

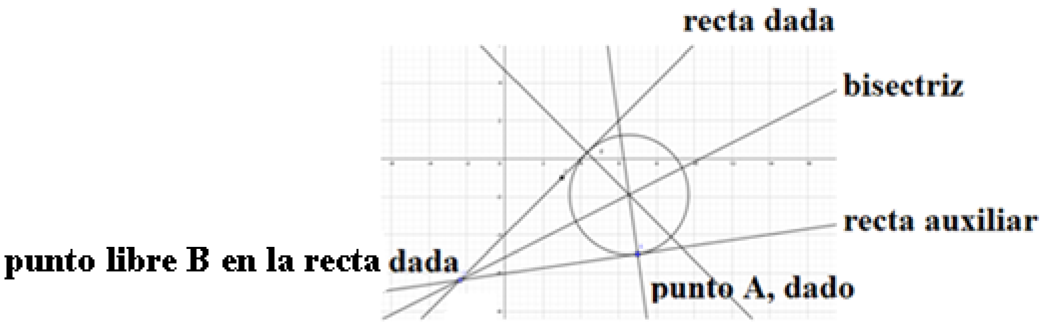

Figura 4. Solución general presentada por Miguel y Ángel donde el centro de la circunferencia pertenece a la bisectriz. Fuente: elaboración propia.

Con esta estrategia de trazos auxiliares, se puede observar la evolución de los significados (Mariotti, 2009) y el uso de recursos disponibles (dominio de conocimientos) como plantea Schoenfeld (1985). Por otro lado, el software GeoGebra proporciona una manera de visualizar múltiples soluciones mediante la activación del rastro. En este caso, el rastro lo deja la circunferencia cuando el punto libre B, construido sobre la recta $x - y - 4 = 0$, permanece en movimiento. Es importante aclarar que los elementos auxiliares construidos, como el punto B, la recta auxiliar y la bisectriz, fueron creación propia de los alumnos, y para ello no hubo participación ni sugerencia por parte del docente. La gama de soluciones que proporcionó esta estrategia es amplia, y parte de ellas se pueden apreciar en la Figura 5.

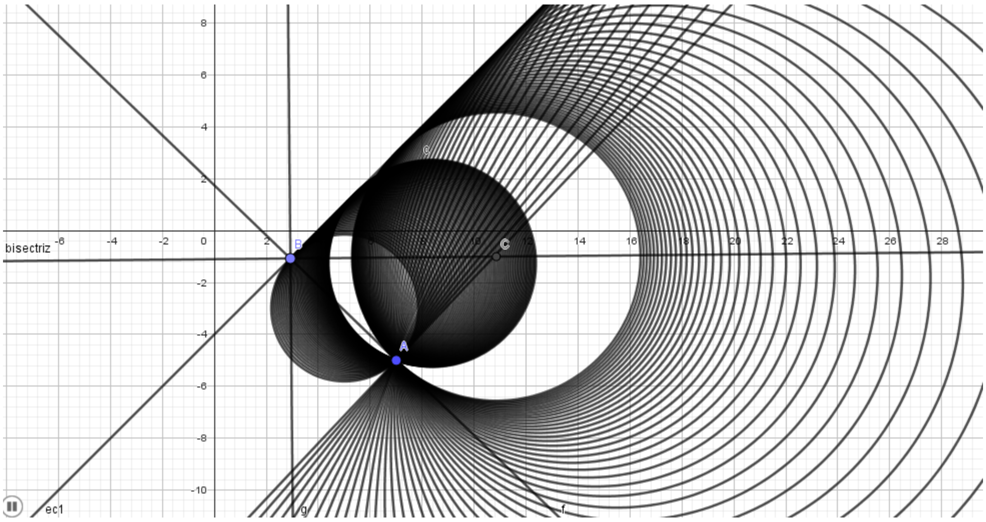

FIGURA 5. Familia de circunferencias tangentes a la recta y que pasan por el punto A, cuyo centro se encuentra en la bisectriz. Extendiendo la solución de Miguel y Ángel.

4.2.2. El centro de la circunferencia pertenece a una parábola. Hubo dos grupos de alumnos que coincidieron en considerar que el lugar geométrico de todos los centros de las circunferencias solución corresponde a una parábola. Miguel inició con la definición del lugar geométrico, mientras que César comenzó con el proceso analítico y lo dedujo después.

Al preguntarle al alumno Miguel sobre cómo obtuvo la idea de la parábola, menciona que recordó haber visto el tema de las secciones cónicas en el bachillerato y la definición de parábola, indicando que es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y una recta fija llamada directriz. Asoció los elementos dados en el enunciado del problema con los de la definición: la recta R es la directriz y el punto A corresponde al foco. Vale la pena destacar que en el curso de geometría analítica donde se aplicó el problema aún no se había visto la parábola, pero fue un elemento de los conocimientos previos del bachillerato que resultó útil para que el alumno presentara una solución general.

En la Figura 6 se muestra la parábola a la que se refiere Miguel. Aunque ya había realizado y solucionado el problema con GeoGebra (caso de la bisectriz), él decidió continuar explorando el problema por su cuenta en el software Desmos, que tenía instalado en su celular. Es evidente que esta parábola efectivamente corresponde a la solución general del problema, empleando una estrategia diferente y sus conocimientos previos.

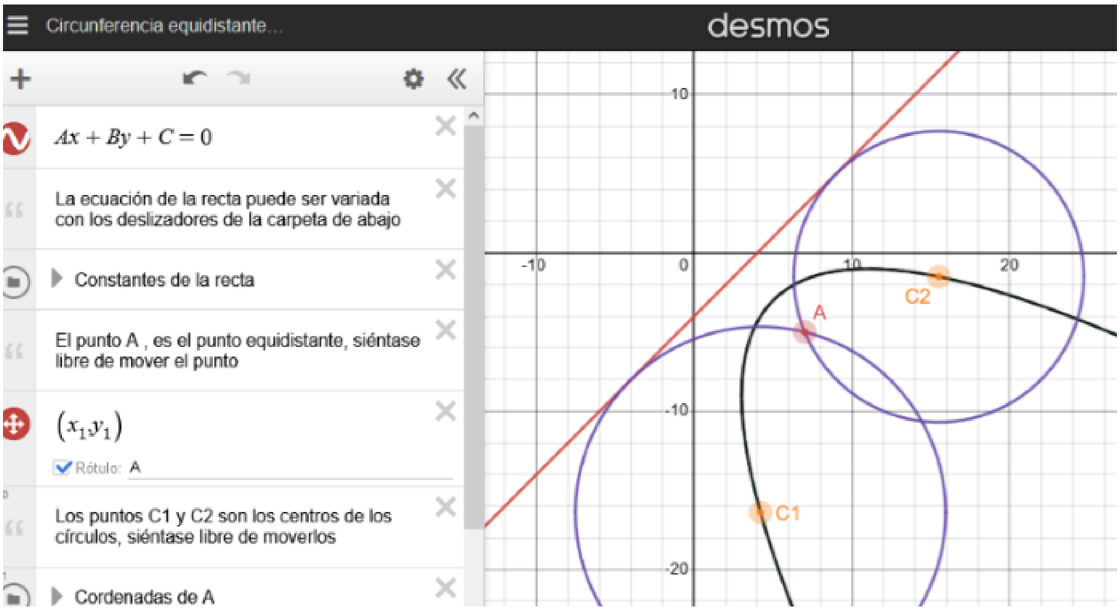

FIGURA 6. Solución general, elaborada por Miguel, que corresponde a una parábola y el uso del software Desmos.

También como solución general el alumno César presentó su respuesta de dos formas. Una de ellas fue elaborada con recursos analíticos, en la que consideró una igualdad de distancias: la primera es la distancia del punto $A = (7, -5)$ y la recta $x - y - 4 = 0$ usando la forma normal y la segunda corresponde a la distancia entre el punto A y un punto desconocido de coordenadas (x, y). A través de este proceso el alumno halla el lugar geométrico de todos los centros de las circunferencias. Estas distancias son iguales porque ambas corresponden al radio de la misma circunferencia. A continuación (Figura 7), se muestra una imagen del manuscrito del alumno y posteriormente su transcripción para la mejor comprensión del proceso seguido.

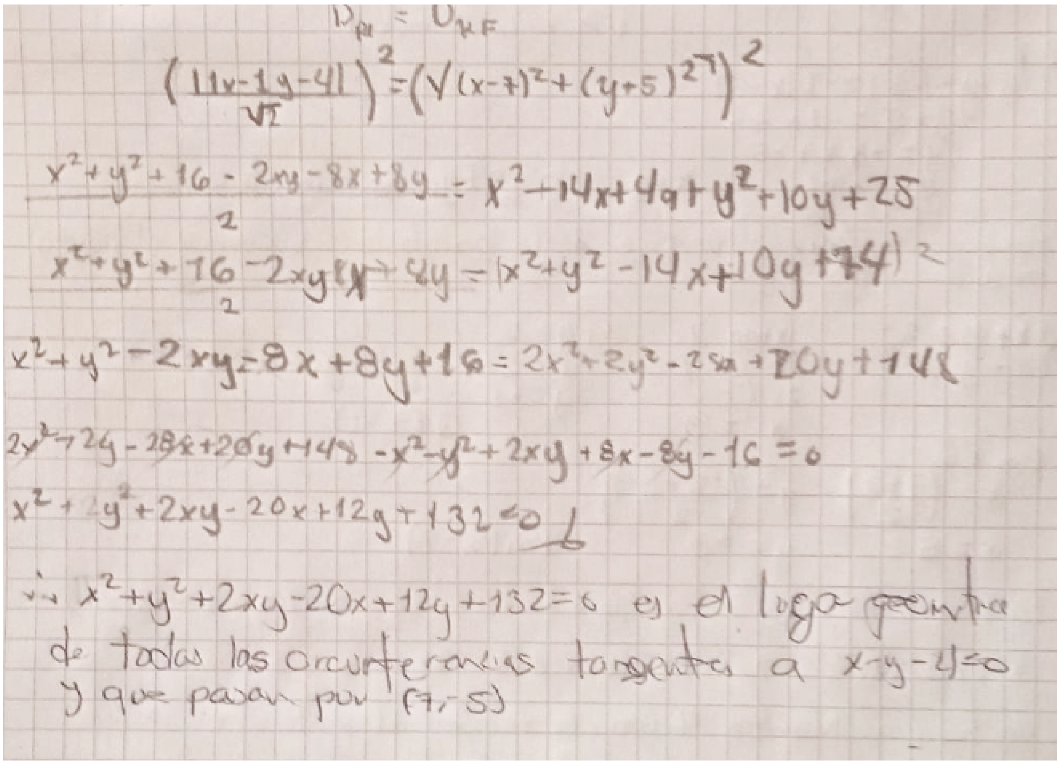

Figura 7. Solución analítica construida por César.

$$D_{R,F} = D_{A,F}$$

$$\left(\frac{|1x - 1y - 4|}{\sqrt{2}}\right)^2 = \sqrt{(x-7)^2 + (y+5)^2}^2$$

$$\frac{x^2 + y^2 + 16 - 2xy - 8x + 8y}{2} = x^2 - 14x + 49 + y^2 + 10y + 25$$

$$\frac{x^2 + y^2 + 16 - 2xy - 8x + 8y}{2} = x^2 + y^2 - 14x + 10y + 74$$

$$x^2 + y^2 + 16 - 2xy - 8x + 8y = 2x^2 + 2y^2 - 28x + 20y + 148$$

$$2x^2 + 2y^2 - 28x + 20y + 148 - x^2 - y^2 - 16 + 2xy + 8x - 8y = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2xy - 20x + 12y + 132 = 0$$

Por lo tanto $x^2 + y^2 + 2xy - 20x + 12y + 132 = 0$ es el lugar geométrico de todas las circunferencias tangentes a $x - y - 4 = 0$ y que pasan por $(7, -5)$.

También César usó el software GeoGebra para hallar la solución, ver Figura 8. Es notorio que, pese a realizar exploraciones con otros recursos encontró la misma solución que había planteado en párrafos anteriores. Esta solución analítica corresponde a una parábola rotada, en la cual se encuentran todos los centros de las circunferencias que se constituyen en una solución general al problema planteado. Es posible verificar este resultado calculando el discriminante $B^2 - 4AC$ de la ecuación cuadrática con dos variables:$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ que para este caso particular corresponde a 0 por lo que representa una parábola.

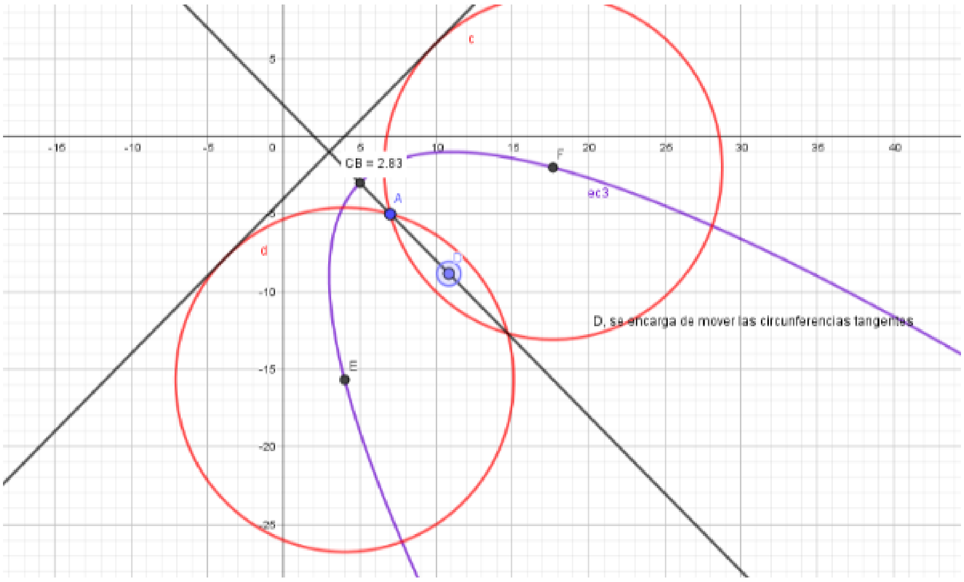

Figura 8. Solución con software GeoGebra construida por César.

4.2.3. *Visualización del lugar geométrico.* Al usar la herramienta de rastro de GeoGebra sobre el centro de la circunferencia, se genera la solución general que corresponde al lugar geométrico parábola, como se muestra en la Figura 9. Esta solución coincide con la respuesta que algunos alumnos habían encontrado de forma independiente a través de varias estrategias. Otra de las riquezas del uso de la tecnología es que "permite ver más y mejor", ya que este lugar geométrico muestra muchas soluciones posibles al problema, y sin errores de construcción, algo que hubiera sido imposible de visualizar exclusivamente con lápiz y papel.

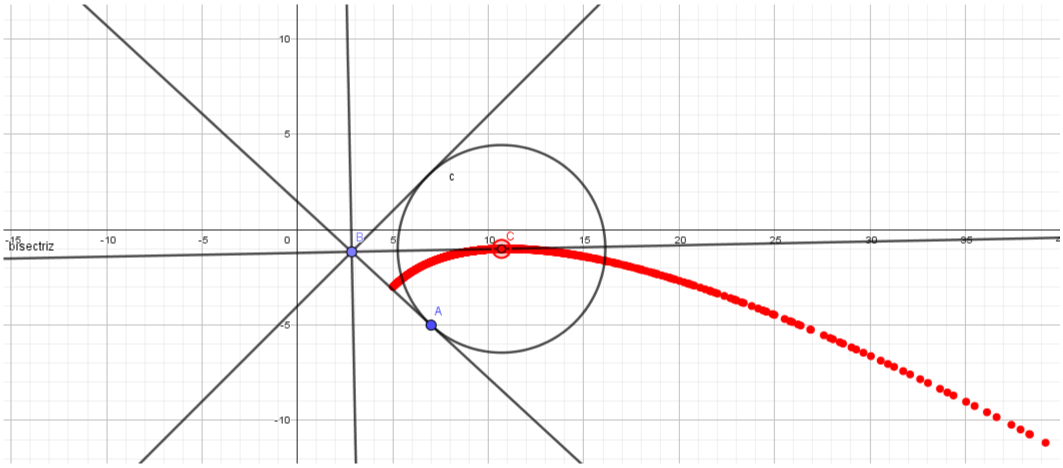

Figura 9. Parábola generada en GeoGebra, con los centros de las circunferencias tangentes a la recta R por el punto A. Fuente: elaboración propia

§5. Reflexiones finales y aportes para la enseñanza

Luego de haber atestiguado los procesos de solución, así como el desarrollo de los signos involucrados en el trabajo en el ambiente de geometría dinámica a través de los significados construidos por los estudiantes, haber revisado los trabajos de los alumnos, analizado las respuestas dadas durante las entrevistas, etc., nos permitimos enunciar cada una de las siguientes reflexiones para la enseñanza, que se encuentran sustentadas en la resolución de problemas, particularmente en planteamientos de Polya (1965) y Schoenfeld (1985), y su conjunción con el uso de tecnología sugerido por Santos-Trigo (2021), Santos-Trigo y Camacho (2018) y Mariotti (2009).

En el aula se debe propiciar la resolución de problemas porque, de acuerdo con Schoenfeld (1985), los alumnos movilizan los conocimientos y enriquecen el razonamiento matemático. Esto ocurre porque, usando el dominio de conocimientos y las herramientas del software, los estudiantes exploran más soluciones, buscan diferentes opciones y se ven motivados a ponerse retos e idear una diversidad de soluciones. Se hizo evidente que los alumnos estuvieron pensando, incluso cuando tuvieron a su disposición apuntes, libros, computadoras e internet.

La utilización de diferentes estrategias en la resolución de problemas (estrategias heurísticas y metacognitivas) resultó útil porque motivó a los alumnos a explorar, dudar, crear, inventar y mantenerse activos en el problema, incluso después de que el tiempo de clase había concluido. Este fue el caso de varios alumnos que comenzaron con la estrategia del ensayo y error, pero luego refinaron sus procesos y pudieron encontrar soluciones más consistentes.

El aporte del uso de la tecnología fue significativo, ya que permitió explorar de manera libre y rápida cada idea que surgiera y descartar otras, que quizás con lápiz y papel habría sido más dispendioso. También hubo alumnos que interactuaron de diversas formas con la tecnología e incluso les sirvió como medio para corroborar lo encontrado con lápiz y papel.

El rol de la profesora fue crucial, ya que además de rediseñar el problema, estuvo presente como mediadora, guiando a los alumnos para que descubrieran sus propias potencialidades. Mediante la formulación de preguntas clave durante el trabajo con el software de geometría dinámica o en las entrevistas realizadas posteriormente, tales como "¿tu construcción pasa la prueba del arrastre?". La profesora ayudó a los alumnos a desarrollar significados matemáticos más robustos, en línea con la Teoría de la Mediación Semiótica. El papel del docente como mediador es esencial en la resolución de problemas que involucran un artefacto como un software de geometría dinámica.

La resolución de problemas se destaca como un medio que enriquece y fortalece el aprendizaje de las matemáticas. Esto se hizo evidente cuando los alumnos mostraron diferentes enfoques para abordar el problema y una variedad de respuestas, algunas equivocadas, algunas generales y otras particulares, que les permitieron movilizar una mayor cantidad de estrategias, conocimientos y habilidades, apoyándose en las herramientas del software. Se hace notar además, que la formulación de problemas puede realizarse a partir de los materiales de los cuales dispone el profesor, siempre y cuando sean rediseñados con la intención de potencializar procesos como la generalización y la construcción de conjeturas, más allá de la utilización precisa de procedimientos bien establecidos.

Es notable cómo los alumnos no se limitaron a repetir teoremas y definiciones durante la resolución de problemas, sino que emplearon su tiempo en explorar dónde y cómo aplicarlos de manera significativa. Esto refleja un enfoque más profundo y reflexivo sobre los conceptos matemáticos, en lugar de simplemente seguir procedimientos mecánicos. Además, se destacaron ideas propias que mostraron ingenio, como la construcción de una recta auxiliar por parte de Miguel y Ángel.

El uso de recursos tecnológicos para explorar problemas permitió fomentar la creatividad, ya que brindó la posibilidad de pensar, ensayar ideas y descartarlas rápidamente cuando fuera necesario. Esto proporcionó un sentido de libertad que amplió las posibilidades de los alumnos, incluso cuando no tenían una comprensión completa de las formas analíticas. Estos aspectos resaltan varios de los planteamientos de Santos-Trigo (2016) sobre el uso de tecnologías digitales, al ofrecer oportunidades para analizar formas de construir y explorar representaciones para resolver problemas, así como para formular conjeturas y relaciones.

Bibliografía

Arteaga, B., Macías, J., y Pizarro, N. (2020). La representación en la resolución de problemas matemáticos: un análisis de estrategias metacognitivas de estudiantes de secundaria. *Uniciencia*, *34*(1), 263-280.

Defaz, G. (2017). El desarrollo de habilidades cognitivas mediante la resolución de problemas matemáticos. *Journal of Science and Research*, *2*(5), 14-17.

Echenique, I. (2006). *Matemáticas resolución de problemas.* Descargado de https://www.educacion.navarra.es/web/publicaciones/catalogo/-/asset_publisher/JONi5m8mCym2/content/matematicas-resolucion-de-problemas

Lehmann, C. (2009). *Geometría analítica*. México: Limusa.

Mariotti, M. (2009). Artifacts and signs after a vygotskian perspective: the role of the teacher. *ZDM Mathematics Education*, *41*, 427–440. doi: DOI10.1007/s11858-009-0199-z

Mariotti, M., y Maffia, A. (2018). From using artefacts to mathematical meanings: the teacher's role in the semiotic mediation process. *Didattica della matematica. Dalle ricerche alle pratiche d'aula*, *3*, 50 - 63. doi: 10.33683/ddm.18.4.3.1

Mason, J., Burton, L., y Stacey, K. (1989). *Pensar matemáticamente*. España: Labor.

National Council of Teachers of Mathematics NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

Polya, G. (1965). *¿Cómo resolver y plantear problemas?* México: Trillas.

Santos-Trigo, L. M. (2016). La resolución de Problemas Matemáticos y el uso coordinado de tecnologías digitales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *11*(15), 333-346. Descargado de OAI:https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/oai

Santos-Trigo, L. M. (2021). Resolución de problemas matemáticos artefactos y tecnologías digitales. *Revista avance y perspectiva*, *7,1*. Descargado de https://avanceyperspectiva.cinvestav.mx/

Santos-Trigo, L. M., y Camacho, M. (2018). La Resolución de Problemas Matemáticos y el Uso de Tecnología Digital en el Diseño de Libros Interactivos. *Educatio Siglo XXI*, *36*(3 Nov-Feb1), 21–40. Descargado de https://revistas.um.es/educatio/article/view/349451 doi: 10.6018/j/349451

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. EUA: Academic Press INC.

Noelia Londoño Millán
Universidad Autónoma de Coahuila
(✉) *noelialondono@uadec.edu.mx*

José David Zaldívar Rojas
Universidad Autónoma de Coahuila
(✉) *david.zaldivar@uadec.edu.mx*

Miguel Vertiz Álvarez
Universidad Autónoma de Coahuila
(✉) *mvertiz@uadec.edu.mx*

Recibido: *6 de mayo de 2023*.
Aceptado: *4 de junio de 2024*.
Publicado en línea: *19 de agosto de 2024*.
