Revista de Educación Matemática
Volumen 39, N° 2 (2024), páginas 5 – 17
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Artículo de Matemática

LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN CÚBICA

Marilina Carena - Ricardo Toledano

Resumen. Motivados por la pregunta de un alumno de primer año de universidad, determinamos cuándo la función cúbica $f(x) = x^3 + ax$, donde a es un número real, es biyectiva en su dominio. Para ello utilizamos algunos resultados básicos del cálculo y, con la ayuda de la resolvente de la ecuación cúbica $x^3 + mx = n$ hallada por Cardano a mediados del siglo XVI, encontramos una expresión explícita para la función inversa de f.

Abstract. Motivated by a question asked by an undergraduate student we determine when the cubic function $f(x) = x^3 + ax$, with a being a real number, is bijective in its domain. For this purpose we use some basic results from calculus and by using a formula for the solution of the cubic equation $x^3 + mx = n$ found by Cardano in the 16th century, we find an explicit expression for the inverse function of f.

Introducción

Este trabajo tiene su origen en la pregunta realizada por un estudiante de primer año de una carrera de ingeniería, quien se planteó cuál sería la inversa de una función obtenida al modificar levemente una de las propuestas. La función en cuestión era $f(x) = x^3 + x$. Antes había logrado encontrar una expresión para la inversa de funciones polinómicas de grado 1 y 2, y de funciones cúbicas del tipo $g(x) = ax^3 + b$, por lo que resultó completamente natural preguntarse por la inversa de la función mencionada. Solamente se dimensiona la dificultad en este planteo si se conoce la inmensa tarea llevada a cabo por Scipiano del Ferro, Tartaglia y Cardano durante el siglo XVI para arribar a la resolución de ecuaciones cúbicas.

El objetivo de este trabajo es, justamente, poder acercar este contenido en un lenguaje accesible para alumnos de los primeros años de carreras de grado que contienen matemática, mostrando las dificultades que se presentan.

Palabras clave: Función inversa, polinomio cúbico, raíces.
Keywords: Inverse function, cubic polynomial function, roots.

Recordemos que, dada una función $f\colon A \to B$, en ciertas ocasiones es posible hallar otra función $g\colon B \to A$ que satisfaga

$$g(f(x)) = x \qquad \text{y} \qquad f(g(y)) = y,$$

para todo $x \in A$ y todo $y \in B$. Si esto ocurre, g es llamada *inversa* de f, es denotada como f^{-1} y puede probarse que es única.

Es bien conocido que una condición necesaria y suficiente para garantizar la existencia de inversa de una función f, es que esta sea biyectiva. Además, las gráficas de las funciones f y f^{-1} resultan simétricas con respecto a la recta $y = x$.

Una vez probado que una función es biyectiva, una técnica clásica para hallar inversas utilizada en la escuela secundaria, o en los primeros años de carreras de grado, consiste en intercambiar los roles de x e y, y despejar luego y. Por ejemplo, para hallar la inversa de la función biyectiva $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 1$, intercambiamos los roles de x e y en la igualdad $y = 2x + 1$ para obtener

$$x = 2y + 1.$$

De esta igualdad despejamos $y = \frac{1}{2}(x - 1)$, y esta es la regla para la función f^{-1}.

Para la función cuadrática $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ ya debemos tener cuidado, porque será necesario restringir el dominio para que resulte inyectiva. Por ejemplo, consideremos a $[0, \infty)$ como dominio. Así, puesto que de $x = y^2$ se obtiene que $|y| = \sqrt{x}$, la función inversa f^{-1} está dada por

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

para $x \in [0, \infty)$. Si, en cambio, hubiéramos restringido el dominio al intervalo $(-\infty, 0]$, llegaríamos a

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$$

para $x \in [0, \infty)$. Por convención, se considera $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ y a $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ como su inversa.

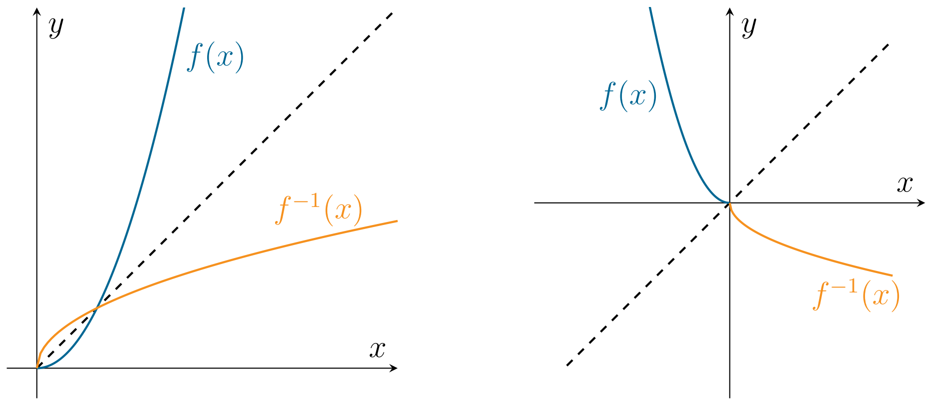

Figura 1. Inversa de $f(x) = x^2$, según la restricción de su dominio.

La función $f(x) = x^3$ no presenta esta complicación ya que resulta inyectiva en todo $\mathbb{R}$, y su inversa es $f^{-1} = \sqrt[3]{x}$.

Es sencillo también considerar funciones cuadráticas más complejas, como por ejemplo $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$. Con el fin de hallar su inversa, completamos cuadrados para obtener $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$, por lo que podremos restringir su dominio al intervalo $[1, \infty)$ para que resulte inyectiva, y así obtener su inversa definida como

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-3}{2}} + 1, \tag{1}$$

para todo $x \geq 3$ (notar que, justamente, $[3, +\infty)$ es la imagen de f).

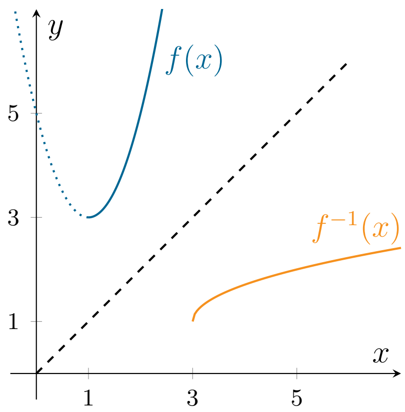

FIGURA 2. Inversa de $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$.

El hecho que la función $f\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$ resulta inyectiva, que puede conjeturarse desde el gráfico de la Figura 2, se demuestra analíticamente de forma sencilla: si suponemos $f(x_1) = f(x_2)$, entonces

$$2(x_1 - 1)^2 + 3 = 2(x_2 - 1)^2 + 3,$$

lo que equivale a $|x_1 - 1| = |x_2 - 1|$. Esto implica $x_1 = x_2$, siempre que $x_1, x_2 \geq 1$.

La situación ya no es tan sencilla si consideramos una función polinómica de grado 3, que no sea tan simple como $f(x) = x^3 + c$. ¿Será posible obtener una expresión como la dada en (1) para la inversa de una función cúbica cualquiera? Lo expresado en (1) puede hacerse de forma general mediante la conocida regla de la resolvente, que se obtiene completando cuadrados como se hizo en el ejemplo. ¿Hay una regla como la de la resolvente para ecuaciones polinomiales de grado 3?

Teniendo en cuenta el éxito obtenido en el caso cuadrático, resulta natural preguntarse si es posible hallar una expresión para la inversa de funciones polinomiales (en un intervalo donde estas resulten inyectivas) que involucre solamente a los coeficientes de los polinomios junto a las operaciones de suma, resta, producto, división y la extracción de raíces cuadradas, cúbicas, etc.

En este artículo veremos que ya para $n = 3$ esta no es una tarea sencilla. Más precisamente, abordaremos el caso particular de una función tan simple como la definida por $f(x) = x^3 + ax$, con $a \in \mathbb{R}$, y veremos cómo y cuándo podemos hallar una expresión para f^{-1} aplicando la resolvente de una cúbica de la forma $x^3 + mx = n$, con m y n enteros, descubierta inicialmente por el matemático italiano Scipione del Ferro en el año 1515 y redescubierta años más tarde por los matemáticos italianos Nicolo Fontana (más conocido como Tartaglia) y Girolamo Cardano. Esta resolvente involucra raíces cuadradas y cúbicas, junto con operaciones de suma, resta, multiplicación y división, que es uno de nuestros requisitos. Haremos un recorrido por el método hasta llegar a una expresión para la inversa f^{-1} y, luego, veremos las opciones para trabajar con funciones cúbicas completas.

Una función cúbica particular

Como mencionamos previamente, para $a \in \mathbb{R}$ vamos a considerar la función cúbica $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^3 + ax$, e investigar cuándo esta función es biyectiva para, luego, hallar una expresión explícita de su inversa $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ utilizando el método desarrollado por Tartaglia y Cardano en el siglo XVI para hallar la resolvente de la ecuación $x^3 + mx = n$.

Notemos primero que si $a < 0$ entonces f no es inyectiva en $\mathbb{R}$: en este caso podemos escribir $a = -b$ con $b > 0$, y así factorizar a f como producto de polinomios lineales con coeficientes reales

$$f(x) = x(x^2 + a) = x(x^2 - b) = x(x - \sqrt{b})(x + \sqrt{b}).$$

Esta factorización nos dice, en este caso, hay tres números reales distintos que tienen la misma imagen por f, esto es

$$0 = f(0) = f(\sqrt{b}) = f(-\sqrt{b})$$

y, en consecuencia, f no es inyectiva cuando $a < 0$. Veamos ahora que f es inyectiva en $\mathbb{R}$ cuando $a \geq 0$. Para ver esto, utilizaremos algunos resultados básicos del cálculo diferencial de funciones reales de una variable. Antes que nada, recordemos que una función f es *estrictamente creciente* en un intervalo I si para cada par de elementos $x_1 < x_2$ de I se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$. Una función estrictamente creciente en un intervalo I es necesariamente inyectiva en I pues, si no lo fuese, habría dos elementos distintos x_1 y x_2 en I tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Pero al ser elementos distintos ocurre que o bien $x_1 < x_2$ o bien $x_2 < x_1$, con lo cual o bien $f(x_1) < f(x_2)$ o bien $f(x_2) < f(x_1)$, contradiciendo que $f(x_1) = f(x_2)$.

Veamos que $f(x) = x^3 + ax$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ cuando $a \geq 0$. Para ello fijemos dos números reales cualesquiera $x_1 < x_2$. Por un lado es claro que $ax_1 \leq ax_2$. Además, recordemos que $u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$, y que este último factor es positivo para todo u y v que no sean ambos nulos, puesto que

$$0 \leq (u+v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv,$$

lo que implica

$$u^2 + v^2 > \tfrac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right) \geq -uv.$$

Entonces

$$x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2\right) < 0,$$

de lo que se concluye que $x_1^3 < x_2^3$. Así

$$f(x_1) = x_1^3 + ax_1 < x_2^3 + ax_2 = f(x_2).$$

De esta manera queda demostrado que $f(x) = x^3 + ax$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ cuando $a \geq 0$ y es, por lo tanto, inyectiva en $\mathbb{R}$.

Para el lector familiarizado con los resultados básicos del cálculo diferencial, el crecimiento de f en $\mathbb{R}$ también puede deducirse a partir del signo positivo de la derivada de f en $\mathbb{R} - \{0\}$, más el hecho que $f(x) < 0$ para $x < 0$, $f(0) = 0$ y $f(x) > 0$ cuando $x > 0$.

Recordando que $f(x) = x^3 + ax$ no es inyectiva cuando $a < 0$, vemos que hemos demostrado en realidad que $f(x) = x^3 + ax$ es inyectiva en $\mathbb{R}$ si y solo si $a \geq 0$.

Resta verificar que $f(x) = x^3 + ax$ es sobreyectiva como función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. La sobreyectivad de f se cumple para todo $a \in \mathbb{R}$, pero es más sencilla la argumentación cuando $a \geq 0$, que es el caso que nos interesa pues ya vimos que f no es inyectiva cuando $a < 0$. Por lo tanto supondremos que $a \geq 0$ y, con esta condición, tenemos que demostrar que para cada $c \in \mathbb{R}$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$, es decir que para cada $c \in \mathbb{R}$ la ecuación

$$x^3 + ax = c. \tag{2}$$

tiene solución en $\mathbb{R}$.

A partir de los gráficos de nuestra función cúbica f con valores concretos del parámetro $a \geq 0$, se puede conjeturar que, efectivamente, la ecuación (2) siempre tiene solución para cada $c \in \mathbb{R}$ ya que esto significa, geométricamente, que la gráficas de f y la de la recta horizontal $y = c$ tienen un punto en común. Esto parece que siempre va a ocurrir debido a que $f(x) = x^3 + ax$ es estrictamente creciente cuando $a \geq 0$, como se observa en el gráfico contenido en la Figura 3.

Pero que una función sea estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$ no significa que su gráfica tenga un punto en común con cualquier recta horizontal. Por ejemplo la función $f(x) = \arctan(x)$ (la inversa de $y = \tan(x)$ en $(-\pi/2, \pi/2)$) es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$ pero su gráfica nunca se cruza con las rectas horizontales de ecuación $y = c$, con c fuera de $(-\pi/2, \pi/2)$ (ver Figura 4).

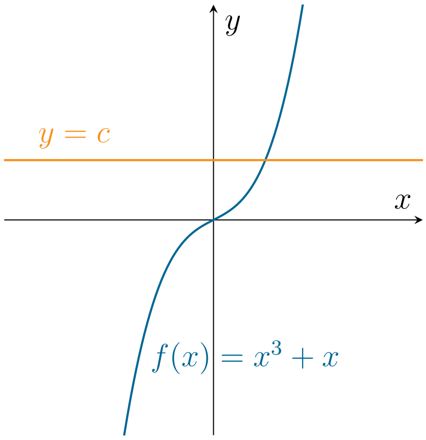

FIGURA 3

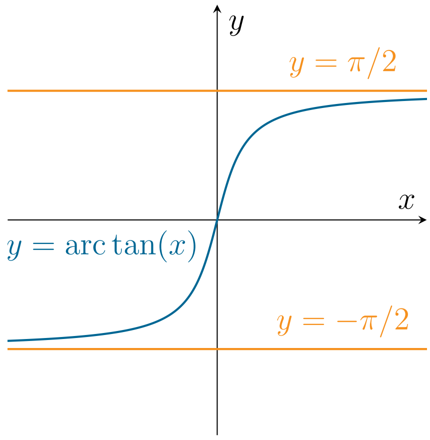

FIGURA 4

Nuestra tarea es, por lo tanto, hallar una manera rigurosa de probar que la ecuación (2) tiene solución para todo $c \in \mathbb{R}$ más allá de la "evidencia" aportada por las gráficas. Notemos que resolver (2) para un valor dado $y \in \mathbb{R}$ equivale a demostrar que la función

$$F(x) = x^3 + ax - c$$

tiene una raíz real para cada número real c fijo, pues vemos inmediatamente que tener $F(x_0) = 0$ equivale a que x_0 es una solución de (2). Con este punto de vista podemos usar las herramientas del Cálculo para funciones reales de una variable. Más precisamente, usaremos el teorema de Bolzano el cual establece que si $g(x)$ es una función continua en un intervalo $[a, b]$ tal que $g(a)$ y $g(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $g(x_0) = 0$ (ver, por ejemplo, el Teorema 1 del Capítulo 7 de (Spivak, 1998)). Antes de utilizar el teorema de Bolzano vemos que si $a = 0$ o $c = 0$ es sencillo verificar que (2) tiene solución: si $a = 0$ entonces $x = \sqrt[3]{y}$ es solución de (2) mientras que si $c = 0$ entonces $x = 0$ es solución de (2). Podemos suponer entonces que $a > 0$ y que $c \neq 0$. Evaluando $F(x)$ en $x = c/a$ y en $x = -c/a$ vemos que

$$F\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{c^3}{a^3} \qquad \text{y} \qquad F\left(-\frac{c}{a}\right) = -\frac{c^3}{a^3} - 2c = -\left(\frac{c^3}{a^3} + 2c\right).$$

Así, cuando $c > 0$ tenemos que $F(c/a) > 0$ y $F(-c/a) < 0$, mientras que si $c < 0$ tenemos que $F(c/a) < 0$ y $F(-c/a) > 0$. Por ser F continua en todo $\mathbb{R}$ vemos que, en particular, $F(x)$ es continua en el intervalo $[-c/a, c/a]$ si $c > 0$ o en el intervalo $[c/a, -c/a]$ si $c < 0$. Todo esto nos dice que estamos en las condiciones del teorema de Bolzano, con lo cual podemos asegurar que existe $x_0 \in [-c/a, c/a]$ si $c > 0$ o $x_0 \in [c/a, -c/a]$ si $c < 0$ tal que $F(x_0) = 0$. Como ya vimos antes, esto equivale a decir que x_0 es solución de (2). Hemos demostrado de esta manera que si $a \geq 0$ la función $f(x) = x^3 + ax$ es biyectiva como función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Esto asegura la existencia de la función inversa de f en este caso pero, ahora, nos interesa saber si podemos hallar una expresión concreta para $f^{-1}(x)$. Tal como vimos en la Introducción, esto se puede conseguir "despejando" x de la ecuación $x^3 + ax = y$ en función de y. Este es el objetivo de la siguiente sección, y se abordará en base al estudio de la resolvente de la ecuación $x^3 + mx = n$ para m y n enteros, realizado por Scipiano del Ferro, Tartaglia y Cardano en el siglo XVI. Para esta parte nos basaremos fundamentalmente en lo expuesto en el Capítulo 2 del excelente libro (Tignol, 2016), trabajo que también contiene una gran cantidad de referencias históricas que hemos incluido en este texto.

Ecuaciones cúbicas particulares

Antes del siglo XV se consideraba imposible resolver ciertas ecuaciones polinómicas de grado 3. Pero en el año 1545, Cardano publicó un método algebraico que permitía resolver analíticamente cualquier ecuación cúbica. La clave de este método estuvo en haber sabido hallar previamente una solución para ecuaciones cúbicas del tipo

$$x^3 + mx = n, \tag{3}$$

donde m y n son enteros. La solución algebraica de esta ecuación fue obtenida por primera vez alrededor del año 1515 por Scipione del Ferro, profesor de matemáticas en Bolonia quien, por alguna razón, decidió no hacer público su resultado. Comentó la solución solo a algunos de sus alumnos antes de su muerte en 1526. Pero en 1535, el matemático e ingeniero Niccolo Fontana (apodado "Tartaglia" por su tartamudez) encontró un método para resolver (3). Esto llegó a oídos de Gerolamo Cardano, matemático, astrónomo, biólogo, físico, químico, filósofo y escritor italiano nacido en Pavía en 1501, quien le pidió a Tartaglia que le diera su solución para poder incluirla en un tratado sobre aritmética. Tartaglia se negó inicialmente a darle su solución ya que tenía planeado escribir él mismo un libro sobre este tema. Tiempo después Tartaglia cambió de opinión, y entregó a Cardano algunas ideas del procedimiento para hallar una solución de (3) en forma de versos en un poema (¡idea muy original!).

Cardano no solo logró justificar la validez de las fórmulas de Tartaglia sino que, además, pudo encontrar un método para resolver cualquier ecuación cúbica. Publicó estos resultados en su famoso tratado de matemática "Ars Magna" en 1545, dando el debido crédito a Tartaglia y a Scipiano del Ferro, pero esto no pudo evitar el inicio de una enemistad eterna con Tartaglia, ya que este último aseguraba que Cardano le había prometido no publicar su solución (aunque Cardano afirmaba que jamás había hecho tal promesa).

El método para resolver (3) establece que es suficiente con encontrar valores t y u tales que

$$t - u = n \qquad \text{y} \qquad tu = \left(\frac{m}{3}\right)^3. \tag{4}$$

Luego,

$$\boxed{x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u}}$$

es una solución real de la ecuación (2). En efecto, usando que $m = 3\sqrt[3]{tu}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u}\right)^3 + m\left(\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u}\right) &= t - u - 3t^{\frac{2}{3}}u^{\frac{1}{3}} + 3t^{\frac{1}{3}}u^{\frac{2}{3}} + mt^{\frac{1}{3}} - mu^{\frac{1}{3}} \\ &= t - u - 3t^{\frac{2}{3}}u^{\frac{1}{3}} + 3t^{\frac{1}{3}}u^{\frac{2}{3}} + 3t^{\frac{2}{3}}u^{\frac{1}{3}} - 3t^{\frac{1}{3}}u^{\frac{2}{3}} \\ &= t - u = n,\end{aligned}$$

como queríamos ver.

Entonces el problema se transforma en encontrar, si es que existen, valores de t y u satisfaciendo (4). Esto conduce a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} X - Y &= a \\ XY &= b. \end{cases}$$

Para resolverlo podemos despejar la variable Y en la primera ecuación, y luego reemplazar en la segunda para obtener que X debe satisfacer

$$X^2 - aX - b = 0.$$

Así, Cardano consigue reducir el caso cúbico al cuadrático, cuyas soluciones están dadas por

$$X = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

De aquí se obtiene $Y = X - a$.

Volviendo entonces al sistema (4), podemos hallar los valores de t y u como

$$\boxed{t = \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3} + \frac{n}{2},} \qquad \boxed{u = \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3} - \frac{n}{2}.}$$

Notar que t y u serán números reales siempre que

$$\Delta = n^2 + \frac{4m^3}{27} \geq 0.$$

Llamaremos a Δ el **discriminante** de la ecuación (3).

Es importante mencionar que no toda solución de $x^3 + mx = n$ se obtiene con esta fórmula de Cardano. El problema es sencillo de visibilizar cuando $m < 0$ ya que, como vimos en la sección anterior, la función $f(x) = x^3 + ax$ no es inyectiva cuando $a < 0$. Por lo tanto, para $m < 0$ es posible que la recta horizontal $y = n$ cruce a la gráfica de $f(x) = x^3 + mx$ en más de un punto, con lo cual la ecuación $x^3 + mx = n$ puede tener más de una solución real. Este es el caso de la ecuación $x^3 + 16 = 12x$ considerada por Cardano para ilustrar su método. Aquí estamos ante la función $f(x) = x^3 - 12x$, que no es inyectiva. La recta $y = -16$ cruza a la gráfica de $f(x) = x^3 - 12x$ en los puntos $(-4, -16)$ y $(2, -16)$, como puede observarse en la imagen siguiente.

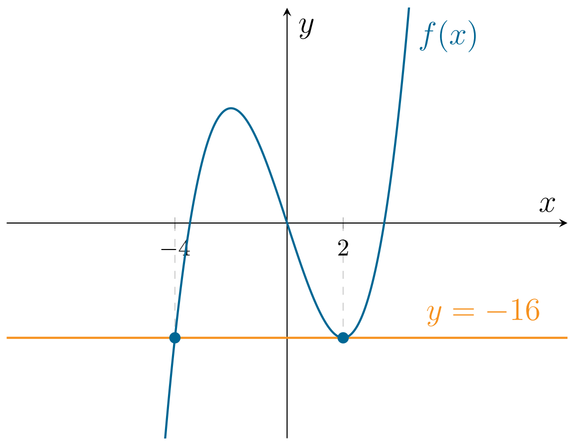

Figura 5. Gráfico de $f(x) = x^3 - 12x$ y de $y = -16$.

Entonces $x = -4$ y $x = 2$ son dos soluciones de $x^3 + 16 = 12x$. Este ejemplo fue construido por Cardano sabiendo que $x = 2$ es solución pero, al aplicar su fórmula, obtuvo la solución $x = -4$, ya que

$$t = \sqrt{\left(\frac{-16}{2}\right)^2 + \left(\frac{-12}{3}\right)^3} - \frac{16}{2} = \sqrt{64 - 64} - 8 = -8,$$

$$u = \sqrt{\left(\frac{-16}{2}\right)^2 + \left(\frac{-12}{3}\right)^3} + \frac{16}{2} = \sqrt{64 - 64} + 8 = 8,$$

de donde deduce que

$$x = \sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{8} = -2 - 2 = -4$$

es la solución de $x^3 + 16 = 12x$ hallada con el método de Cardano. Esta situación seguramente disparó en Cardano la siguiente (muy interesante) pregunta: ¿cuántas soluciones tiene una ecuación cúbica? Esto lo condujo a investigar sobre el número de soluciones de una ecuación cúbica llegando a la conclusión de que podían llegar a tener tres soluciones como máximo. Es interesante notar que a las soluciones negativas, como $x = -4$ en el caso de la ecuación $x^3 + 16 = 12x$, Cardano las denominaba soluciones “falsas” o “ficticias”. Todavía estaban muy lejos de sus consideraciones las soluciones complejas que podían aparecer con sus fórmulas cuando el discriminante Δ es negativo. Estas eran consideradas por el mismo Cardano como expresiones “absurdas” que solamente servían para mostrar que sus fórmulas no siempre conducían a la solución esperada. Debido a esto sus fórmulas para resolver ecuaciones cúbicas tardaron mucho tiempo en ser completamente aceptadas. En este sentido vale la pena recordar que recién a mediados del siglo XVIII las expresiones algebraicas que involucraban raíces cuadradas de números negativos comenzaron a ser tratadas y manipuladas naturalmente como números, llegándose a demostrar que estos nuevos objetos tienen estructura de cuerpo, formando lo que hoy en día conocemos como el *cuerpo de los números complejos*. Más aún, a mediados del siglo XVIII ya estaba completamente aceptado en la comunidad matemática que los números reales no son más que números complejos particulares.

Por suerte todas estas cuestiones no representan ningún problema para el principal objetivo de esta sección, que es "despejar" x de la ecuación

$$x^3 + ax = y,$$

cuando $a \geq 0$. Ya sabemos que en este caso la función $f(x) = x^3 + ax$ es biyectiva como función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ así que ya sabemos que x se puede expresar en función de y. Esto nos garantiza la existencia de tal función pero no nos da ninguna pista de cómo es. La respuesta a esta interesante pregunta la tiene la fórmula de Cardano, la cual nos dará una expresión concreta para esta función. Más precisamente, tomando

$$t = \sqrt{\frac{y^2}{4} + \frac{a^3}{27}} + \frac{y}{2}, \qquad u = \sqrt{\frac{y^2}{4} + \frac{a^3}{27}} - \frac{y}{2},$$

se tiene que

$$x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{y^2}{4} + \frac{a^3}{27}} + \frac{y}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{y^2}{4} + \frac{a^3}{27}} - \frac{y}{2}}.$$

es la única solución real de $x^3 + ax = y$.

Vemos así que al aplicar el método de Cardano hallamos una expresión para la función inversa de $f(x) = x^3 + ax$ para $a \geq 0$, y está dada por

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{a^3}{27}} + \frac{x}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{a^3}{27}} - \frac{x}{2}}.$$

Como puede observarse, la expresión para la inversa de una función tan sencilla como $f(x) = x^3 + ax$ no es para nada trivial. En la Figura 6 se ilustra el caso $a = 1$.

Ecuaciones cúbicas generales

Aunque no profundizaremos demasiado en los detalles del método de Cardano para obtener todas las soluciones de

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

donde $a \neq 0$, presentaremos la idea general del mismo.

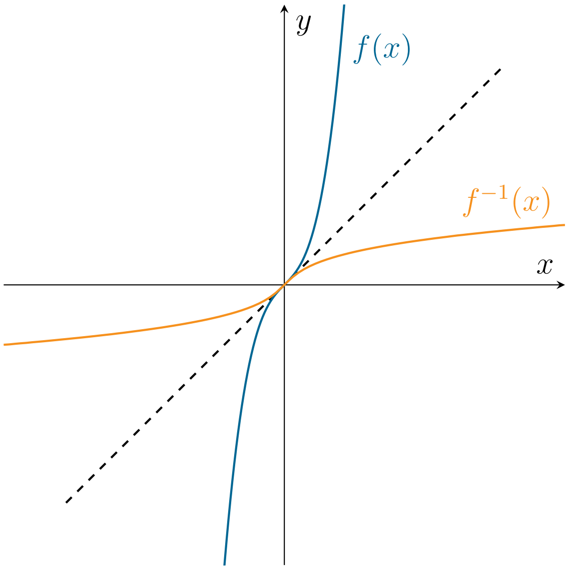

FIGURA 6. Gráfico de $f(x) = x^3 + x$ y de su inversa.

El primer paso es reescribir la ecuación en **forma normal,** dividiendo ambos miembros por a:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0. \tag{5}$$

Ahora se lleva esta ecuación a lo que se conoce como **forma reducida,** que se obtiene haciendo la sustitución $x = z - \frac{b}{3a}$:

$$z^3 + pz + q = 0, \tag{6}$$

donde

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}, \qquad q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}.$$

Para comprobarlo basta con reemplazar $z = x + \frac{b}{3a}$ en (6) y operar para obtener (5).

La ecuación (6) es del tipo de las estudiadas en la sección anterior, con $m = p$ y $n = q$, por lo que podemos aplicar el método de Cardano. El discriminante para esta ecuación es $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$. Dependiendo si el discriminante es positivo, negativo o igual a cero, se obtendrán las diferentes soluciones:

- Caso $\Delta > 0$: la ecuación posee una solución real y dos complejas. La solución real z se obtiene como se trabajó en la sección anterior, y también pueden darse expresiones que determinan las dos soluciones complejas conjugadas (que no incluiremos aquí).
- Caso $\Delta = 0$:
  - si $p = q = 0$, la ecuación posee una única solución real (triple) $z = 0$;
  - en caso contrario, puede probarse que la ecuación posee entonces dos soluciones reales, una simple $z_1 = \frac{3p}{q}$ y una doble $z_2 = \frac{-3q}{2p}$.

- Caso $\Delta < 0$: puede demostrarse que la ecuación tiene tres soluciones reales distintas, las que pueden determinarse explícitamente gracias a la fórmula de De Moivre (pero no incluiremos dichas soluciones en este trabajo).

Luego, a partir de los valores de z obtenidos como solución de (6), se obtienen las soluciones para (5) mediante la sustitución $x = z - \frac{b}{3a}$.

Otras ecuaciones

Todo lo expuesto anteriormente deja en evidencia la gran diferencia de dificultad que se presenta entre la resolución de ecuaciones cuadráticas y las cúbicas.

Adaptando las técnicas de Cardano, su alumno Ferrari logró obtener una fórmula para determinar raíces de polinomios de grado 4, reduciendo el problema a encontrar raíces de un polinomio de grado 3.

En terminología actual, lo que estos matemáticos italianos lograron demostrar fue que las ecuaciones de grado 3 y 4 son *resolubles por radicales*, es decir que sus raíces se pueden calcular con fórmulas que involucran solamente a sus coeficientes junto con las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y extracciones de raíces cuadradas, cúbicas, etc. Por mucho tiempo se intentó demostrar que las ecuaciones de grado 5 o superior también son resolubles por radicales, hasta que a principios del siglo XIX el matemático italiano Paolo Ruffini, y posteriormente el matemático noruego Niels H. Abel, establecieron finalmente que esto no es posible para ecuaciones polinómicas *generales* de grado mayor o igual que 5 (ver, por ejemplo, el Capítulo 13 de (Tignol, 2016)). Es importante recalcar que lo demostrado por Ruffini y Abel no implica que no se puedan encontrar ecuaciones particulares de grado 5 o superior que sean resolubles por radicales.

Si se flexibiliza el requisito de ser resolubles por radicales y se permiten otras funciones, entonces hay una resolvente para la ecuación de grado 5. Más precisamente el matemático francés Charles Hermite demuestra en 1858 que hay una resolvente para la ecuación general de grado 5 si al conjunto de la funciones admitidas en la resolución por radicales se le agregan las denominadas *funciones elípticas*, que son funciones muy especiales que aparecen en el cálculo de ciertas integrales. Todo esto y mucho más está magistralmente expuesto en el libro (Klein, 1913).

Bibliografía

Klein, F. (1913). *Lectures on the icosahedron and the solution of equations of the fifth degree*. Kegan Paul. London.

Spivak, M. (1998). *Calculus. Cálculo infinitesimal*. Ed. Reverté.

Tignol, J.-P. (2016). *Galois' theory of algebraic equations* (Second ed.). World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ.

Marilina Carena
CONICET - Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (UNL)
(✉) *marilcarena@gmail.com*
Ricardo Toledano
Departamento de Matemática. Facultad de Ingeniería Química (UNL)
(✉) *ridatole@gmail.com*

Recibido: *2 de junio de 2024*.
Aceptado: *5 de agosto de 2024*.
Publicado en línea: *19 de agosto de 2024*.