Revista de Educación Matemática
Volumen 39, N° 3 (2024), páginas 81 – 93
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Artículos de Matemática

LA DERIVADA DE FUNCIONES DEFINIDAS POR TRAMOS

Marilina Carena

Resumen. El principal objetivo de este trabajo es brindar herramientas que permitan determinar si una función definida por tramos es derivable o no en los puntos de corte, sin tener que recurrir a la definición de derivada lateral. A su vez, trabajamos en la identificación y uso correcto de condiciones necesarias y suficientes para obtener conclusiones en estos casos.

Abstract. The aim of this paper is to provide tools that allow determining whether a piecewise-defined function is differentiable at the break points, without using the definition of the lateral derivative. Also, we work on the identification and correct use of necessary and sufficient conditions to draw conclusions in these cases.

§1. Introducción

El concepto de derivada de una función es de suma importancia en cualquier carrera de ingeniería o relacionada con ciencias exactas o naturales, debido a sus numerosas y diversas aplicaciones. Por eso, resulta fundamental comprender su definición, su interpretación geométrica y las técnicas para calcularla. Estas últimas facilitan mucho la tarea, ya que establecen reglas que permiten determinar la derivada en puntos interiores del dominio de funciones clásicas, como las polinómicas, potencias, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, entre otras. Esto se combina con las reglas de derivación para la suma, la resta, el producto, el cociente y la composición de funciones diferenciables, para calcular la derivada de una gran cantidad de funciones sin necesidad de recurrir a la definición.

Sin embargo deben tenerse en cuenta ciertas condiciones. Por ejemplo, supongamos que f es una función racional, esto es, $f(x) = P(x)/Q(x)$, siendo P y Q polinomios. Las reglas mencionadas permiten obtener la derivada de f en todo valor x de su dominio, es decir, siempre que $Q(x) \neq 0$. Supongamos que x_0 es una

Palabras clave: funciones definidas por tramos, derivada.
Keywords: piecewise-defined function, derivative.

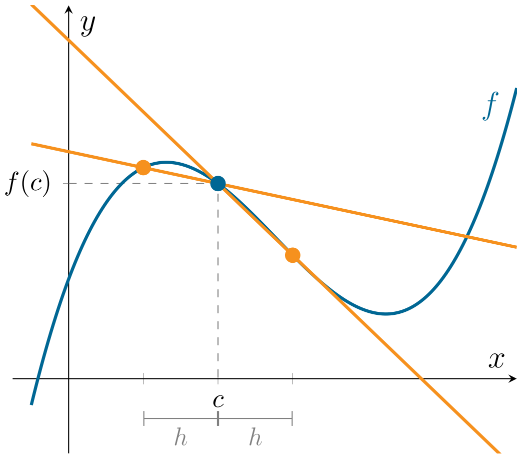
raíz de Q tal que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe. Entonces f puede extenderse de forma continua a una nueva función cuyo dominio contenga a x_0. Pero la regla del cociente no permite calcular $f'(x_0)$, ya que $Q(x_0) = 0$. Recurrir a la definición para determinar la existencia de la derivada siempre es una opción. Sin embargo, resulta útil contar con algunas herramientas que permitan obtener conclusiones para estas funciones a partir de la aplicación de las reglas conocidas en un entorno de x_0.

Antes de dar ejemplos que ilustren y aclaren todo esto, recordemos los conceptos involucrados.

Sea f una función definida en un intervalo (a, b) y sea $c \in (a, b)$. Para definir la derivada de f en $x = c$ nos situamos en el punto $(c, f(c))$ del gráfico de f y consideramos otro punto $(c + h, f(c + h))$ perteneciente a él, que estará a la izquierda o a la derecha del primero, según el signo de h. La pendiente de la recta que une estos dos puntos es

$$m = \frac{f(c+h) - f(c)}{c+h-c} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h},$$

cantidad que también se conoce como *cociente incremental*.



Nos preguntamos cómo varía m cuando el punto $(c + h, f(c + h))$ se acerca a $(c, f(c))$, lo que equivale a analizar el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Cuando este límite existe decimos que f es *derivable* o *diferenciable* en $x = c$, y denotamos su valor como $f'(c)$. Además, se define *la recta tangente* a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$ como la recta con pendiente $f'(c)$ que pasa por dicho punto.

De la definición de límite sabemos que la existencia de $f'(c)$ equivale a que los siguientes límites existan y sean iguales:

$$f'(c^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}, \qquad f'(c^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

El primero de ellos se conoce como *derivada lateral por derecha*, y el segundo recibe el nombre de *derivada lateral por izquierda.*

Uno de los primeros resultados importantes que aprendemos luego de conocer el concepto de derivada es que toda función derivable en $x = c$ es continua allí. Esto es, ser continua en un punto es condición necesaria para ser derivable en él, aunque no suficiente. Un ejemplo típico sobre esto es la función valor absoluto de x, que presenta una "punta" en $x = 0$ originada por la diferencia de pendientes con las que llegan las dos rectas ahí. Esta función puede verse como un ejemplo de lo que se conoce como *función definida por tramos.*

En el caso de las funciones que están definidas por tramos de funciones diferenciables, podemos aplicar las reglas para derivar en el interior del dominio de cada tramo. El desafío está en saber si estas funciones se "pegan" bien en los puntos de corte, determinando si la función es o no derivable allí. Por supuesto que si esta resulta discontinua allí, no será derivable. Pero si es continua, todo dependerá de cómo llegan las gráficas de las funciones desde cada lado.

El objetivo de este trabajo es estudiar condiciones necesarias y suficientes que nos permitan obtener conclusiones acerca de la derivabilidad en los puntos de corte de una función definida por tramos, a partir del análisis de los límites laterales de las derivadas correspondientes, así como la relación entre estos valores y las derivadas laterales. También se estudiará el caso en que estos límites son infinitos, y su relación con las cúspides y tangentes verticales.

§2. Funciones definidas por tramos

Consideremos las funciones

$$g(x) = |x+1|, \qquad p(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & \text{si } x < -1; \\ 2x, & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$$

Observar que

$$g(x) = \begin{cases} -x - 1, & \text{si } x < -1; \\ x + 1, & \text{si } x \geq -1, \end{cases}$$

por lo que tanto g como p son de la forma

$$f(x) = \begin{cases} \ell(x), & \text{si } x < c; \\ r(x), & \text{si } x \geq c, \end{cases}$$

donde ℓ y r son funciones diferenciables en $(-\infty, c)$ y (c, ∞), respectivamente. Esto es,

$$f'(x) = \begin{cases} \ell'(x), & \text{si } x < c; \\ r'(x), & \text{si } x > c. \end{cases}$$

El desafío es, entonces, determinar si f es o no es derivable en $x = c$.

El siguiente criterio es uno de los más usados para comenzar a dar respuesta a esto, y su prueba puede encontrarse en la siguiente sección, al igual que las del resto de los resultados.

Criterio de derivabilidad

Sea f una función continua en (a, b) y diferenciable en (a, c) y en (c, b), para algún $a < c < b$. Si $\lim\limits_{x \to c} f'(x)$ existe, entonces f es derivable en c y

$$f'(c) = \lim_{x \to c} f'(x).$$

Notar que, con la notación previa, la existencia de $\lim_{x \to c} f'(x)$ es equivalente a

$$\lim_{x \to c^-} \ell'(x) = \lim_{x \to c^+} r'(x). \tag{1}$$

Intentemos aplicar este criterio para ver si las funciones g y p dadas al inicio de la sección, ambas continuas en todo número real, resultan diferenciables en $x = -1$. Puesto que en el interior de cada tramo, esto es, tanto en $(-\infty, -1)$ como en $(-1, \infty)$, nos encontramos con polinomios, podemos aplicar las reglas de derivación para obtener que:

$$g'(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < -1; \\ 1, & \text{si } x > -1, \end{cases} \qquad p'(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{si } x < -1; \\ 2, & \text{si } x > -1. \end{cases}$$

Entonces

$$\lim_{x \to -1^-} g'(x) = -1 \qquad \text{pero} \qquad \lim_{x \to -1^+} g'(x) = 1;$$

mientras que para p tenemos que

$$\lim_{x \to -1^-} p'(x) = 3 \qquad \text{pero} \qquad \lim_{x \to -1^+} p'(x) = 2.$$

En este punto resulta importante detenernos y no obtener ninguna conclusión a partir de lo anterior, ya que el criterio de derivabilidad enuncia condiciones suficientes, pero no necesarias.

Si falla la hipótesis en cualquier implicación verdadera, no podemos concluir de ello que la conclusión no se cumple. Simplemente no podremos aplicar este resultado, y deberemos emplear otro método.

Para el caso particular del criterio de derivabilidad, si lo que falla es la continuidad de f en $x = c$, entonces podemos concluir que f no es derivable allí, no por dicho criterio sino porque ser continua es una condición **necesaria** para ser derivable. **Pero si lo que falla es solo (1), entonces no podemos concluir de ello que f no será derivable en $x = c$,** ya que esta igualdad (junto con la continuidad) es una condición **suficiente**, pero no necesaria. En efecto, para ver que no es necesaria, analicemos el siguiente ejemplo clásico.

Ejemplo 1 (La condición (1) no es necesaria)**.** *Consideremos la función*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{si } x \leq 0; \\ x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \textit{si } x > 0. \end{cases}$$

Dejamos como ejercicio para el lector demostrar que f es una función continua en $x = 0$, y ver que

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & \textit{si } x < 0; \\ 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \textit{si } x > 0. \end{cases}$$

Entonces, es claro que

$$\lim_{x \to 0^-} \ell'(x) = 0 \qquad \textit{pero} \qquad \lim_{x \to 0^+} r'(x) \ \textit{no existe.}$$

Sin embargo, la función f sí es derivable en $x = 0$, pues las derivadas laterales existen y coinciden:

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) = 0,$$

y

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} 0 = 0,$$

por lo que $f'(0) = 0$.

El ejemplo anterior prueba que no deben confundirse los límites laterales

$$L = \lim_{x \to c^-} \ell'(x) \qquad \text{y} \qquad R = \lim_{x \to c^+} r'(x)$$

con las derivadas laterales por izquierda y derecha en c, respectivamente.

En dicho ejemplo tenemos que R no existe, pero la derivada lateral por derecha $f'(0^+)$ sí. También puede ocurrir que R y L existan, pero alguna de las derivadas laterales no. Esto puede verse en el siguiente ejemplo que, además, prueba que la condición (1) sola no es suficiente para garantizar la derivabilidad de f en $x = c$. Basta con tomar f conformada por dos rectas con igual pendiente que no se "peguen" bien en un punto, haciendo f discontinua allí y, por lo tanto, no derivable.

Ejemplo 2 (La condición (1) no es suficiente)**.** *Considerar la función*

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \textit{si } x < 0; \\ x + 1, & \textit{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Entonces

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \textit{si } x < 0; \\ 1, & \textit{si } x > 0. \end{cases}$$

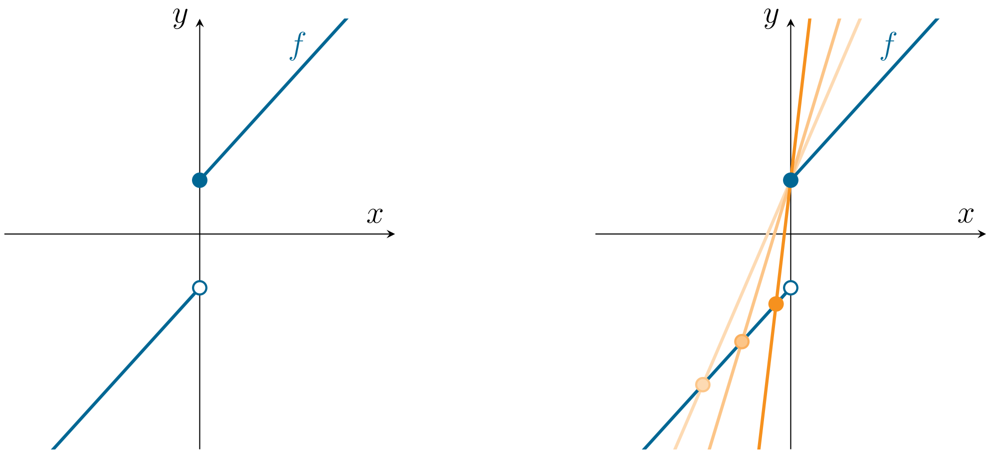
Aunque $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1$*, es claro que* f *no es derivable en* $x = 0$ *porque es discontinua allí. Esto puede concluirse también calculando las derivadas laterales:*

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h+1-1}{h} = 1,$$

pero

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h-1-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h-2}{h} = \infty.$$

Puede resultar interesante "visualizar" geométricamente este resultado infinito, recordando que la derivada lateral izquierda $f'(0^-)$ *representa la pendiente de la recta a la que tienden las pendientes de las rectas secantes a la gráfica de* f *cuando nos acercamos a* $x = 0$ *por izquierda:*



Como puede verse en el gráfico de la derecha, las rectas secantes son cada vez más verticales a medida que nos acercamos a $x = 0$ *por izquierda, por lo que el límite de sus pendientes es infinito (esto es,* $f'(0^-)$ *no existe, aunque* $L = 1$*). En cambio, si hacemos este proceso por el lado derecho, las rectas secantes son siempre la recta* $y = x + 1$*, lo que se condice con el valor obtenido para* $f'(0^+)$*.*

El Ejemplo 1 muestra que la existencia del límite $\lim_{x\to c} f'(x)$ no es necesaria para que f sea derivable en $x = c$. Sin embargo, como mencionamos en la introducción, este tipo de funciones tan caóticas no suelen ser las más frecuentes en las aplicaciones. Por el contrario, se parecen más a las funciones g y p presentadas al inicio de esta sección en el siguiente sentido: son funciones para las que los límites laterales de la derivada, L y R, existen.

Nos preguntamos si disponemos de un criterio que nos dé condiciones suficientes para concluir que una función definida por tramos de este tipo **no** es diferenciable en el punto de corte. Por supuesto, no lo será cuando sea discontinua allí, pero no es el caso de nuestras funciones g y p. Para ellas, la respuesta está en el siguiente resultado.

Criterio de no derivabilidad

Sea f una función definida en (a, b) que es diferenciable tanto en (a, c) como en (c, b), para algún $a < c < b$. Si $L = \lim_{x \to c^-} f'(x)$ y $R = \lim_{x \to c^+} f'(x)$ **existen pero son distintos,** entonces f no es derivable en c.

Notar que la función presentada en el Ejemplo 1 no satisface las hipótesis de este último criterio, por lo que no podría aplicarse ni concluirse nada de él. Tampoco aplica para la función del Ejemplo 2. En cambio, las funciones g y p del inicio sí lo cumplen, y ahora podemos concluir que ninguna de ellas es diferenciable en $x = -1$, sin necesidad de calcular las derivadas laterales.

Sin embargo, aunque ya no debamos hacerlo, en el siguiente ejemplo vamos a calcular estas derivadas laterales con el fin de compararlas con los límites laterales R y L de las correspondientes derivadas de los tramos.

Ejemplo 3 (Cálculo de la derivadas laterales por definición)**.** *Hallemos las derivadas laterales de las funciones*

$$g(x) = \begin{cases} -x - 1, & \text{si } x < -1; \\ x + 1, & \text{si } x \geq -1, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad p(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & \text{si } x < -1; \\ 2x, & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$$

Comencemos calculando por definición las derivadas laterales de g en $x = -1$.

$$g'(-1^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{g(-1 + h) - g(-1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-1 + h + 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1,$$

mientras que

$$g'(-1^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{g(-1 + h) - g(-1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1 - h - 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Entonces el límite bilateral que define a $g'(-1)$ no existe, por lo que g no es derivable allí.

Ahora trabajaremos con la función p. La derivada lateral derecha es

$$p'(-1^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{p(-1 + h) - p(-1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2(-1 + h) + 2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2h}{h} = 2.$$

Para la derivada lateral izquierda tenemos que

$$p'(-1^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{p(-1 + h) - p(-1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(-1 + h)^3 - 1 + 2}{h}.$$

Desarrollando el cubo del binomio obtenemos

$$p'(-1^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^3 - 3h^2 + 3h}{h} = \lim_{h \to 0^-} h^2 - 3h + 3 = 3.$$

Esto prueba que p no es derivable en $x = -1$.

A diferencia de lo que ocurrió en los Ejemplos 1 y 2, para las funciones g y p podemos observar que las derivadas laterales son iguales a los límites laterales de sus correspondientes derivadas. Esto no es coincidencia, sino consecuencia de la existencia de las cantidades involucradas (recordemos que un límite infinito es una de las formas de no existencia del límite). Esto se incluye en el siguiente resultado.

Valor de las derivadas laterales

Sea f una función definida en (a,b) y sea $a < c < b$.

- Si f es diferenciable en (a,c) y tanto $L = \lim\limits_{x\to c^-} f'(x)$ como $f'(c^-)$ existen, entonces $f'(c^-) = L$.
- Si f es diferenciable en (c,b) y tanto $R = \lim\limits_{x\to c^+} f'(x)$ como $f'(c^+)$ existen, entonces $f'(c^+) = R$.

§3. Cúspides y tangentes verticales

Dada una función *continua* en $x = c$, hay tres tipos de no derivabilidad que dan a dicho punto un nombre o característica particular: **pico o punto anguloso; punto de cúspide o punto con tangente vertical.**

Cada uno de estos conceptos se define a partir del comportamiento de las derivadas laterales, $f'(c^-)$ y $f'(c^+)$:

- **Punto anguloso:** $x = c$ es un punto anguloso si las derivadas laterales son ambas finitas pero distintas.
- **Cúspide:** en $x = c$ hay una cúspide cuando las derivadas laterales son infinitas pero distintas (esto es, con distinto signo).
- **Tangente vertical:** la gráfica de la función tiene una tangente vertical $x = c$ si las derivadas laterales son ambas infinitas con igual signo.

Sin embargo, en (Salas, Hille, y Etgen, 2006) puede verse una definición diferente para los dos últimos casos, haciendo uso de las cantidades L y R que definimos previamente:

$$L = \lim_{x\to c^-} f'(x) \qquad \text{y} \qquad R = \lim_{x\to c^+} f'(x).$$

Por supuesto, además de la continuidad en $x = c$, estamos suponiendo que f es derivable en (a,c) y (c,b), esto es, en algún entorno *reducido* $E = (a,b) - \{c\}$ de c .

Con esta notación, en (Salas y cols., 2006) se dice que f presenta una cúspide en $x = c$ si

$$L = \infty \qquad \text{y} \qquad R = -\infty,$$

o si

$$L = -\infty \qquad \text{y} \qquad R = \infty.$$

Análogamente, se dice que f tiene una tangente vertical $x = c$ si

$$L = R = \infty \qquad \text{o} \qquad L = R = -\infty.$$

¿Serán estas definiciones equivalentes a las primeras?

En la sección anterior vimos que si L y R son finitos y las derivadas laterales en $x = c$ existen, entonces $L = f'(c^-)$ y $R = f'(c^+)$. Esto nos dice que un punto anguloso podría definirse como aquel tal que L y R son finitos pero distintos. Entonces resulta natural preguntarnos si podremos hacer lo mismo con las cúspides y tangentes verticales, tal como se hace en (Salas y cols., 2006).

El objetivo de esta sección es responder esta pregunta, para lo que comenzamos presentando un criterio que nos permite determinar si una derivada lateral es infinita a partir del estudio del comportamiento de la derivada en un entorno lateral del punto.

Condiciones suficientes para derivadas laterales infinitas

Sea f una función definida en (a, b), continua en $x = c$ y derivable en (a, c) y (c, b). Se tiene que:

- si $R = \infty$, entonces $f'(c^+) = \infty$;
- si $R = -\infty$, entonces $f'(c^+) = -\infty$;
- si $L = \infty$, entonces $f'(c^-) = \infty$;
- si $L = -\infty$, entonces $f'(c^-) = -\infty$.

En pocas palabras, lo anterior dice que para determinar si el valor de una derivada lateral es infinito (positivo o negativo), es suficiente con analizar el correspondiente límite lateral de la derivada.

Esto nos permite concluir, hasta ahora, que las definiciones dadas en (Salas y cols., 2006) son más fuertes que las clásicas. El siguiente ejemplo prueba que los recíprocos del criterio anterior no siempre valen, por lo que las mismas resultan suficientes pero no necesarias para determinar derivadas laterales infinitas.

Ejemplo 4. *Consideremos:*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} + x\cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Queda como ejercicio para el lector ver que f es continua en $x = 0$. Además,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h} + h\cos\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} + \cos\left(\frac{1}{h}\right)\right] = +\infty,$$

ya que $\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} \to \infty$ cuando $h \to 0$ y $\cos\left(\frac{1}{h}\right)$ oscila pero se mantiene acotado. Esto prueba que $f'(0) = \infty$, lo que implica $f'(0^+) = \infty$. Sin embargo, para todo $x \neq 0$, por las reglas de derivación tenemos que:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Puede verse que $R = \lim_{x\to 0^+} f'(x) \neq \infty$ *tomando sucesiones*

$$a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \qquad y \qquad b_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n},$$

con $n \in \mathbb{N}$. *Aquí* $f'(a_n) \to \infty$ *mientras que* $f'(b_n) \to -\infty$, *por lo que* R *no es infinito. Tomando* n *entero negativo puede verse que lo mismo ocurre para* L.

Hemos probado que $f'(c) = \infty$ *no implica* $R = \infty$ *o* $L = \infty$.

Se concluye que la definición dada en (Salas y cols., 2006) para cúspides y tangentes verticales no es la adecuada, porque deja fuera funciones como la del ejemplo previo, que tienen una tangente vertical. Sin embargo, resulta útil estudiar los valores de L y R, ya que permite detectar puntos de no derivabilidad y clasificarlos en cúspides o tangentes verticales, solo mediante el análisis de la derivada en un entorno reducido del punto, como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5. *Probaremos que* $f(x) = x^{1/3}$ *tiene una tangente vertical en* $x = 0$, *mientras que* $g(x) = x^{2/3}$ *tiene una cúspide allí, a través del análisis de* R *y* L *en cada caso. Para ello notemos que, para* $x \neq 0$, *tenemos*

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}} \qquad y \qquad g'(x) = \frac{2}{3x^{1/3}}.$$

Entonces

$$R_f = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \infty \qquad y \qquad L_f = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \infty,$$

por lo que f *tiene una tangente vertical en* $x = 0$. *Para el caso de* g *tenemos*

$$R_g = \lim_{x\to 0^+} g'(x) = \infty \qquad y \qquad L_g = \lim_{x\to 0^-} g'(x) = -\infty,$$

por lo que g *presenta una cúspide en* $x = 0$.

§4. Prueba de los resultados

Demostración del criterio de derivabilidad. Fijemos $a < c < b$ y sea $M = \lim_{x\to c} f'(x)$. Queremos ver que $f'(c) = M$. Recordemos que

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Sea $h \neq 0$ suficientemente chico, tal que $c + h \in (a, b)$. Entonces f es continua en $[c, c+h]$ y diferenciable en $(c, c+h)$ si $h > 0$, o respectivamente en $[c+h, c]$ y $(c+h, c)$ si $h < 0$. Por el teorema del valor medio existe x_h entre c y $c+h$ tal que

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(x_h).$$

Cuando h tiende a cero, $c + h$ tiende a c, por lo que x_h tiende a c. Esto es, $x_h \to c$ cuando $h \to 0$. Así, tal como queríamos ver, tenemos que

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h\to 0} f'(x_h) = \lim_{x_h\to c} f'(x_h) = M. \qquad \square$$

Antes de probar el criterio de no derivabilidad, demostremos el resultado sobre el valor de las derivadas laterales.

Demostración del valor de las derivadas laterales. Haremos la prueba para la aproximación por el lado derecho, ya que la otra es análoga. Fijemos $a < c < b$, y supongamos entonces que existen los límites:

$$R = \lim_{x \to c^+} f'(x) \qquad \text{y} \qquad f'(c^+) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Fijemos $x \in (c, b)$. Por ser f derivable en (c, b), se deduce que es continua en $(c, x]$ y derivable en (c, x). Además, el hecho de existir $f'(c^+)$ implica que f es continua por derecha en $x = c$ ya que, para cada $h > 0$ pequeño, se tiene que

$$f(c+h) - f(c) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot h,$$

por lo que

$$\lim_{h \to 0^+} [f(c+h) - f(c)] = f'(c^+) \cdot 0 = 0.$$

Así, podemos asegurar que f es continua en $[c, x]$ y derivable en (c, x). Por el teorema del valor medio, existe $r_x \in (c, x)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(r_x).$$

Además, $r_x \to c^+$ cuando $x \to c^+$. Así,

$$f'(c^+) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^+} f'(r_x) = \lim_{r_x \to c^+} f'(r_x) = R,$$

como queríamos ver. □

Demostración del criterio de no derivabilidad. Sean

$$L = \lim_{x \to c^-} f'(x) \qquad \text{y} \qquad R = \lim_{x \to c^+} f'(x).$$

Sabemos que ambos existen y son distintos. Supongamos que f es derivable en $x = c$. Esto es, las derivadas laterales en $x = c$ existen y coinciden:

$$f'(c^+) = f'(c^-).$$

Por el resultado demostrado previamente, tenemos que

$$R = f'(c^+) = f'(c^-) = L,$$

lo que contradice la hipótesis. Así, $f'(c)$ no puede existir. □

Demostración del criterio sobre condiciones suficientes para derivadas laterales infinitas. Probaremos solo el primer inciso, ya que los restantes son análogos. Supongamos entonces que $R = \infty$, esto es, $\lim_{x \to c^+} f'(x) = \infty$. Queremos ver que también

$f'(c^+) = \infty$, es decir,

$$\lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \infty. \tag{2}$$

Para ello fijemos $M > 0$. Sea $\delta > 0$ tal que si $c < \eta < c+\delta \le b$ entonces $f'(\eta) > M$, cuya existencia está garantizada porque $R = \infty$.

Como f es continua en $[c, c+\delta]$ y derivable en $(c, c+\delta)$, sabemos que para cada $c < x < c+\delta$ existe η_x en (c, x) tal que

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(\eta_x).$$

Así, si $c < x < c+\delta$, entonces

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > M,$$

lo que prueba (2). □

§5. Conclusiones

Dada una función definida por tramos

$$f(x) = \begin{cases} \ell(x), & \text{si } x < c; \\ r(x), & \text{si } x \ge c, \end{cases}$$

donde ℓ y r son funciones diferenciables en $(-\infty, c)$ y (c, ∞), respectivamente, nos planteamos poder determinar si $f'(c)$ existe o no. Si f es discontinua en $x = c$, podemos concluir que no es derivable allí, por lo que el caso interesante es cuando sí es continua. Los resultados presentados permiten caracterizar cuándo una función así es derivable en $x = c$. Más precisamente, podemos resumir lo obtenido en el siguiente resultado.

Criterio para funciones continuas

Sea f una función continua en (a, b) y diferenciable en (a, c) y en (c, b), para algún $a < c < b$. Supongamos que $L = \lim_{x\to c^-} f'(x)$ y $R = \lim_{x\to c^+} f'(x)$ existen. Entonces f es diferenciable en c si y solo si $L = R$. En caso de darse la igualdad, $f'(c) = L = R$.

En el Ejemplo 1 vimos la importancia de la existencia de L y R. Además, tanto allí como en el Ejemplo 2, observamos que no siempre se cumple que $L = f'(c^-)$ y $R = f'(c^+)$, pero probamos que sí valen estas igualdades cuando todas las cantidades involucradas existen.

Así, si una función es continua en $x = c$, el estudio de los límites laterales de las derivadas, L y R, nos permite obtener conclusiones sobre la derivabilidad o el tipo de no derivabilidad de la función:

- L y R finitos e iguales: derivable;
- L y R finitos y distintos: punto anguloso;
- L y R ambos infinitos con igual signo: tangente vertical;
- L y R ambos infinitos con distinto signo: cúspide.

Los Ejemplos 1 y 4 prueban que no se puede concluir nada acerca de las derivadas laterales cuando L o R no existen por oscilación.

Bibliografía

Salas, S., Hille, E., y Etgen, G. (2006). *Calculus. Una y varias variables* (Vol. 1). Ed. Reverté.

Marilina Carena
CONICET - Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (UNL)
(✉) *marilcarena@gmail.com*

Recibido: *21 de junio de 2024*.
Aceptado: *12 de diciembre de 2024*.
Publicado en línea: *20 de diciembre de 2024*.