Curiosidades del 2024

Todos los números tienen alguna curiosidad...

por Ricardo Podestá

La mayoría de las propiedades enunciadas en el artículo pueden ser verificadas fácilmente.

• 2024 es un número combinatorio, en efecto

$$2024 = \binom{24}{3} = \tfrac{24 \cdot 23 \cdot 22}{3 \cdot 2} = 2^3 \cdot 11 \cdot 23.$$

La última expresión es su factorización en primos, y de allí vemos que

$$2024 = 44 \cdot 46 = 45^2 - 1$$

es una diferencia de cuadrados.

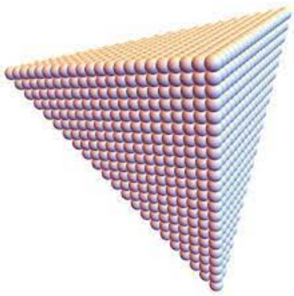
• 2024 puede escribirse de la siguiente forma autorreferencial

$$2024 = (20 + 24) + (20 + 24) + (20 + 24)^2.$$

• 2024 es un número tetraedral, el T_{22}, ya que es la suma de los primeros 22 números triangulares $t_1, \ldots, t_{22}$:

$$2024 = T_{22} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \cdots + t_{22} = 1 + 3 + 6 + 10 + \cdots + 253.$$

Recordamos que $t_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ y $T_n = \sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) = \binom{n+2}{3}$.

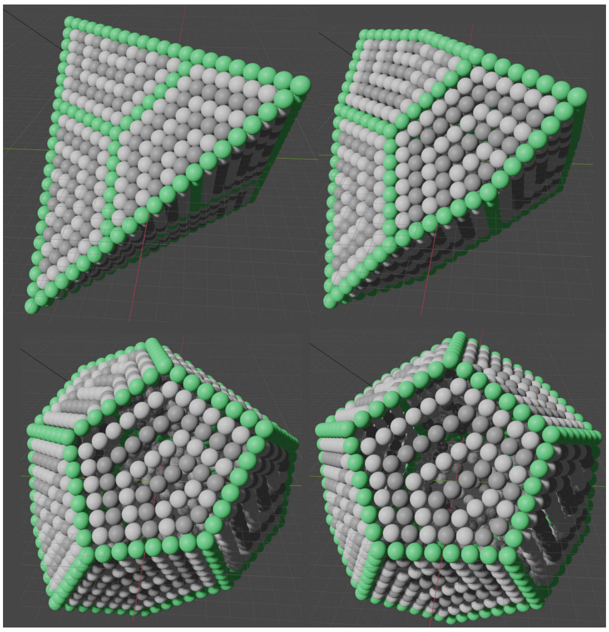


Es decir, podemos apilar 2024 naranjas ¡formando un tetraedro!

Más aún, 2024 es el octavo número dodecaedral D_8 pues

$$D_n = \tfrac{1}{2}n(3n-1)(3n-2) = \binom{3n}{3}.$$

En realidad, todo número tetraedral de la forma T_{3n+1} es un número dodecaedral D_{n+1}. Gráficamente, una transición de la equivalencia para el 2024 entre T_{22} y D_8 se puede ver en la siguiente figura



• 2024 es el undécimo número que se puede escribir como suma de 11 números consecutivos pero no con menos, en efecto

$$2024 = 179 + 180 + 181 + \cdots + 189.$$

Basta ver que la ecuación

$$\sum_{i=1}^{k}(n+i) = 2024$$

tiene solución $n = 179$ para $k = 11$, pero no tiene solución para ningún $k < 11$.

• 2024 es suma de cubos, por ejemplo $2024 = 11^3 + 7^3 + 6^3 + 5^3 + 2^3 + 1^3$; pero más notablemente se lo puede escribir como suma de cubos consecutivos,

$$2024 = 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3.$$

• Si φ denota la función de Euler; es decir $\varphi(n)$ es la cantidad de números coprimos con n entre 1 y n, se cumple que

$$\varphi(2024) = \varphi(2024 + \varphi(2024)).$$

Propiedades aritméticas

Tipos de números

Veamos que 2024 es un número...

- *educado*: ya que se puede escribir como suma de números consecutivos de más de una forma; por ejemplo,

  $$2024 = 77 + 78 + \cdots + 98 + 99$$

  (hay dos formas más y una ya fue mencionada mas arriba, ¿te animás a encontrar la que falta?).

- *de Harshad*: pues la suma de sus dígitos $2+0+2+4=8$ divide a $2024=8\cdot 253$.
- *pernicioso:* porque su representación binaria
$$2024=(11111101000)_2$$
contiene un número primo (7) de unos.
- *plaindromo en bases* 9 *y* 15*:* pues sus dígitos son no-decrecientes en esas bases, en efecto $2024=(2688)_9$ y $2024=(8ee)_{15}$ con $8<e$ (donde $e=14$).
- *exponente apocalíptico:* pues 2^{2024} es un número apocalíptico. Es decir, sus dígitos contienen a 666 como una subcadena. El número apocalíptico más chico es
$$2^{157}=182687704\mathbf{666}362864775460604089535377456991567872.$$
- *aritmético:* pues la media de sus divisores positivos es un número entero. En efecto, sus divisores son
$$\{1,2,4,8,11,22,23,44,46,88,92,184,253,506,1012,2024\},$$
su suma es $\sigma(2024)=4320$ y su media es $\frac{\sigma(2024)}{16}=270$.
- *intocable:* pues no es igual a la suma de divisores propios de ningún número, es decir $2024\neq\sigma(n)-n$ para todo $n\in\mathbb{N}$, donde $\sigma(n)=\sum_{d|n}d$.
- *práctico:* porque cada número menor que 2024 es suma de distintos divisores de 2024. Por ejemplo, $18=11+4+2+1$, $456=253+184+11+8$ y $1111=506+253+184+92+46+23+4+2+1$.
- *de Zumkeller:* pues su conjunto de divisores puede ser partido en dos subconjuntos con igual suma, necesariamente $\frac{1}{2}\sigma(2024)=2160$. Por ejemplo, $\{44,92,2024\}$ y $\{1,2,4,8,11,22,23,46,88,184,253,506,1012\}$.
- *prometido:* pues junto a 2295 forman un par de números tal que la suma de los divisores propios de uno es igual al otro y recíprocamente. Es decir,
$$\sigma(2024)-2024-1=2295 \qquad \text{y} \qquad \sigma(2295)-2295-1=2024.$$

Expresiones con los dígitos

2024 puede ser escrito de muchas formas curiosas, por ejemplo:

- Con las operaciones elementales (incluyendo la potenciación) tanto en forma ascendente como descendente con los dígitos no nulos:
$$\begin{aligned}2024&=(-1+2-3+4)^{5+6}-7-8-9\\&=1-2+3\times(4+5)\times(6+78-9)\\&=1\times 2\times(3+4^5)-6-7-8-9\\&=(98-76)\times(5+43\times 2+1).\end{aligned}$$

- Usando sólo uno cualquiera de los dígitos:

$$\begin{aligned}2024 &= (1+1)^{11} - (1+1)\times(11+1)\\ &= 2\times 2\times(22^2+22)\\ &= 3+(3-\tfrac{3}{3})^{\frac{33}{3}} - 3^3\\ &= 4+(4+4)\times(4^4-4)+4\\ &= 5+5+5^5-\tfrac{5555}{5}\\ &= 6+(\tfrac{6+6}{6})^{\frac{66}{6}} - 6\times 6+6\\ &= 7+7\times(7\times(7\times 7-7)-7)+7+\tfrac{7}{7}\\ &= 88\times(8++8+8-\tfrac{8}{8})\\ &= 9\times 9+(9+9)\times(99+9)-\tfrac{9}{9}.\end{aligned}$$

- La misma representación (decimal) usando un único dígito a:

$$2024 = \frac{(aaaa - aaa + aa + a)\times(a+a)}{a\times a}$$

para cualquier $a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ (¿por qué funciona?).

- Usando los mismos dígitos en las bases que en los exponentes:

$$2024 = -1^7 - 2^5 + 3^6 + 4^3 - 5^2 + 6^4 - 7^1.$$

Suma de cuadrados y ternas pitagóricas

- 2024 se puede escribir de 7 maneras como suma de 3 cuadrados (sin importar el orden de las sumas y sin usar números negativos)

$$\begin{aligned}2024 &= 2^2+16^2+42^2\\ &= 2^2+24^2+38^2\\ &= 8^2+14^2+42^2\\ &= 10^2+18^2+40^2\\ &= 10^2+30^2+32^2\\ &= 16^2+18^2+38^2\\ &= 18^2+26^2+32^2\end{aligned}$$

y como suma de 4, 5 ó 6 cuadrados

$$\begin{aligned}2024 &= 4^2+18^2+28^2+30^2 = 8^2+22^2+24^2+30^2\\ &= 5^2+19^2+22^2+23^2+25^2 = 13^2+17^2+19^2+23^2+26^2\\ &= 7^2+17^2+19^2+20^2+21^2+22^2.\end{aligned}$$

- 2024 es parte de las siguientes ternas pitagóricas

$$2024^2 + 2415^2 = 3151^2, \qquad 2024^2 + 11040^2 = 11224^2,$$
$$2024^2 + 3795^2 = 4301^2, \qquad 2024^2 + 11550^2 = 11726^2,$$
$$2024^2 + 3990^2 = 4474^2, \qquad 2024^2 + 22218^2 = 22310^2,$$
$$2024^2 + 5382^2 = 5750^2, \qquad 2024^2 + 23232^2 = 23320^2,$$
$$2024^2 + 5643^2 = 5995^2, \qquad 2024^2 + 44505^2 = 44551^2,$$
$$2024^2 + 8343^2 = 8585^2, \qquad 2024^2 + 46530^2 = 46574^2,$$
$$2024^2 + 93093^2 = 93115^2,$$

  donde el cateto mas corto mide 2024.

Combinatoria

- 2024 es la cantidad de formas de repartir 11 juguetes entre 2 niños de manera que cada uno reciba al menos dos juguetes. Es decir, el número de cadenas binarias de longitud 11 con al menos dos 0's y al menos dos 1's. En efecto,

$$2024 = 2^{11} - 2 - 2\binom{11}{1}.$$

- 2024 es también el número de productos distintos de la forma

$$i \cdot j \cdot k \qquad \text{con} \qquad 1 \leq i \leq j < k \leq 31.$$

- 2024 es la cantidad de movimientos que les lleva a 44 ranas (R) y 44 sapos (S) intercambiar sus posiciones en una fila con 89 lugares, donde las ranas (resp. sapos) se encuentran todas juntas en el extremo izquierdo (resp. derecho) y separados por un único lugar libre y los movimientos son avanzar o saltar entre ranas y sapos.

  En general, el problema para n ranas y n sapos en una fila de largo $2n+1$ requiere $(n+1)^2 - 1$ movimientos. Por ejemplo, para 2 ranas y 2 sapos, se necesitan 8 movimientos que graficamos a continuación:

R	R	-	S	S
R	-	R	S	S
R	S	R	-	S
R	S	R	S	-
R	S	-	S	R
-	S	R	S	R
S	-	R	S	S
S	S	R	-	S
S	S	-	R	R

- Hay 2024 formas de colocar 3 fichas consecutivas en línea (horizontal, vertical o diagonalmente) en un tablero de 20×20.
- 2024 es la cantidad de matrices 2×2 con coeficientes en $\mathbb{Z}_{46}$, inversibles, cuyo cuadrado es menos la identidad módulo 46; es decir

$$\#\{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_{46}) : A^2 = -I \pmod{46}\} = 2024.$$

Solución de ecuaciones

- Hay 2024 soluciones enteras distintas de cada una de las ecuaciones

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1 \pmod{46} \quad \text{y} \quad x^2 - y^2 - z^2 \equiv 1 \pmod{46}.$$

- Hay 2024 soluciones enteras de la ecuación

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{11}^3 = (x_1 + x_2 + \cdots + x_{11})^2$$

con $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{11}$.
- Hay 2024 soluciones enteras no-negativas de la ecuación

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{23}^2 + x_{24}^2 = 3.$$

- Hay 2024 ternas pitagóricas módulo 48. Es decir, hay 2024 soluciones distintas de la ecuación

$$x^2 + y^2 = z^2 \pmod{48}, \quad x \leq y.$$

Propiedades geométricas

Triángulos enteros

- Hay 2024 triángulos de lados enteros $a, b, c \in \mathbb{N}$ con $a \leq b \leq c$, cuya circunferencia circunscripta tiene radio ≤ 15 (OEIS-A331229). Recordemos que la *circunferencia circunscripta* (o circuncírculo) de un triángulo es la única circunferencia que pasa por sus tres vértices.
- Es la suma de todos los perímetros de todos los triángulos de lados enteros con perímetro 46. Es decir, hay 44 triángulos enteros de perímetro 46 (OEIS-A308089). O sea, hay 44 ternas de números $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3$ con

$$x_1 + x_2 + x_3 = 46,$$
$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \quad \text{y} \quad x_i + x_j \geq x_k$$

para toda permutación i, j, k de $1, 2, 3$ (desigualdad triangular). Por ejemplo, los primeros triángulos son los dados por los lados

$$(1, 22, 23), \quad (2, 21, 23), \quad (2, 22, 22).$$

¿Te animás a encontrar los que faltan?

En efecto, se sabe que el número de triángulos enteros de perímetro m es

$$T(m) = \begin{cases} [\frac{m^2}{48}] & \text{si } m \text{ es par}, \\ [\frac{(m+3)^2}{48}] & \text{si } m \text{ es impar}, \end{cases}$$

(T. Jenkyns, E. Muller, *Triangular Triples from Ceilings to Floors*, The American Mathematical Monthly **107:7**, 2000, 634–639). Luego, $[\frac{46^2}{48}] = 44$.

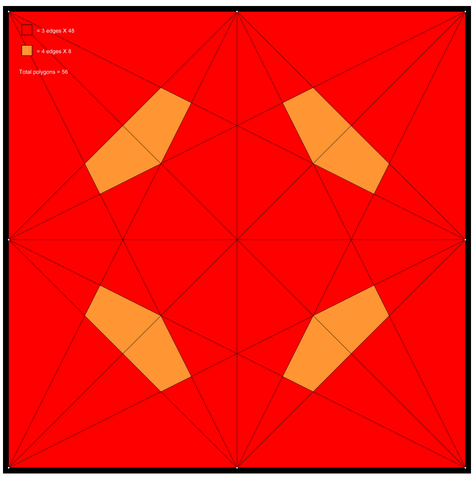
Diagramas de Farey

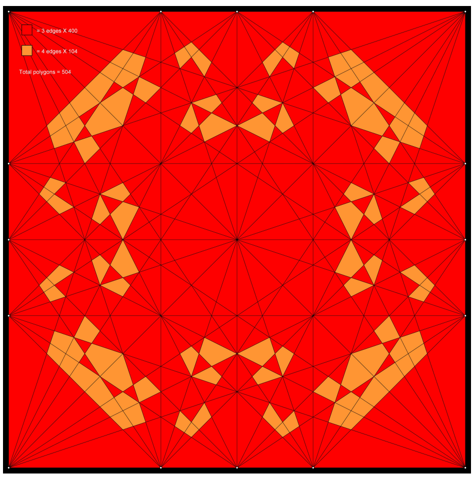
Una *sucesión de Farey* de orden n, denotada por F_n, es la sucesión de todas las fracciones reducidas $\frac{k}{m}$ entre 0 y 1 con el denominador $m \leq n$, listadas en orden creciente. Por ejemplo,

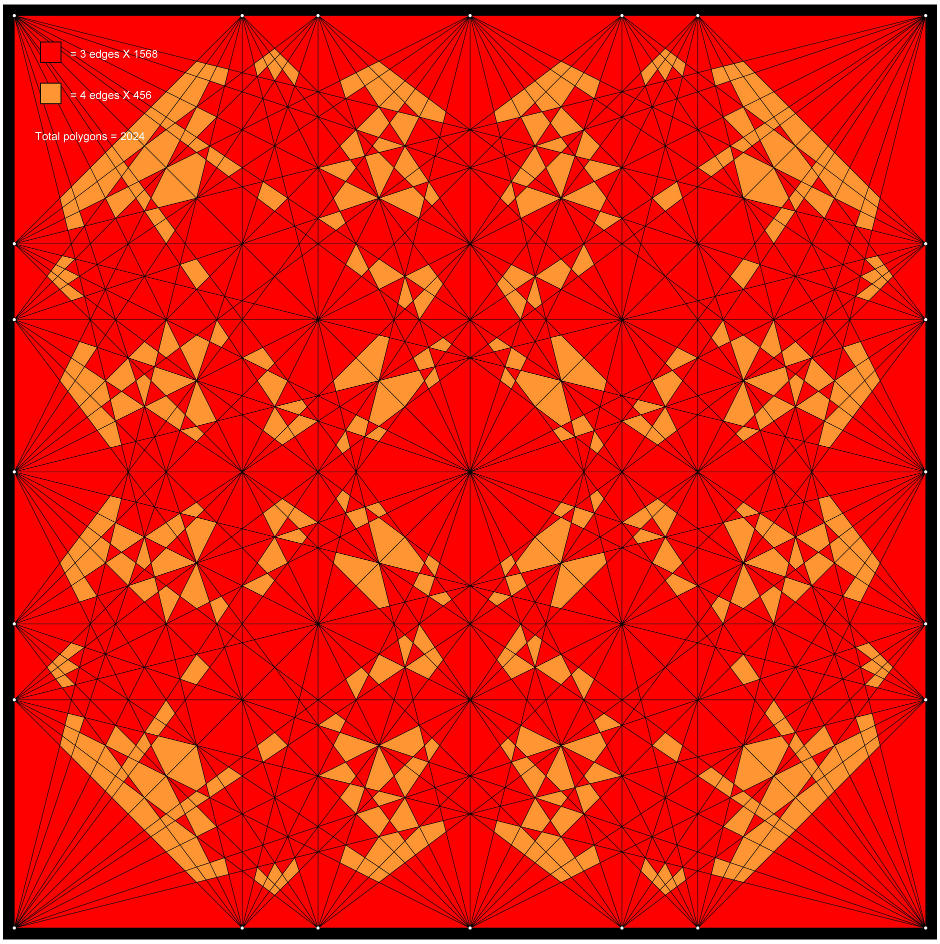
$$\begin{aligned} F_1 &= \{\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{1}\}, \\ F_2 &= \{\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{1}\}, \\ F_3 &= \{\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{1}\}, \\ F_4 &= \{\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{1}\}. \end{aligned}$$

Un *diagrama de Farey* de orden n consiste en tomar el cuadrado unidad $[0,1] \times [0,1]$ y en cada lado marcar los puntos de F_n. Luego se trazan todas las diagonales y medias diagonales posibles (se unen todos los puntos marcados que no pertenezcan al mismo lado). Estas líneas dividen al cuadrado unidad en triángulos y cuadriláteros.

Denotemos por $R(n)$ al número de regiones de un diagrama de Farey de orden n (OEIS-A358882). Resulta que 2024 es el número de regiones del diagrama de Farey de orden 4. En efecto, $R(1) = 4$, $R(2) = 56$, $R(3) = 504$ y $R(4) = 2024$ y gráficamente tenemos







Diagonales en polígonos regulares

Hay 2024 diagonales en un polígono regular de 92 lados que son paralelas, por lo menos, a uno de los lados (ver sucesión $a(n)$ en OEIS-A367204).

En efecto, sea P_n un polígono regular de n lados. Es muy fácil ver que P_n tiene $\frac{1}{2}n(n-3)$ diagonales. Si n es impar cada diagonal es paralela a algún lado. Si n es par, numerando los vértices $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, cada diagonal está formada por la elección de dos vértices $i, j \in V$ no consecutivos (módulo n), es decir $|i - j| > 1$ $(\text{mód } n)$. Dicha diagonal es paralela a un lado si y solo si la diferencia $i-j$ es impar (pensar geométricamente).

Luego, las diagonales que no son paralelas a un lado de P_n son aquellas que tienen sus dos vértices pares o los dos impares. Así, hay

$$2\binom{n/2}{2} = \tfrac{1}{4}n(n-2)$$

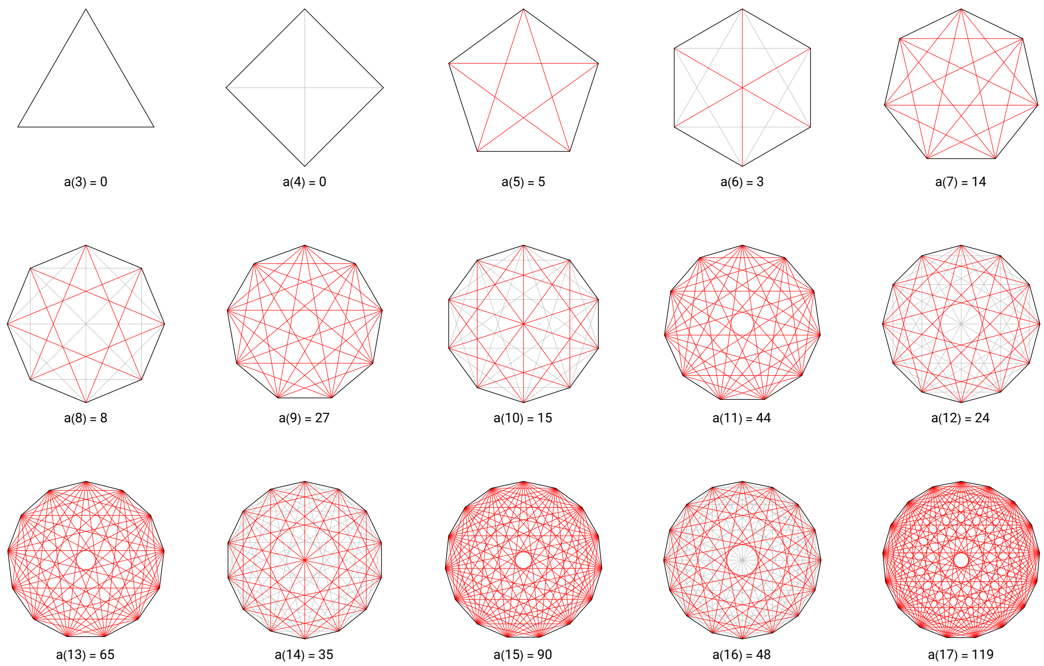
diagonales que no son paralelas a lados. De esta forma, el número de diagonales de P_n paralelas a un lado es

$$a(n) = \tfrac{1}{2}n(n-3) - \tfrac{1}{4}n(n-2) = \tfrac{1}{2}n(n-4).$$

Finalmente, obtenemos que

$$a(92) = \tfrac{92 \cdot 88}{2} = 2024.$$

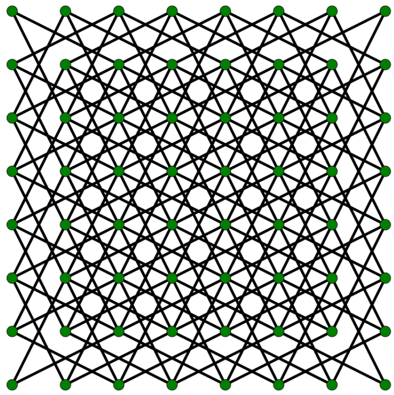
En la figura siguiente se muestran las $a(n)$ diagonales paralelas a P_n para $n \leq 15$.



Grillas y grafos

- 2024 es el número de polígonos que se pueden formar al unir los 16 puntos de una grilla cuadrada de 4×4 con segmentos (OEIS-A345459).
- En una grilla de 23×23 hay 2024 segmentos que conectan exactamente 8 puntos (OEIS-A177724). También hay 2024 segmentos de longitud $\sqrt{5}$ uniendo vértices de la grilla (OEIS-A033996). En efecto, cada 'dominó' (subgrilla de 1×2 ó 2×1) tiene dos tales diagonales.
- El grafo juntura de dos grafos cíclicos de 44 lados $C_{44} * C_{44}$ tiene 2024 aristas. La *juntura* de dos grafos G y H es el grafo $G * H$ donde cada vértice de G es unido a cada vértice de H.
- La *circunferencia* de un grafo G, denotado por $Cir(G)$, es la longitud del ciclo más largo que éste contiene. Se sabe que una grilla de $n \times n$ como grafo (i.e. $P_n \times P_n$) tiene circunferencia n^2 si n es par y $n^2 - 1$ si n es impar. Luego, la grilla de 45×45 como grafo tiene circunferencia $45^2 - 1 = 44 \cdot 46 = 2024$. Pero mucho más sorprendente es que el grafo del caballo en un tablero de 45×45 tiene circunferencia 2024 (OEIS-A248427). El *grafo del caballo* ♘(n) es

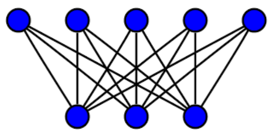
el grafo que representa todas las movidas legales de un caballo de ajedrez en un tablero de $n \times n$. Cada vértice del grafo representa una casilla y cada lado conecta casillas que están a salto de caballo una de otra. A continuación, el grafo ♘(8) a partir de un tablero de 8×8:



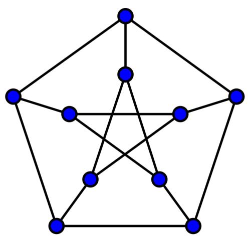
En definitiva, en un tablero de 45×45, el ciclo más largo que puede hacer un caballo es de 2024 casillas. En símbolos,

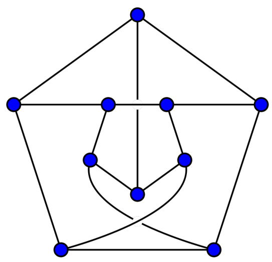
$$Cir(\text{♘}(45)) = 2024.$$

- El número de cruce del grafo bipartito $K_{5,46}$ es 2024. El *grafo bipartito completo* $K_{n,m}$ es un grafo con $n+m$ vértices, divididos en dos conjuntos V_1 y V_2 de n y m vértices respectivamente, donde todos los vértices de V_1 están unidos con todos los vértices de V_2 pero ningún vértice de V_1 ni de V_2 forman lados (por ejemplo, en la figura siguiente damos $K_{5,3}$).



El *número de cruces* $cr(G)$ de un grafo G es el mínimo número de cruces entre sus lados con que puede ser dibujado en el plano. Un grafo planar tiene número de cruce 0. Los grafos no planares más chicos son $K_{3,3}$ y K_5 y tienen número de cruces $cr(K_{3,3}) = 1 = cr(K_5)$. Un grafo con número de cruce 2 es el grafo de Petersen P (dibujo clásico y otro donde se ve que $cr(P) = 2$):



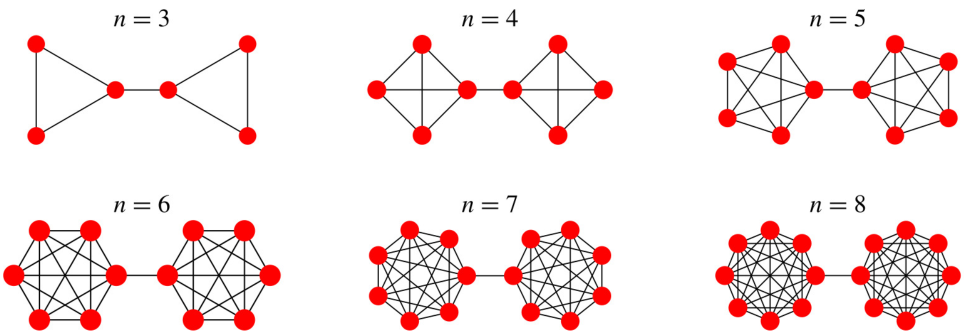


En efecto, Kleitman probó en 1970 (Daniel J. Kleitman, *The crossing number of $K_{5,n}$*, J. Comb. Theory **9:4**, 12/1970, 315–323) que

$$cr(K_{5,n}) = 4[\tfrac{n}{2}][\tfrac{n-1}{2}]$$

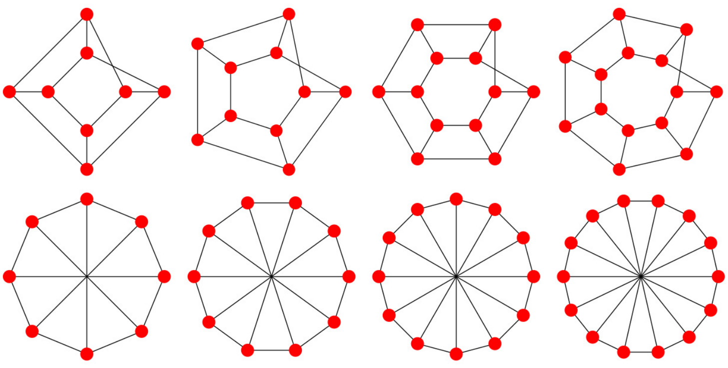
de donde vemos que $cr(K_{5,46}) = 4 \cdot 23 \cdot 22 = 2024$.

- Hay 2024 conjuntos independientes en el grafo de barra con pesas (barbell) b_{44}. Un *conjunto independiente* en un grafo es cualquier conjunto de vértices que no están conectados entre sí. El *grafo con pesas* b_n se obtiene uniendo con un lado dos copias de un grafo completo de n-vértices K_n (ver figura para $n = 3, \dots, 8$).



Se sabe que el número de conjuntos independientes de b_n es $(n+1)^2 - 1$.

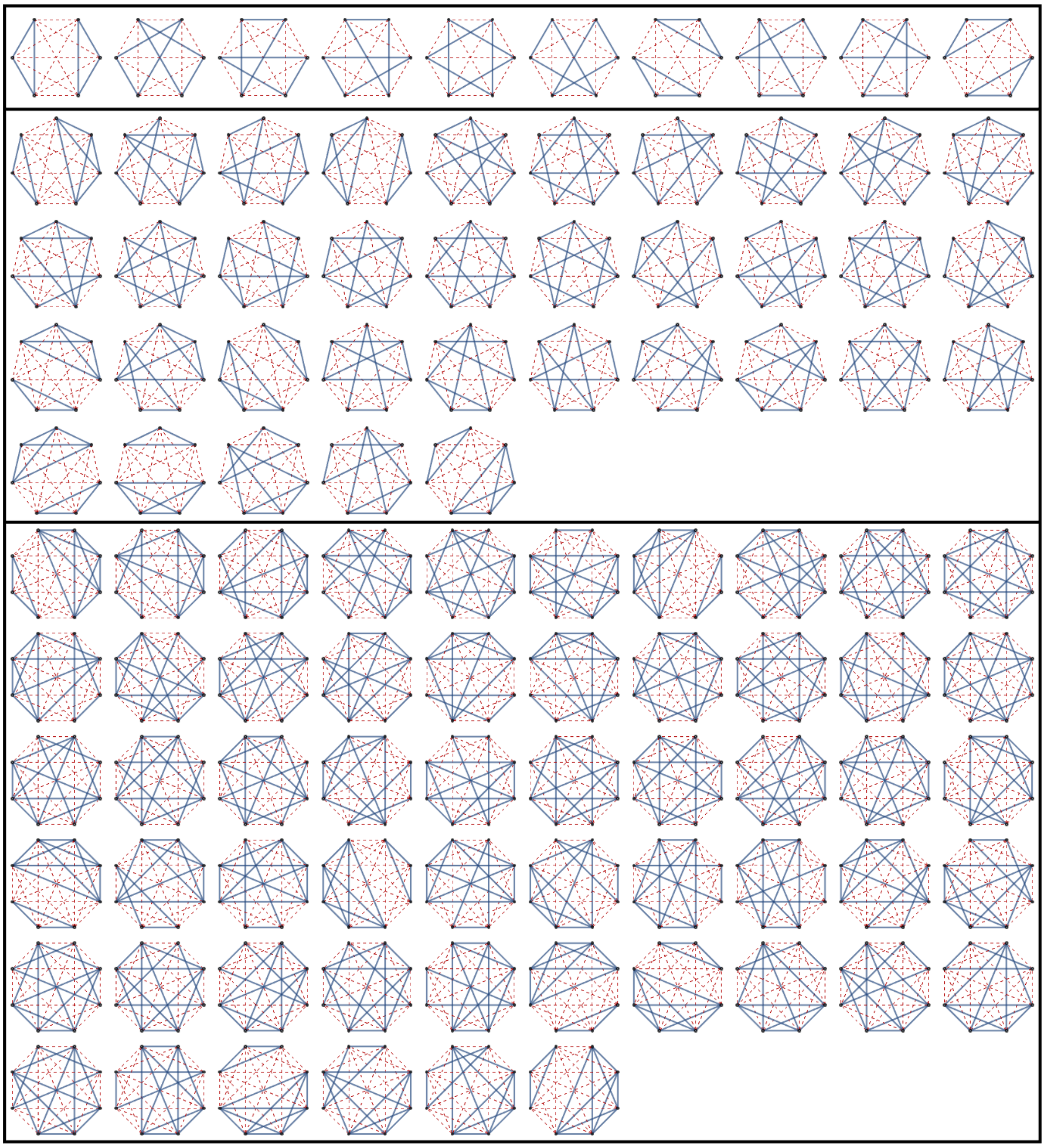
- Hay 2024 conjuntos dominantes mínimos en el grafo escalera de Möbius M_{44} (OEIS-A347559). El grafo *escalera de Möbius* de orden n, denotado por M_n, es el grafo obtenido a partir del grafo prisma de orden n introduciendo un 'twist' entre dos lados y resulta isomorfo al grafo circulante Ci_{2n} (ver figura M_4–M_7 y Ci_8–Ci_{14}).



Un *conjunto dominante* en un grafo G es un subconjunto D de vértices, tal que todo vértice en G o bien está en D o tiene un vecino en D. Un *conjunto dominante mínimo* de G es un conjunto dominante de tamaño mas chico posible en G.

- Hay 2024 cortes de lados cíclicos mínimos en el grafo completo K_{24} (OEIS-A351860). Un *corte de lados* (cut egde) en un grafo conexo G es un conjunto de lados S que si se quitan a G, el grafo resultante $G \setminus S$ queda disconexo.

Un *corte de lados cíclico* es un corte de lados S en G tal que $G \setminus S$ tiene al menos un ciclo en cada componente conexa. A continuación mostramos los cortes cíclicos mínimos para K_6, K_7 y K_8.



Algunas de las curiosidades de la presente nota han sido obtenidas de la página Numbers Aplenty (*Tipos de números*) y del artículo 24 and 2024 in numbers and patterns de Inder Taneja (*Expresiones con los dígitos* y *Sumas de cuadrados*). El número 2024 aparece en más de 400 sucesiones en la página web https://oeis.org (The On-line Encyclopedia of Integer Sequences) de Neil Sloane, de las cuales he seleccionado las que más me llamaron la atención. Las imágenes son libres, obtenidas en su mayoría de Wikipedia o Wolfram Mathematica. Puede el lector dedicar lo que resta del año a buscar por su cuenta muchas más apariciones interesantes del 2024 en la matemática.