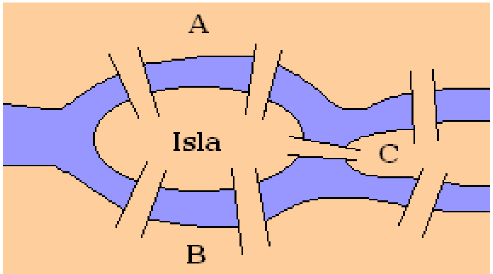
Sección de Problemas

☞ *por Diego A. Sulca*

En el siglo XVIII, la ciudad de Königsberg (actualmente Kaliningrado) fue uno de los centros del pensamiento científico más importante de Europa. Königsberg está atravesada por el río Pregel, el cual se bifurca y genera una división de la ciudad en 4 zonas, como se esquematiza en la siguiente figura [1]



La ciudad estaba interconectada por 7 puentes, y los pensadores de la época, a modo de entretenimiento, se preguntaban si era posible hacer una caminata por la ciudad atravesando cada puente exactamente una vez. ¿Se animan a resolverlo...?

Fue el matemático Leonhard Euler quien demostró que tal caminata era imposible. La idea de Euler es muy sencilla. Si existiera un tal recorrido, todas las zonas deberían ser visitadas, y salvo quizás la zona de inicio y la del fin del recorrido (que incluso podrían coincidir), en cada una de las restantes (al menos dos) la cantidad de puentes que la conectan con el resto debe ser un número par. En efecto, en cada visita a una tal zona (zona de pasada) se necesitan dos puentes, uno de llegada y uno de salida. Si tal zona se visita dos veces se necesitaría otros dos puentes más, porque recordemos que los puentes no pueden repetirse; y así sucesivamente. Sin embargo, en la figura anterior vemos que cada zona está conectada por una cantidad impar de puentes. Por lo tanto tal recorrido no existe.

Se dice que este problema dio origen a la teoría de grafos, una rama de la matemática y la computación muy estudiada en la actualidad. Un grafo es una configuración de puntos (por ejemplo las zonas de Königsberg) conectados por algunos segmentos (por ejemplo, los puentes). Para los siguientes problemas

[1] Imagen extraída de http://enciclopedia.us.es/index.php/Archivo:Puentes_Königsberg.png

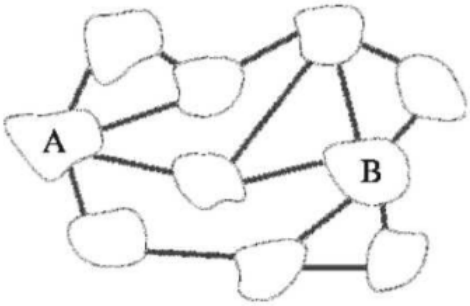
no se necesita nada de grafos, pero es probable que al resolverlos lleguen naturalmente a considerar grafos.

Problema 1. Una caminata en una ciudad en la que se atraviesa cada puente de la ciudad una sola vez, se dice caminata euleriana.

(a) Demostrar que si a la ciudad de Königsberg le quitamos o le agregamos un puente, siempre será posible hacer una caminata euleriana.

(b) ¿Se puede decir lo mismo si se quitan dos puentes?

Problema 2. Se tienen 10 islas conectadas por 15 puentes.



(a) (IKMC 2017) ¿Cual es el menor número de puentes que se puede eliminar para que sea imposible ir desde A hasta B por puentes?

(b) ¿Cual es el mayor número de puentes que se puede eliminar y que aún se pueda ir desde cualquier isla a otra?

Problema 3. Un grupo de 11 compañeros del secundario se ha reunido después de muchos años. Sin embargo en este grupo hay personas que no se llevan bien.

(a) Si cada persona se lleva bien con al menos nueve del grupo, probar que hay una persona que se lleva bien con todos.

(b) ¿Puede suceder que nadie se lleve bien con todos, pero que cada uno se lleve bien con al menos ocho del grupo?

(c) ¿Puede suceder que cada persona se lleve bien con exactamente siete del grupo?

Problema 4. Pepa quiere pintar el mapa de Argentina. Como quiere que las provincias se distingan bien, a las provincias limítrofes las quiere de diferentes colores. El problema es que Pepa solo tiene 3 colores diferentes: violeta, rojo y verde.

(a) Mostrar que Pepa no podrá lograr su objetivo.

(b) Sin embargo, Pepa es muy ingeniosa y decide dejar algunas provincias sin pintar, que por defecto quedarían en color blanco. Demostrar que al menos dos provincias deben quedar sin pintar.

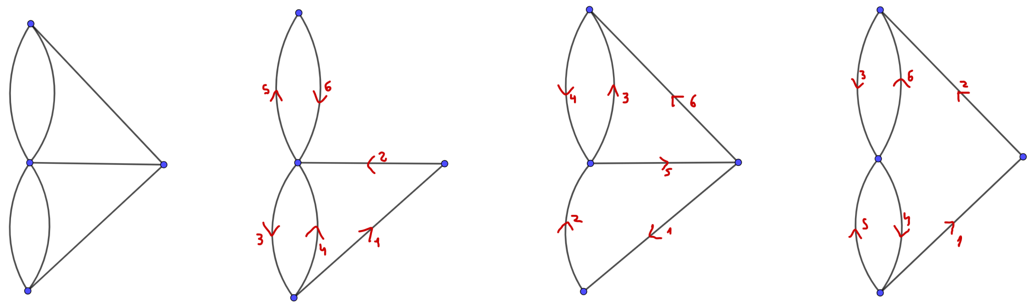
(c) Pepa es cordobesa y no quiere que Córdoba quede sin pintar. ¿Puede Pepa pintar el mapa dejando sólo dos provincias sin pintar y que ninguna de esas sea Córdoba?

SOLUCIONES

Solución 1.

(a) En el mapa original, cada una de las zonas se conecta con el resto de la ciudad por una cantidad impar de puentes. Después de agregar o quitar un puente, la ciudad seguirá interconectada, pero las ciudades entre las que se agregó o quitó un puente pasan a conectarse cada una con el resto mediante una cantidad par de puentes. Las otras dos siguen conectándose con el resto por una cantidad impar de puentes.

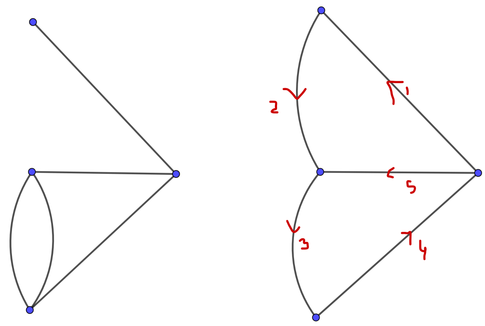
En el caso en que se ha quitado un puente, es fácil construir una caminata euleriana que empiece en una de las ciudades que se conecta al resto con una cantidad impar de puentes, y que termine en la otra que tiene la misma propiedad. Esto lo podemos hacer caso por caso. En la siguiente figura mostramos el esquema de conexión inicial y esencialmente las tres posibles esquemas de conexión después de quitar un puente. En cada uno de ellos se indica una posible caminata euleriana.



En el caso en que se ha agregado un puente, partimos de una zona, digamos A, que se conecta al resto con una cantidad impar de puentes. Como toda zona se conectaba directamente con por lo menos otras dos, podemos caminar desde A hacia una de las zonas, digamos B, que está conectada por el nuevo puente. El nuevo puente conecta B con otra zona, digamos C, que es distinta de A. Hacemos la caminata por este puente y llegamos a C. A continuación eliminamos el puente usado para ir desde A hasta B y el puente nuevo que une B y C. Notar que C ahora se conecta con el resto por una cantidad impar de puentes. De este modo estamos en la situación anterior, y por lo tanto ya sabemos como seguir con nuestra caminata.

Se puede probar en general que dada cualquier ciudad separadas por ríos e interconectada por puentes de modo que: 1) se puede llegar de un punto de la ciudad a cualquier otro, y 2) hay exactamente dos zonas A y B de la ciudad que se conectan con el resto por una cantidad impar puentes, entonces existe una caminata euleriana que empieza en A y termina en B.

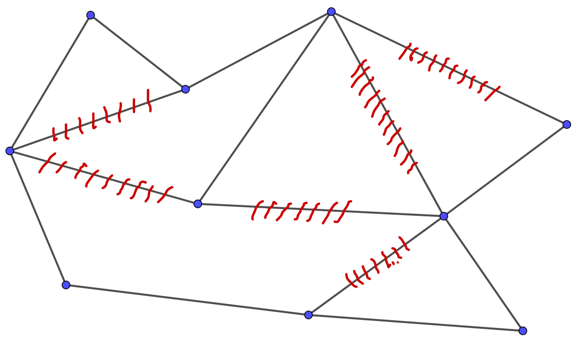
(b) En el caso en que se quitan dos puentes, la respuesta va a depender de cuáles son los puentes quitados. A continuación mostramos dos ejemplos. En el primero no hay caminata euleriana, y el argumento es el mismo que el usado por Euler. En el segundo ejemplo mostramos una posible caminata.



Solución 2.

(a) Salta a la vista que eliminando 3 puentes se puede desconectar A de B. Lo interesante es justificar porqué no se puede lograr eliminando menos puentes. En efecto, se pueden encontrar 3 caminos desde A hasta B que dos a dos no tienen ningún puente en común. Para desconectar A de B se debería eliminar un puente en cada uno de estos caminos, es decir, 3 puentes en total.

(b) A continuación mostramos un ejemplo en donde hemos eliminado 6 puentes sin que las islas queden desconectadas.



Veamos ahora que 6 es óptimo.

Supongamos que de los 15 puentes hemos eliminado N puentes manteniendo las islas conectadas y que ya no se pueden eliminar más puentes. Queremos ver que

$$N \leq 6.$$

Como las islas están conectadas, para cada par de islas X e Y hay un camino $l(X,Y)$ desde X hasta Y que no repite puentes. Tal camino es único, pues si hubieran dos caminos diferentes, digamos l_1 y l_2, al eliminar un puente en uno de ellos que no está en el otro, el conjunto de islas seguiría conectado (¿por qué?), contradiciendo nuestra suposición.

Sean ahora I, F dos islas tal que $l(I, F)$ tiene la mayor cantidad de puentes. Luego a I solo llega un solo puente (el primer puente del camino $l(I, F)$). Dado un puente que une dos islas X e Y, dibujamos una flecha desde X hacia Y si $l(I, X)$ no ha usado dicho puente. Si lo ha usado entonces habrá una flecha desde Y hacia X, pues en tal caso $l(I, Y)$ no debió haber usado el puente. De este modo todo puente tiene una dirección. Como se puede llegar desde I a cualquier isla, toda isla es el punto final de un puente con dirección.

De este modo, si a cada puente (que ahora tiene dirección) le asociamos su punto final obtenemos una función sobreyectiva entre el conjunto de puentes y el conjunto $\{\text{islas}\} \setminus \{I\}$. Luego

$$15 - N \geq 10 - 1 = 9$$

y por lo tanto $N \leq 6$.

Con la misma demostración se puede probar que dadas x islas, el número mínimo de puentes que necesito para poder conectarlas es $x - 1$. Usando un argumento inductivo se puede simplificar mucho la demostración.

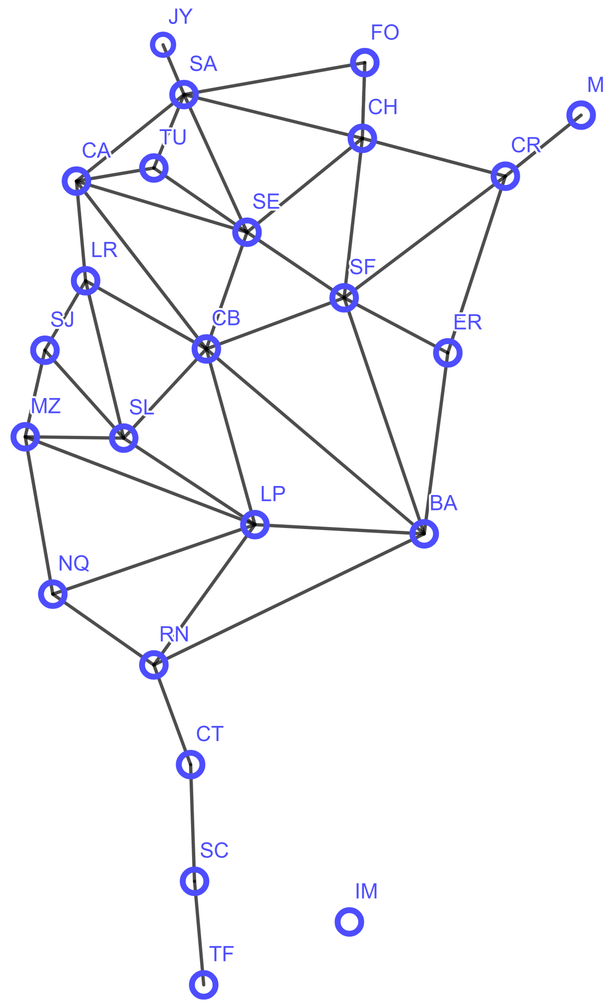
Solución 3.

(a) La condición equivale a que cada persona se lleva mal con a lo sumo con una persona, y se debe probar que hay una persona que no se lleva mal con nadie. Las personas que se llevan mal pueden agruparse entre sí. Estos conjuntos serán disjuntos pues una persona a lo sumo se lleva mal con una persona. Como 11 es impar, siempre habrá una persona que quede solo, es decir, que no se lleva mal con nadie.

(b) Sí, de hecho puede pasar que cada persona se lleva bien con exactamente 8 personas, o equivalentemente, que se lleve mal con exactamente dos personas. Imaginemos las 11 personas sentadas en una mesa redonda de modo que cada uno se lleve mal con exactamente las dos personas que tiene al lado.

(c) Supongamos que es posible. Imaginemos que cada par de personas que se llevan bien se entregan un regalo entre sí. Si juntamos todos los regalos en una bolsa habrá una cantidad par de regalos: cada par de personas que se lleva bien aporta dos regalos a la bolsa. Sin embargo, cada persona recibe exactamente 7 regalos, y por lo tanto el número total de regalos debería ser $11 \cdot 7 = 77$, que es un número impar. Esto es absurdo. Por lo tanto, la situación no puede darse.

Solución 4. Para esta problema será muy útil pensar las provincias como puntos y unir dos puntos con una línea cada vez que las correspondientes provincias sean limítrofes. El diagrama resultante es el siguiente:



El problema consiste en colorear los puntos de modo tal que dos puntos conectados por un segmento tengan siempre distintos colores.

(a) Veamos que Pepa no podrá pintar todos los puntos con la condición requerida. En efecto, Catamarca, Salta, Tucumán y Santiago del Estero deben pintarse con colores diferentes pues están dos a dos conectadas.

(b) Vimos que al menos una de las 4 provincias mencionadas anteriormente debe quedar sin pintar. Veamos ahora que entre Córdoba, La Rioja, San Juan, San Luis, Mendoza y La Pampa, al menos una debe quedar sin pintar. En efecto, si las pudiésemos pintar con 3 colores, Córdoba y San Juan deberían tener el mismo color pues ambas deben distinguirse de La Rioja y San Luis. Por el mismo argumento, San Juan y La Pampa deberían tener el mismo color. Pero entonces Córdoba y La Pampa tienen el mismo color, y esto no está permitido. Concluimos que al menos dos provincias deben quedar sin pintar.

(c) Sí. Se puede dejar La Rioja y Santiago del Estero sin pintar. Un posible coloreo sería: