

---

# SOBRE LA GEOMETRÍA Y LA TOPOLOGÍA DE LAS CÚPULAS DE DA VINCI

Nicolé Geysse, María José Moreno y Andrés Navas

Traducción de Antonio Cafure<sup>1</sup>

---

**RESUMEN.** Estudiamos las famosas cúpulas de Leonardo Da Vinci, así como las variaciones concebidas por Rinus Roelofs, desde un punto de vista matemático. En particular, consideramos el problema de cerrar la cúpula para producir una estructura esférica. Explicamos por qué este problema está relacionado con consideraciones geométricas y topológicas sutiles. Esto contrasta con la estructura unidimensional análoga, a saber, el puente de Da Vinci, que se puede fácilmente continuar hasta cerrar una forma circular.

*Palabras clave:* Leonardo Da Vinci, puente, cúpula, geometría, topología.

**ABSTRACT.** We study the famous Leonardo Da Vinci's domes, as well as the variations pursued by Rinus Roelofs, from a mathematical viewpoint. In particular, we consider the problem of closing the dome in order to produce a spherical structure. We explain why this problem is related to subtle geometric and topological considerations. This is in contrast with the 1-dimensional analog structure, namely Da Vinci's bridge, that can be easily closed up to make a circular shape.

*Keywords:* Leonardo Da Vinci, bridge, dome, geometry, topology.

## §1. Introducción

Sin duda alguna, Leonardo Da Vinci es uno de los grandes genios de la historia. Su vasta obra sorprende no sólo por su profundidad, originalidad y belleza, sino también por su heterogeneidad. Entre sus escritos, incluso es posible encontrar varias notas sobre matemática. La mayor parte de su educación matemática es consecuencia de su formación con Luca Pacioli, para quien ilustró el famoso libro *Sobre la proporción divina*. En este sentido, destaca la presencia de la razón áurea en las obras de arte de Da Vinci, aunque esta suele ser exagerada.

Da Vinci también abordó problemas como la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo, aunque sus avances en torno a estos no fueron sustanciales. En el artículo (Duvernoy, 2008) de Sylvie Duvernoy se puede encontrar más información al respecto, así como una interesante discusión sobre una contribución

---

<sup>1</sup> Traducido con autorización de los autores, el artículo original en inglés, *On the geometry and topology of Da Vinci domes*, se publica en este mismo número de la Revista de Educación Matemática.

genuina y poco conocida al problema de la determinación del centro de gravedad de una pirámide<sup>2</sup>.

En este artículo nos centraremos en una serie de bocetos gráficos que dejó en su obra mítica *Codex Atlanticus*. Los abordaremos desde un punto de vista matemático, más precisamente, geométrico y topológico.

## §2. El puente de Da Vinci

De las muchas estructuras que esbozó Leonardo da Vinci, quizás la más ingeniosa sea su diseño de un puente autoportante y de fácil montaje. En el *Códice* encontramos la siguiente imagen:



FIGURA 1. Imagen del folio 69 recto del Codex Atlanticus de Leonardo Da Vinci.

El artículo ([Humenberger, 2021](#)) proporciona una descripción completa de la geometría elemental involucrada en este diseño.

En los últimos años, esta idea de Da Vinci ha sido implementada sistemáticamente como una actividad pedagógica para introducir a los estudiantes a la geometría en dos y tres dimensiones de una manera atractiva, ver ([Carrasco, Carvacho, y Sánchez, 2023](#)). También ha encontrado un lugar central en diversas exposiciones matemáticas (museos, festivales, etc.) en todo el mundo, y se ha exhibido como decoración en muchos lugares, por ejemplo, en la ciudad de Friburgo (Alemania).

<sup>2</sup>En la literatura suele mencionarse que Da Vinci habría aportado una prueba muy original del teorema de Pitágoras. Sin embargo, esto es muy improbable pues el argumento parece haber surgido mucho más tarde. Para una discusión muy completa sobre este asunto, ver el artículo ([Lemmermeyer, 2016](#)) de Franz Lemmermeyer.



FIGURA 2. Un puente de Da Vinci en Friburgo; imagen de Wikipedia Commons.

No es muy sorprendente que, siguiendo cuidadosamente esta construcción, al final se obtenga un “círculo”, como se muestra a continuación.



FIGURA 3. Un “círculo” de Leonardo da Vinci.

### §3. Las cúpulas de Da Vinci

A continuación exhibimos otro maravilloso diseño del *Códice*. Las estructuras que se forman a partir de él también son autoportantes, aunque producen una especie de superficie de dimensión 2 en lugar de un objeto unidimensional.

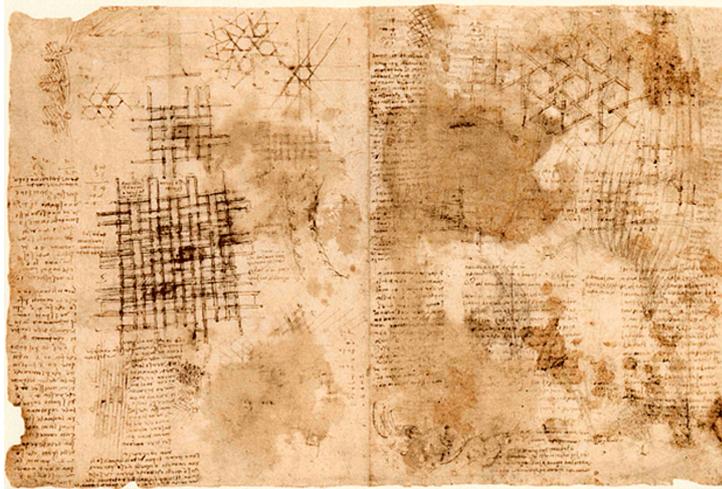


FIGURA 4. Folio 899 verso del *Codex Atlanticus* de Leonardo Da Vinci.

Todas estas estructuras se basan en el mismo principio: cada varilla es perfectamente recta pero tiene cuatro muescas. Un aspecto crucial es que las muescas que están cerca de los extremos son más profundas que las otras dos.

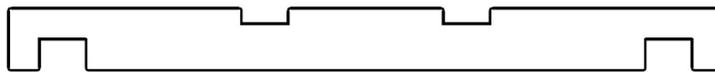


FIGURA 5. Una varilla de una cúpula de Da Vinci.

Al ensamblar piezas, cada muesca debe coincidir con otra, y aquellas que se encuentran en los extremos deben colocarse hacia el suelo. Debido a la diferencia de profundidad, esta simple regla produce que la estructura se eleve.



FIGURA 6. Una cúpula ensamblada para el Festival de Matemáticas en Valparaíso, Chile.

Hay muchas variaciones en los diseños. En particular, la bonita lista de once patrones periódicos planos que presentamos a continuación fue producida para el kit educativo LeonarDome del Museo de Matemáticas de Cataluña (ver (Brasó, 2018)).

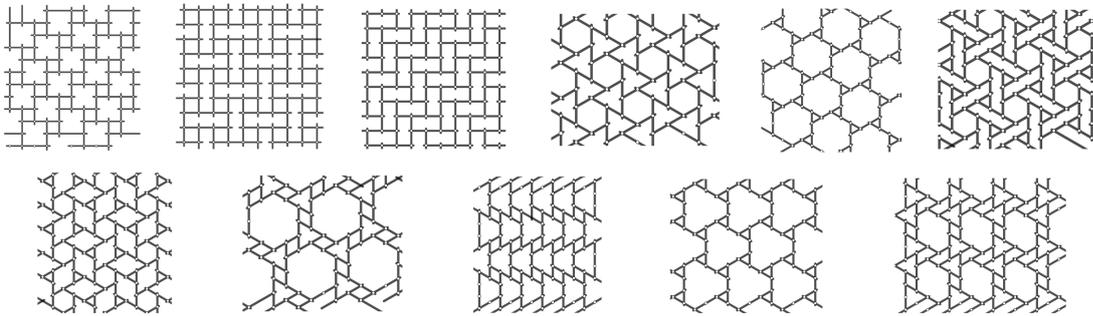


FIGURA 7. Once patrones diferentes para construir cúpulas.

Incluso se pueden crear más diseños. Por ejemplo, el que sigue fue concebido por Ignacio (hijo del tercer autor), aunque luego descubrimos que aparece en la página 4 de (Song y cols., 2013).



FIGURA 8. Un “nuevo” patrón.

Debemos destacar que, en las ilustraciones anteriores, todas las varillas tienen la misma longitud. Sin embargo, nuestra discusión también se aplica a varillas de longitudes diferentes, las que dan lugar a más patrones.

Sería interesante explorar todo el panorama de embaldosados periódicos planos que pueden ser implementados de esta manera. Un problema desafiante es determinar cuáles de los diecisiete grupos cristalográficos pueden realizarse. Por ejemplo, parece que aquellos que involucran simultáneamente rotaciones no triviales y reflexiones son difíciles de producir (quizás algunos de ellos sean

imposibles). Se puede comprobar fácilmente que los patrones anteriores realizan los grupos pmg, pgg, p31m, p4g, p4 y p6 (ver (Schattschneider, 1978) para una discusión concisa sobre grupos cristalográficos, incluida la notación).

Estructuras como las cúpulas de Da Vinci han sido redescubiertas y trabajadas por Rinus Roelofs; ver (Roelofs, 2008) para una descripción de este aspecto de su increíble trabajo. Volveremos sobre esto más adelante.

#### §4. Patrones de Da Vinci y esfericidad

El puente de Da Vinci puede cerrarse para dar lugar a una estructura circular. Naturalmente, cabe preguntarse si las cúpulas de Da Vinci también pueden cerrarse para originar superficies esféricas. Vale la pena recalcar que sólo nos referimos a la combinatoria de los patrones, sin alusión a la estabilidad física de la estructura. En particular, no sugerimos aquí ningún fenómeno de tensegridad.

Señalemos que existen teselaciones esféricas que respetan las reglas combinatorias de las cúpulas de Da Vinci (las muescas internas de cada varilla apuntan en una dirección y las externas en la opuesta, todo esto de manera coherente y sistemática). Por ejemplo, uno puede construirlas a partir de configuraciones de tipo icododecaedra. El hermoso diseño reproducido a continuación fue concebido por Roelofs y puede ser apreciado mejor en su sitio web. Observemos, sin embargo, que la esfericidad de la estructura es en cierto modo “contraria” a la de los domos de Da Vinci y proviene de que las varillas están sistemáticamente curvadas en una dirección apropiada (de hecho, no hay diferencia de profundidad entre las muescas internas y externas de cada varilla).



FIGURA 9. Este diseño de Roelofs se encuentra en su sitio web <http://www.rinusroelofs.nl/structure/designs-lg/dm-sphere-10.html>

En ciertos casos, es posible cerrar una estructura esférica usando sólo varillas rectas. Esto puede ser constatado, por ejemplo, con el siguiente diseño de Arie Brederode. Notemos que este requiere de una gran cantidad de varillas.



FIGURA 10. Imágenes subidas por Arie Brederode a la página de Facebook de *Bridges: Arts & Mathematics*; reproducidas con autorización.

**4.1. Una advertencia sobre la colinealidad de los vértices a lo largo de las varillas.** Desde un punto de vista teórico, no resulta apropiado modelar las cúpulas de Da Vinci como poliedros en que las varillas (rectas) se identifican a las aristas y, por consiguiente, los vértices a lo largo de cada una de ellas son colineales (compare con (Song y cols., 2013)). De hecho, un objeto con estas características no puede cerrarse como una superficie esférica. Esto es consecuencia del siguiente resultado elemental, cuya hipótesis se aplica a los domos de Da Vinci en caso de modelarlos como poliedros con vértices colineales a lo largo de las varillas debido a sus propiedades combinatorias (específicamente, debido a que las muescas externas de cada varilla no pueden empalmar con otras muescas externas).

**El teorema del poliedro.** No existe ningún poliedro de tipo esférico cuyos vértices estén cada uno contenido en al menos dos aristas colineales.

Presentaremos dos demostraciones de este resultado. La primera es puramente geométrica y, en cierto modo, está relacionada con la idea de curvatura. Ella reproduce un argumento estándar que muestra que cada superficie compacta en el espacio tridimensional tiene puntos con curvatura gaussiana positiva. La

segunda, basada sobre el clásico teorema del defecto angular de Descartes, es de índole más topológica. Aunque es más elaborada que la demostración geométrica, las consideraciones topológicas involucradas orientarán nuestra discusión posterior. Como es de esperar, ambas pruebas son por contradicción.

**Primera demostración (Da Vinci se encuentra con Gauss).** Supongamos que sí existe tal poliedro y consideremos una esfera muy grande cuyo interior lo contenga. Disminuyendo de forma continua el radio de la esfera, detectamos un momento en el que se vuelve “tangente”: el poliedro toca la esfera, pero no la cruza. Sea  $P$  un punto en común entre el poliedro y esta nueva esfera. Tal punto tiene que ser un extremo de cualquier segmento formado por aristas del poliedro pues, de lo contrario, este segmento cruzaría la esfera, y habría vértices del poliedro fuera de esta. En particular,  $P$  tiene que ser un vértice. Sin embargo, por hipótesis, a cada vértice del poliedro convergen al menos dos aristas que son colineales, lo cual implica que  $P$  no es un extremo del segmento formado por dichas aristas. Esta contradicción concluye la demostración.

**Segunda demostración (Da Vinci se encuentra con Descartes).** Recordemos que el *defecto angular* de un vértice de un poliedro es definido como la diferencia entre  $360^\circ$  y la suma de los ángulos en el vértice. Una forma sencilla de visualizar esta noción consiste en abrir uno de los bordes y desplegar en el plano las caras que convergen a ese vértice. El ángulo plano que queda sin cubrir por esas caras es el defecto angular.

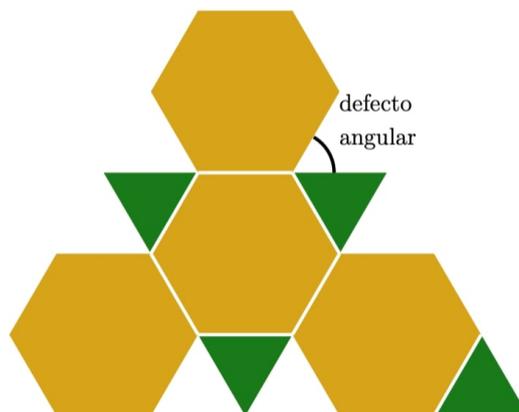


FIGURA 11. Defecto angular.

Un famoso teorema de Descartes establece que la suma total de los defectos angulares de todos los vértices de un poliedro de tipo esférico es igual a  $720^\circ$ . Aunque este resultado es una consecuencia casi directa de la fórmula de Euler (5.1), históricamente lo precede. El artículo (Scott, 2006) es una buena referencia para una demostración.

Nuevamente, para la prueba del teorema, supongamos que sí existe el poliedro en cuestión. Si uno de sus vértices tiene grado 2, entonces los dos ángulos que convergen en él son iguales a  $180^\circ$ , por lo que el defecto angular es igual a 0. Si un vértice tiene grado 3, entonces tres ángulos concurren a ese vértice: dos de ellos son suplementarios y el tercero es igual a  $180^\circ$ . La suma de estos ángulos es entonces igual  $360^\circ$  y, por lo tanto, el defecto angular también se anula. En caso de grado superior, un argumento similar muestra que el defecto angular no es positivo. Por tanto, la suma total de los defectos angulares de los vértices no es positivo. Sin embargo, esto contradice el teorema de Descartes.

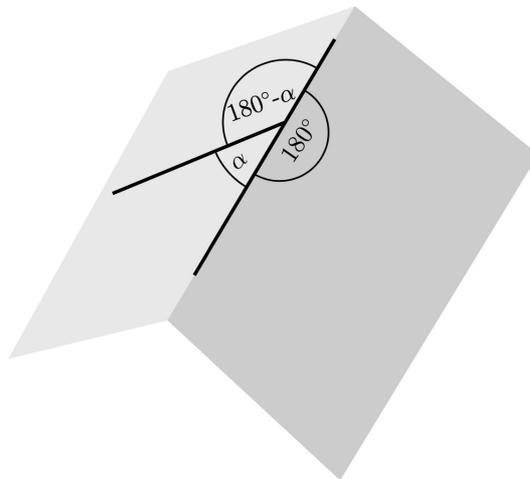


FIGURA 12. El defecto angular en un vértice de grado 3 es igual a 0.

Se puede argumentar que el teorema anterior no se adapta bien al contexto, pues permitir solamente vértices colineales a lo largo de la misma varilla no implica que el objeto completo pueda considerarse como un poliedro, ya que las “caras” podrían no ser planas. Sin embargo, si le agregamos artificialmente aristas al objeto de forma tal que se convierta en un poliedro genuino (uno puede hacer esto fácilmente triangulando las caras), el teorema anterior todavía se aplica. Esta es la razón por la que en el enunciado incluimos la posibilidad de que los vértices tengan grado arbitrario.

El teorema anterior enfatiza una vez más la relevancia de la diferencia de profundidad entre las muescas interiores y exteriores de las varillas. Esto permite producir un defecto angular (después de triangular, de modo que el objeto a la vista sea un poliedro genuino) que, como hemos visto, es necesario para cerrar una estructura esférica. Dado que el defecto angular así producido es muy pequeño, se requiere de un gran número de vértices para completar el ángulo total de  $720^\circ$  predicho por el teorema de Descartes. Esta es la razón por la que se necesita una gran cantidad de aristas.

En el caso de varillas curvas, parte de la ganancia del defecto angular proviene de la curvatura de la varilla. Por supuesto, para hacer de esta una afirmación formal, primero es necesario olvidarse de las varillas teniendo en cuenta sólo los vértices y conectarlos mediante líneas rectas. Haciendo esto, inmediatamente observamos que los vértices correspondientes a la misma varilla están lejos de ser colineales. Esta es la razón por la que se utilizan tan pocas varillas en la escultura de Roelofs. Sin embargo, como veremos en la siguiente sección, la elección cuidadosa de la estructura combinatoria también es crucial.

### §5. Da Vinci se encuentra con Euler: explorando la topología

Aunque ciertas estructuras del tipo Da Vinci pueden cerrarse para formar una estructura esférica, esto es imposible con los once patrones representados anteriormente, así como con todos los patrones que provienen de teselados planos periódicos. La explicación reside en el teorema de Euler y extensiones, como ahora explicamos.

Supongamos que tenemos una estructura esférica y la proyectamos sobre una esfera que la contenga. Obtenemos entonces un grafo esférico con una cierta cantidad de vértices, de curvas que los conectan que denominamos “aristas”, y de regiones limitadas por estas aristas que denominamos “caras”. Denotamos por  $V$ ,  $A$  y  $C$  la cantidad de vértices, aristas y caras, respectivamente. El teorema de Euler establece la igualdad

$$(5.1) \quad V - A + C = 2.$$

En (Aigner y Ziegler, 1998), el lector encontrará una demostración elemental de esta fórmula clásica. Asimismo, puede consultar (Navas, 2019) para encontrar una discusión sobre los diseños sobre esferas y su relación con ella.

Ahora bien, cada uno de los patrones de la sección 3 es periódico, en el sentido de que exhibe simetrías de traslación en dos direcciones independientes. Como consecuencia de resultados topológicos bien conocidos, esto implica que, si cierran una superficie, entonces

$$(5.2) \quad V - A + C = 0,$$

lo cual contradice (5.1).

A continuación presentamos un ejemplo concreto. El siguiente patrón involucra triángulos y dodecágonos (para poder aplicar fórmulas de tipo Euler, necesitamos contar un vértice por cada cruce de varillas). Denotemos por  $T$  y  $D$  la cantidad de triángulos y dodecágonos, respectivamente. Como en cada vértice concurren 3 aristas, tenemos que

$$V = \frac{3T + 12D}{3}.$$

A su vez, cada arista es compartida por dos caras, con lo cual

$$A = \frac{3T + 12D}{2}.$$

Finalmente, el número de caras es la suma del número de triángulos y dodecágonos:

$$C = T + D.$$

Por lo tanto,

$$V - A + C = \frac{3T + 12D}{3} - \frac{3T + 12D}{2} + (T + D) = \frac{T}{2} - D.$$

Ahora bien, observando el patrón puede comprobarse directamente que:

- cada dodecágono está rodeado por seis triángulos,
- cada triángulo está rodeado por tres dodecágonos.

Esto implica que  $T = 2D$ . En consecuencia,

$$V - A + C = \frac{T}{2} - D = 0.$$

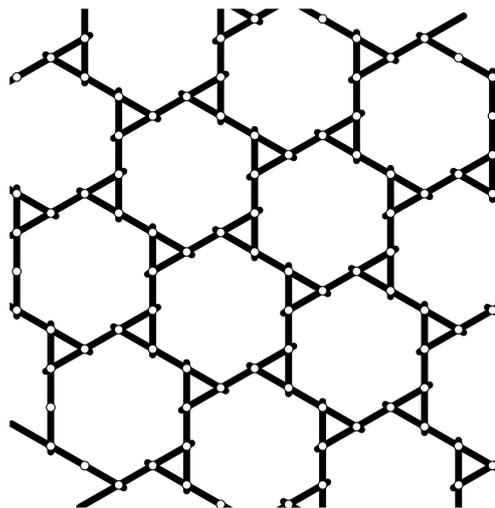


FIGURA 13. La identidad  $V - A + C = 0$  en un ejemplo concreto.

**Una observación técnica.** Es posible demostrar (5.2) para todos los patrones planos anteriores utilizando solamente la fórmula de Euler (5.1) de los teselados esféricos. Esto proviene de que estos patrones producen embaldosados en el toro, para los cuales (5.2) es válido. Grosso modo, la demostración procede de la siguiente manera. Usando las dos direcciones independientes de simetría traslacional, cerramos el patrón para construir un toro. Denotemos nuevamente por  $V$ ,  $A$  y  $C$  la cantidad de vértices, aristas y caras, respectivamente. Volviendo al plano, copiamos los patrones planos  $n$  veces en forma horizontal y vertical, y

denotamos por  $V_n$ ,  $A_n$  y  $C_n$  la cantidad de vértices, aristas y caras que se producen. La estructura no se cierra sólo a lo largo de la frontera. Como esta frontera “crece linealmente”, las diferencias  $|V_n - n^2V|$ ,  $|A_n - n^2A|$  y  $|C_n - n^2C|$  están acotadas por una cantidad que es lineal en  $n$ . Por lo tanto

$$V_n - A_n + C_n = n^2(V - A + C) + O(n).$$

Así, este patrón copiado  $n^2$  veces induce un teselado (no da vinciano) de la esfera agregando una “cara al infinito”. Aplicando la fórmula de Euler (5.1) para teselados esféricos generales obtenemos que

$$V_n - A_n + (C_n + 1) = 2.$$

Por lo tanto,

$$n^2(V - A + C) = O(n).$$

Dividiendo por  $n^2$  y haciendo tender  $n$  a infinito, obtenemos finalmente

$$V - A + C = 0.$$

## §6. Conclusiones

La discusión anterior muestra que para dar con nuevos diseños esféricos de tipo Da Vinci es necesario tener en cuenta no sólo restricciones geométricas, sino también topológicas. El diseño de Roelofs es un ejemplo de esto: se basa en (en realidad, es combinatoriamente equivalente a) un icosaedro truncado. Parece posible utilizar otros diseños clásicos para producir versiones de tipo Da Vinci. Un problema desafiante sería obtener modelos inspirados en diferentes sólidos arquimedianos. Observemos que el diseño de Brederode también surge de una familia conocida de poliedros, a saber, los poliedros de Goldberg.

No hace falta decir que, además de las cuestiones geométricas y topológicas, también es necesario tener en cuenta aspectos físicos de los materiales utilizados para implementar los objetos concretos. Por ejemplo, el ancho de las varillas constituye un problema cuando se ensamblan para producir configuraciones poligonales de un gran número de lados.

Destacamos que nuestras consideraciones no concluyen el estudio de diseños que dan lugar a otros tipos de superficies. La primera demostración del teorema del poliedro se aplica de manera más general a poliedros de tipo cerrados, como por ejemplo los toroidales. Sin embargo, considerar muescas de diferente profundidad podría conducir a estructuras interesantes de este tipo. Notemos que no existe ningún obstáculo combinatorio para que configuraciones planas produzcan estructuras toroidales, ya que un toro se obtiene mediante un método bien conocido de “doblar y pegar una hoja de papel en dos direcciones”. La figura siguiente muestra por ejemplo que el primero de los once embaldosados planos anteriormente discutidos puede implementarse en una superficie de tipo toroidal.

Por supuesto, producir de esta manera un objeto más simétrico y atractivo requiere del trabajo de un artista.



FIGURA 14. One of the eleven plane tilings implemented on a torus.

### Bibliografía

- Aigner, M., y Ziegler, G. M. (1998). *Proofs from the book*. Springer Verlag.
- Brasó, E. (2018). Les cúpules de Leonardo da Vinci. *Noubiaix*, 42, 116–126.
- Carrasco, P., Carvacho, M., y Sánchez, F. (2023). Cúpulas de Da Vinci: la geometría colaborando con otras disciplinas. En J. Huinacahue y D. Soto (Eds.), *Educación Matemática Interdisciplinar en el Aula*. Ediciones UCM.
- Duvernoy, S. (2008). Leonardo and theoretical mathematics. Leonardo da Vinci: architecture and mathematics. *Nexus Netw. J.*, 10(1), 39–49.
- Humenberger, H. (2021). Mathematische Aktivitäten rund um die Leonardo-Brücke. En *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft* (Vol. 45, pp. 67–86).
- Lemmermeyer, F. (2016). Leonardo da Vinci's proof of the Pythagorean theorem. *College Math. J.*, 47(5), 361–364.
- Navas, A. (2019). Une «erreur» géométrique dans la ligue des champions. *Images des Mathématiques, CNRS*.
- Roelofs, R. (2008). Two- and three-dimensional constructions based on Leonardo grids. *Nexus Netw. J.*, 10(1), 17–26.
- Schattschneider, D. (1978). The plane symmetry groups: their recognition and notation. *Amer. Math. Monthly*, 85(6), 439–450.
- Scott, P. (2006). Angle defect and Descartes' theorem. *Australian Mathematics Teacher*, 62(1), 2–4.

Song, P., Fu, C.-W., Goswami, P., Zheng, J., Mitra, N. J., y Cohen-Or, D. (2013). Reciprocal frame structures made easy. *ACM Transactions on Graphics*, 32(Issue 4, 94), 1–13.

NICOLÉ GEYSSEL

UTFSM, El Pinar 36, San Joaquín, Santiago, Chile

(✉) [nicole.geysse@usm.cl](mailto:nicole.geysse@usm.cl)

MARÍA JOSÉ MORENO

PUC, Vicuña Mackena 4860, Macul, Santiago, Chile

(✉) [mmors@uc.cl](mailto:mmors@uc.cl)

ANDRÉS NAVAS

USACH, Alameda 3363, Est. Central, Santiago, Chile

(✉) [andres.navas@usach.cl](mailto:andres.navas@usach.cl)

---

Recibido: 26 de agosto de 2023.

Aceptado: 2 de enero de 2024.

Publicado en línea: 30 de abril de 2024.

---