Revista de Educación Matemática
Volumen 39, N° 1 (2024), páginas 29 – 56
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Aportes para la Enseñanza de la Matemática.

LA COMPLEJIDAD ONTOSEMIÓTICA DE DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS QUE SE PROPONEN EN LA ENTRADA A LA UNIVERSIDAD

Bettina Milanesio y María Elena Markiewicz

Resumen. En este trabajo se abordan aspectos vinculados a la validación de proposiciones matemáticas en la entrada a la universidad. A partir de las dificultades que muestran estudiantes ingresantes para validar deductivamente, realizamos una selección de las primeras prácticas de validación que se presentan en los materiales de trabajo de asignaturas del primer año de la carrera de grado Profesorado en Matemática. Escogimos tres demostraciones, representativas del tipo de prácticas de validación que se promueve en dichos materiales, y las analizamos utilizando herramientas del Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. Esto nos permitió develar la complejidad ontosemiótica de las demostraciones pretendidas y prever conflictos semióticos potenciales que pueden explicar las dificultades de los estudiantes en la comprensión y la realización de las mismas.

abstract. This paper deals with aspects related to the validation of mathematical propositions at university entrance. Based on the difficulties that new students show to validate deductively, we select the first validation practices that are presented in the work materials of first-year subjects of a university degree in the training of mathematics teachers. We chose three demonstrations, representative of the type of validation practices promoted in such materials and analyzed them using tools from the Ontosemiotic Approach to mathematics knowledge and instruction. This allowed us to reveal the ontosemiotic complexity of the planned demonstrations and to anticipate possible semiotic conflicts that may explain the students' difficulties in understanding and performing them.

§1. Introducción

La validación de proposiciones matemáticas es una actividad inherente y fundamental del quehacer matemático. En el contexto educativo, las actividades vinculadas a la validación constituyen una práctica matemática crucial en la que

Palabras clave: validación, demostración matemática, ingreso universidad, enfoque ontosemiótico.
Keywords: validation, mathematical proof, university entrance, ontosemiotic approach.

educadores en matemáticas desearían que los estudiantes se impliquen en los diferentes niveles educativos (Lew y Mejía Ramos, 2019; Weber et al., 2020). Balacheff (2000) define los procesos de validación como la actividad que persigue asegurar la validez de una proposición y, eventualmente "producir una explicación, una prueba o una demostración" (Balacheff, 2000, p. 13). La demostración, en particular, es considerada el tipo de prueba dominante en matemáticas, a partir de la cual se corrobora la veracidad de una proposición mediante argumentos formalizados de tipo deductivos, partiendo de verdades universales y evidentes (Alfaro-Carvajal et al., 2019; Molina y Samper, 2019).

Pese a que el concepto de demostración es imprescindible para la disciplina matemática y para el aprendizaje por parte de los estudiantes, es considerado un concepto difícil de enseñar y de aprender en los diferentes niveles educativos (Montoro, 2007; Selden y Selden, 2008; G. J. Stylianides y Stylianides, 2017; A. J. Stylianides et al., 2022). En nuestra investigación partimos de un problema recurrente vinculado a las dificultades que manifiestan estudiantes que ingresan a la universidad en relación con la posibilidad de validar proposiciones matemáticas y, en particular, de comprender y desarrollar demostraciones (Milanesio et al., 2023; Peparelli et al., 2011). Este problema, que hemos podido vislumbrar en nuestra labor como docentes de asignaturas de primer año del nivel universitario, ha sido reconocido en el ámbito de la Educación Matemática por diversos investigadores (D'Andrea y Sastre, 2013; Godino y Recio, 2001; Gómez-Chacón, 2009; Hernández-Suarez, 2012; Recio, 1999; G. J. Stylianides y Stylianides, 2017; Weber et al., 2020).

Muchas de estas dificultades se adjudican a la existencia de posibles distancias conceptuales entre el nivel secundario y universitario relacionadas a la validación en matemáticas, principalmente a la demostración. Hernández-Suarez (2012) confiere las dificultades que presentan los estudiantes en el ingreso al nivel superior para entender y realizar una demostración a la previa formación de los mismos, ya que, asegura que ingresan al nivel universitario con un bajo nivel de conceptos y deficiencias como el uso incorrecto del lenguaje y la simbología propia de las matemáticas o de las reglas de la lógica. Esto también ha sido reconocido por Lew y Mejía Ramos (2019), quienes aseguran que, en el ingreso al nivel universitario, los estudiantes no se encuentran familiarizados con las convenciones de la escritura de las pruebas matemáticas. Otros autores han evidenciado en el nivel superior que, en general, las demostraciones se presentan en su versión acabada con una imposición excesiva de formalidad, por lo que el proceso llevado a cabo para demostrar no siempre es evidente para el alumnado y puede llevarlo a manifestar ansiedad y frustración para prácticas de este tipo (D'Andrea y Sastre, 2013; Gómez-Chacón, 2009). Incluso, tal como señalan Weber et al. (2020), los estudiantes a menudo salen de clases orientadas a la demostración incapaces de leer o escribir demostraciones o de distinguir buenas demostraciones de argumentos inválidos.

Sin embargo, en todas estas investigaciones no se han analizado las dificultades que los estudiantes enfrentan en la práctica de demostrar teniendo en cuenta la complejidad que reviste la propia demostración matemática. Un avance en esta línea de investigación se llevó a cabo en trabajos donde se intenta poner al descubierto dicha complejidad en términos de los objetos, procesos y relaciones que están involucrados en la actividad matemática desplegada en las demostraciones (Markiewicz y Etchegaray, 2017, 2018; Recio, 1999). Recio (1999), quien reconoce a la demostración como una cadena de relaciones semióticas entre los objetos involucrados, identifica distintos tipos de objetos que se ponen en juego en el desarrollo de cualquier demostración, tales como, notaciones, fenomenologías y elementos conceptuales. Esto le permite evidenciar algunos aspectos que contribuyen a la complejidad ontológica y semiótica de las demostraciones. Más recientemente, Markiewicz y Etchegaray (2017), con el objetivo de mostrar la potencialidad de herramientas del Enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino et al., 2007, 2019) ponen de manifiesto los objetos y procesos implicados en una tarea que involucra una demostración utilizando el Principio de Inducción Matemática, así como también, en un fragmento de clase donde se abordan propiedades de la Teoría de la Divisibilidad. Las autoras sostienen que, develar la complejidad ontosemiótica de este tipo de prácticas de validación, nos permite, como docentes, anticipar acciones tendientes a superar los posibles conflictos que puedan surgir durante los procesos instruccionales. En un trabajo posterior, Markiewicz y Etchegaray (2018), empleando herramientas del EOS, analizan un fragmento de un libro de texto que presenta una demostración matemática en el contexto de la Teoría de la Divisibilidad, evidenciando diversos objetos y procesos involucrados en la actividad matemática desplegada. Las autoras identifican potenciales conflictos semióticos que, junto con las características distintivas de los libros de textos universitarios, aportan explicaciones desde otra perspectiva a las dificultades que enfrentan los estudiantes ante estas prácticas.

Estos antecedentes, sumados a las dificultades manifestadas por estudiantes ingresantes a la Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC) nos llevaron, en una primera instancia, a indagar los procesos de validación que desarrollan estudiantes del último año de escuelas secundarias de la ciudad de Río Cuarto (sexto año, 17-18 años) para poder caracterizarlos y comprender su relatividad contextual (Markiewicz et al., 2021). En este trabajo, empleamos herramientas del EOS para analizar los objetos y procesos que emergen de las prácticas logradas por dichos estudiantes, así como también los niveles de algebrización (Godino et al., 2015) donde se sitúan dichas prácticas y los conflictos semióticos que efectivamente surgen. Los principales resultados muestran que, en general, los estudiantes desarrollan pruebas de tipo pragmáticas que se basan en la acción y en la ostensión, lo cual derivó en el planteo de unas primeras hipótesis acerca de posibles distancias y rupturas entre las prácticas de validación logradas por estos estudiantes respecto de las pretendidas en la entrada a la universidad.

Es por ello que, en esta nueva etapa de la investigación nos propusimos como objetivo profundizar en los significados institucionales pretendidos sobre el tipo de prácticas de validación (más precisamente, la demostración) que se promueve en diversos materiales de trabajo de asignaturas del primer año de la carrera de grado Profesorado en Matemática en la UNRC. Esto con el fin de poner en evidencia la complejidad ontosemiótica de estas prácticas y proveer nuevas interpretaciones de las dificultades de los estudiantes en términos de los objetos y procesos que son necesarios movilizar. Para ello utilizamos herramientas del Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino et al., 2007, 2019) identificando objetos primarios y procesos cognitivos/epistémicos duales presentes en estas prácticas de validación y proporcionando explicaciones a las dificultades de los estudiantes en términos de conflictos semióticos.

Todo esto nos llevó a plantearnos las siguientes preguntas de investigación: ¿Qué objetos y procesos se requieren poner a funcionar en algunas demostraciones que los estudiantes deben comprender y desarrollar en las primeras instancias de asignaturas de primer año de la carrera Profesorado en Matemática? ¿Qué dificultades se pueden prever ante la comprensión y el desarrollo de estas demostraciones por parte de los estudiantes?

En los siguientes apartados hacemos referencia al marco teórico y metodológico de la investigación, explicitamos algunas decisiones tomadas para desarrollar la misma y mostramos los análisis realizados a algunas demostraciones que se pretenden en la entrada a la universidad, esbozando, por último, algunas consideraciones finales.

§2. Marco teórico

El Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos nos aporta diversas herramientas para analizar las prácticas de validación desarrolladas en el nivel superior de educación, por lo que se constituye en el marco teórico y metodológico de este trabajo.

En el EOS (Godino et al., 2007, 2019) se introduce la noción de *práctica matemática* entendida como toda actuación o expresión realizada por alguien para dar solución a problemas matemáticos, comunicarla, validarla o generalizarla, y de *significado* entendido como un emergente de los sistemas de prácticas que se ponen en juego en la solución de dichos problemas por una persona (significado personal) o institución (significado institucional). En particular, en el EOS se distinguen diferentes tipos de significados institucionales, entre ellos, el significado pretendido, el cual es de especial relevancia para este estudio puesto que se corresponde con los sistemas de prácticas incluidas en la planificación de los procesos de estudio.

Estos sistemas de prácticas están constituidos por redes de relaciones en las que intervienen diferentes tipos de *objetos primarios*: situaciones-problemas, procedimientos, conceptos, proposiciones, argumentos y lenguaje. Estos objetos pueden ser considerados, según el juego de lenguaje en el que participan, desde diferentes facetas duales, lo que lleva a la siguiente tipología de *objetos secundarios*: ostensivos (perceptibles, públicos) - no ostensivos (abstractos, ideales); extensivos (particulares) - intensivos (generales); significantes (expresión) - significados (contenido); unitarios (considerados globalmente como un todo) - sistémicos (sistemas formados por distintos componentes); personales (sujetos individuales) - institucionales (compartidos en una institución).

Tanto los objetos primarios como los secundarios se pueden considerar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual permite distinguir tipos de procesos matemáticos primarios y secundarios. En particular, los objetos matemáticos secundarios dan lugar a *procesos cognitivos/epistémicos* duales que se consideran fundamentales en la actividad matemática, entre los que destacamos, a los fines de este trabajo, los siguientes:

- Proceso de materialización-idealización (asociado a la dualidad ostensivo-no ostensivo). Como resultado de un proceso de idealización se pasa de un objeto ostensivo a un objeto no ostensivo, pues los objetos ostensivos pueden ser pensados por un sujeto o estar implícitos en el discurso matemático. En cambio, mediante un proceso de materialización los objetos matemáticos, que en general son no perceptibles, son utilizados en las prácticas públicas a través de sus ostensivos asociados (Font y Contreras, 2008; Font y Rubio, 2017).
- Proceso de particularización-generalización (asociado a la dualidad extensivo-intensivo). Mediante un proceso de particularización se da lugar a un objeto extensivo, entendido como un objeto particular, mientras que, a través de un proceso de generalización se generan objetos intensivos, considerados como una clase o conjunto de objetos (Font y Contreras, 2008). El análisis de un objeto particular ejemplar permite establecer conclusiones sobre un conjunto de objetos mientras que el análisis de un conjunto de objetos permite pensar en el funcionamiento de un caso particular.
- Proceso de descomposición-reificación (vinculado a la dualidad sistémico-unitario). Mediante un proceso de descomposición, un problema global puede descomponerse en problemas elementales, es decir, los objetos que participan como entidades unitarias (que se suponen conocidas previamente) deben ser tratados como sistémicos. Pero, a través de procesos de reificación,

en todo proceso de estudio los conceptos y propiedades emergentes deben ser reificados, es decir, vistos como objetos unitarios a fin de ser utilizados en la resolución de nuevos problemas (Godino et al., 2007).

- Proceso de representación-significación (asociado a la dualidad expresión-contenido). Consistentes en atribuir contenido a una expresión, a través del establecimiento de funciones semióticas entendidas como la correspondencia entre un objeto antecedente (expresión/significante) y otro consecuente (contenido/significado) establecida por un sujeto (persona o institución) según una regla de correspondencia. Los objetos que se ponen en correspondencia en las funciones semióticas pueden ser entidades unitarias o sistémicas, particulares o generales, materiales o inmateriales, personales o institucionales (Godino et al., 2022). Estos procesos son densos en la trama de objetos y procesos que se ponen en juego en la actividad matemática.

Los procesos duales pueden ser fuente de *conflictos semióticos* entendidos desde el EOS como cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones) (Godino et al., 2007), los cuales permiten anticipar y/o explicar las dificultades que podrían surgir (o que efectivamente surgen) en los procesos instruccionales.

§3. Metodología

La metodología adoptada en este trabajo es inherente al EOS. En particular, realizamos un estudio documental e interpretativo de tres demostraciones que se espera que los estudiantes comprendan y desarrollen en la entrada al nivel superior a través de las técnicas de análisis ontosemiótico en sus dos primeros niveles: análisis de objetos primarios y análisis de procesos duales y de conflictos semióticos. Para esto, decidimos recortar la investigación al contexto de las actividades del ingreso[1] a la universidad y a la primera unidad temática, correspondientes a las asignaturas del primer año del Profesorado en Matemática en la UNRC, las cuales son: Cálculo I, Matemática Discreta y Geometría I. Realizamos una recopilación de materiales utilizados durante el año 2021, incluyendo cuadernillos, libros de texto y presentaciones de PowerPoint, los cuales se encuentran disponibles para los estudiantes, y exploramos las primeras prácticas de validación que se promueven en dichos materiales. Cabe aclarar que hemos abocado nuestro estudio únicamente a lo que se propone en los materiales de trabajo, puesto que, no hemos tenido acceso a las clases donde efectivamente se abordaron dichas prácticas. A continuación, explicitamos las decisiones tomadas para la selección de las tres demostraciones que escogimos para su análisis.

[1]El Ingreso a la UNRC (Integración a la Cultura Académica) se desarrolla durante los meses de febrero y marzo durante 4 semanas, con una carga horaria de 6 horas semanales para cada asignatura.

Para la asignatura Cálculo I elegimos una de las primeras prácticas de validación que se presenta en el material del ingreso, particularmente, en el cuadernillo efectuado por los docentes. La misma se corresponde con una demostración matemática que resulta representativa del tipo de prácticas que se promueve en dicho material. Si bien observamos otros tipos de prácticas que fomentan la validación, como por ejemplo, tareas donde se solicita justificar la verdad o falsedad de afirmaciones matemáticas, las mismas son escasas, siendo predominante el trabajo con demostraciones.

En el caso de Matemática Discreta, como en el material del ingreso no hallamos ninguna instancia donde se promueva algún tipo de validación, decidimos explorar las prácticas de validación que se desarrollan en el material de trabajo empleado para la primera unidad temática (libro de texto y trabajos prácticos efectuados por el docente). En dicho material, si bien hallamos algunas tareas que promueven el planteamiento de conjeturas y de argumentaciones que las validen (motivando la puesta en funcionamiento de algún tipo de validación), nuevamente son escasas, siendo predominante el trabajo con demostraciones, por lo que, decidimos escoger una práctica de validación correspondiente a una de las primeras demostraciones que se presentan a los estudiantes.

En el material del ingreso a la asignatura Geometría I (cuadernillo efectuado por los docentes y presentaciones de PowerPoint) se le otorga especial relevancia al método axiomático-deductivo, proponiéndose tareas que promueven diversos procesos de validación, tales como, la búsqueda de regularidades, el tratamiento de la unicidad en matemáticas, el planteamiento de conjeturas y la propuesta de demostraciones. Sin embargo, por no disponer de las resoluciones pretendidas por el docente ante este tipo de tareas, decidimos escoger lo que las docentes denominan "un ejemplo de lo que significa demostrar un teorema en matemáticas" y que presentan a los estudiantes en un PowerPoint que se anexa al material del ingreso.

§4. Resultados

En los apartados que siguen explicitamos brevemente el contexto en el que se plantea la entrada a la validación en cada una de las asignaturas mencionadas en el parágrafo anterior, presentamos tres prácticas de validación donde el alumnado debe enfrentarse a la validación de proposiciones matemáticas y el análisis ontosemiótico que realizamos a las mismas. Esbozamos finalmente algunas conclusiones de estos análisis.

4.1. Práctica de validación en Cálculo I y su análisis ontosemiótico. En el ingreso de Cálculo I, se comienza con la temática de conjuntos numéricos, procediendo, en las primeras páginas del cuadernillo correspondiente (Orquera y Ferreyra, 2022[2]) con el análisis de los distintos tipos de conjuntos numéricos y sus propiedades.

En este material, se observa una práctica de validación cuando se introduce el número $\sqrt{2}$. Se expresa que "no es difícil demostrar que este número no puede ser representado como el cociente de dos números enteros, por lo tanto, no es un número racional" (Orquera y Ferreyra, 2022, p. 11). En este contexto, se propone una demostración de que $\sqrt{2}$ no es un número racional, a la cual denominamos práctica de validación 1 (PV1). Presentamos dicha práctica en la Figura 1.

> Por otro lado, sabemos que $\sqrt{2} = 1{,}41421356237310\cdots$. No es difícil *demostrar* que este número no puede ser representado como el cociente de dos números enteros, por lo tanto, no es un número racional.
>
> Abordaremos la demostración utilizando el concepto de divisibilidad. Si suponemos que $\sqrt{2}$ es racional, entonces deben existir $p, q \in Z$ tal que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$. Podemos asumir que el máximo común divisor entre ellos es 1, es decir, no tienen factores comunes. Si elevamos al cuadrado obtenemos: $2 = \dfrac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$. La última igualdad nos dice que p^2 tiene que ser múltiplo de 2, así $p^2 = 2k$ para algún $k \in Z$. Con esto concluimos que $2q^2 = (2k)^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$, es decir q^2 es múltiplo de 2 y por lo tanto q también lo es (justificar esta última afirmación). Esto nos dice que q y p tienen a 2 como factor común, una contradicción.

Figura 1. Práctica de validación 1 (PV1). Fuente: Orquera y Ferreyra (2022, p. 11)

.

En la Tabla 1 mostramos el análisis ontosemiótico realizado a PV1, identificando, en la primera columna los objetos primarios disponibles y emergentes de la práctica, y en la segunda columna, los procesos duales que son necesarios transitar para comprenderla y realizarla. Estos últimos muestran cómo funcionan las distintas facetas duales de los objetos primarios.

[2]Cabe destacar que en el año 2021 se utilizó este mismo material.

Objetos Primarios	Procesos Duales
Procedimientos. Se supone que $\sqrt{2}$ es un número racional. Se escribe a $\sqrt{2}$ como $\frac{p}{q}$, con p y q enteros (suponiendo que su máximo común divisor es 1). Se elevan al cuadro ambos miembros de la igualdad: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, obteniendo a partir de la aplicación de propiedades: $2q^2 = p^2$. Se concluye que p^2 tiene que ser múltiplo de 2 y se lo escribe como $2k$ con k entero. Aplicando propiedades se obtiene que $q^2 = 2k^2$, concluyendo que q^2 es múltiplo de 2, y, por lo tanto, que q es múltiplo de 2. Se concluye que p y q tienen al 2 como factor común, obteniéndose una contradicción. *Definiciones disponibles.* Conjunto de números enteros; producto, división, potencia de enteros; raíz cuadrada de un entero. Número racional: expresión de la forma $\frac{a}{b}$, con a y b enteros y $b \neq 0$. Máximo común divisor entre dos números. Factor de un número: divisor de dicho número y aquel que puede aparecer en la factorización del número como producto de otros. Múltiplo de 2: aquel número que resulta de multiplicar a 2 por algún número entero. *Proposiciones disponibles* (PD). PD1. Si un número es racional entonces existen dos enteros p y q tal que el número se escribe como $\frac{p}{q}$, donde el máximo común divisor entre p y q es 1. PD2. El máximo común divisor entre dos números es 1 si y sólo si no tienen factores comunes.	*Representación-Significación.* A un número racional se lo significa como el cociente de dos números enteros, con divisor distinto de 0. Se significa a $\frac{p}{q}$ como un cociente de números enteros tales que su máximo común divisor es 1, y a esta última expresión como equivalente a que p y q no tienen factores comunes. Al símbolo lógico $\Rightarrow$ entre dos expresiones lógicas se lo significa como que, si vale la primera expresión (antecedente) entonces también vale la segunda expresión (consecuente), es decir, que el consecuente se deduce del antecedente. A la expresión $2q^2 = p^2$ se la significa como p^2 es múltiplo de 2. Y a q^2 se lo significa como un número entero. A la expresión $q^2 = 2k^2$ se le otorga el significado de que q^2 es múltiplo de 2, y, a k^2 de un número entero. Se significa la expresión "múltiplo de 2" como aquel número entero que tiene al 2 como factor. Se significa la expresión "p y q tienen a 2 como factor común" como una contradicción (se utiliza implícitamente que la misma se origina al haber supuesto que p y q no tenían factores comunes). Se significa al término lógico contradicción como la conjunción entre una proposición y su negación. *Materialización-Idealización.* Se materializa con el ostensivo $\frac{p}{q}$ a un cociente de dos números enteros p y q. Con el ostensivo $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ se evoca la idea de que $\sqrt{2}$ es un número racional. Se materializa la idea de que p^2 s múltiplo de 2 con el ostensivo $p^2 = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

PD3. Si dos números reales son iguales entonces los cuadrados de dichos números son iguales. PD4. Elevar al cuadrado la raíz cuadrada de un natural devuelve como resultado el radicando (en particular, $(\sqrt{2})^2 = 2$). PD5. Propiedad distributiva de la potencia respecto a un cociente y a un producto. PD6. Si se multiplican ambos miembros de una igualdad (de racionales) por otro racional, se mantiene la igualdad. PD7. Existencia del inverso multiplicativo en $\mathbb{Q}$ y del neutro (1) para la multiplicación. PD8. Dado q entero, si q^2 es múltiplo de 2 entonces q es múltiplo de 2.[4] PD9. Como p y q son múltiplos de 2 entonces y tienen al 2 como factor común. *Proposición emergente.* $\sqrt{2}$ no es un número racional.	*Particularización-Generalización.* Se utilizan propiedades generales en casos particulares, como por ejemplo, la propiedad: $\forall x, y \in \mathbb{R}$: Si $x = y$ entonces $x^2 = y^2$ se particulariza para $x = \sqrt{2}$ para $y = \frac{p}{q}$[3]. *Descomposición-Reificación.* Se necesita reificar lo realizado en todos los pasos para dar emergencia a la demostración por el absurdo para validar la propiedad general: suponer lo contrario a la proposición que se quiere demostrar, obtener una contradicción y concluir que vale la proposición original.
Lenguaje. Si bien hay indicios de lenguaje coloquial y simbólico aritmético, se observa que prevalece un lenguaje simbólico algebraico.	
Argumentos (emergentes). El argumento se corresponde con una demostración indirecta e informal. Indirecta, pues se emplea el método del absurdo para justificar la afirmación, e informal pues se utilizan implícitamente algunas propiedades (por ejemplo, PD4) y reglas lógicas que se ponen a funcionar, predominantemente la regla lógica del absurdo[5]: en este caso, se supone que $\sqrt{2}$ es un racional de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q no tienen factores comunes. Aplicando definiciones y propiedades se obtiene que p y q tienen al 2 como factor común, lo que representa una contradicción a la suposición planteada. Por lo tanto, se concluye que $\sqrt{2}$ no es un racional.	

Tabla 1

El análisis realizado de objetos y procesos (Tabla 1) nos permitió identificar algunos de los principales conflictos semióticos potenciales asociados a PV1, los cuales mencionamos a continuación.

- Dificultades para reconocer en el ostensivo $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ la idea de que $\sqrt{2}$ es un número racional (conflicto ligado al proceso de materialización-idealización).
- Conflictos para significar la expresión $\frac{p}{q}$ omo un cociente de números enteros tal que su máximo común divisor es 1, y a esto último como equivalente a que p y q no tienen factores comunes (conflicto asociado al proceso de representación-significación).
- Dificultades en el pasaje de la expresión $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ a la expresión $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ a la expresión $2 = \frac{p^2}{q^2}$, en relación a la posibilidad de significar la última expresión como consecuencia de la aplicación de propiedades en la primera, y de especializar esas propiedades generales para los reales, en casos particulares, por ejemplo, la propiedad $\forall x, y \in \mathbb{R}$: si $x = y$ entonces $x^2 = y^2$ para $x = \sqrt{2}$ e $y = \frac{p}{q}$ (conflictos ligados a los procesos de representación-significación y de particularización-generalización).
- La expresión $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$ podría generar conflictos asociados al proceso de representación-significación, al significar la misma en términos de que el consecuente se deduce del antecedente como resultado de la aplicación de ciertas propiedades.
- Desajustes entre el contenido otorgado a la expresión $2 = \frac{q^2}{p^2}$ y el contenido esperado, más específicamente, dificultades para reconocer en dicho ostensivo la idea de que p^2 se escribe como 2 por un número entero y, por ende, que p^2 es múltiplo de 2 (conflicto ligado a los procesos representación-significación y de materialización-idealización).
- La expresión $2q^2 = (2k)^2$ podría generar conflictos asociados al proceso de representación-significación, ya que, se pueden manifestar posibles disparidades entre el significado dado y el pretendido: ser una expresión equivalente

[3]Se utiliza implícitamente la regla lógica de eliminación del generalizador:
Para todo x: $P(x)$

$$\frac{\text{Para todo } x\text{: } P(x)}{P(a)}$$

y el modus ponens.

[4]La forma de validar esta propiedad exige, a su vez, una demostración indirecta por contrarrecíproca: Dado q entero, si q no es múltiplo de 2 entonces q^2 no es múltiplo de 2.

[5]p

...

q y $\neg q$

$$\overline{\neg p}$$

a $2q^2 = p^2$, donde se ha reemplazado p por $2k$ (se utiliza implícitamente que, al ser p^2 múltiplo de 2 entonces p también lo es).

- La implicación $2q^2 = (2k)^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$ puede ser fuente de conflictos asociados a este mismo proceso, debido a posibles desajustes en el otorgamiento de significado al consecuente de la misma como resultado de la aplicación, en el antecedente, de propiedades que se utilizan implícitamente. Además, pueden preverse dificultades para otorgar al consecuente el contenido de que q^2 es múltiplo de 2.
- Al no explicitarse que p también debe ser múltiplo de 2, se podría generar un conflicto asociado al proceso de representación-significación al otorgarle contenido a la expresión "q y p tienen a 2 como factor común". También al significar esta última como una contradicción (conjunción de una proposición: p y q no tienen factores comunes -salvo el 1- y su negación: p y q tienen un factor común distinto de 1).
- Conflictos ligados al proceso de descomposición-reificación relacionados con la estructura de la demostración, vinculado con dificultades para unificar lo realizado en los distintos pasos: suponer lo contrario a la proposición que se quiere demostrar, obtener una contradicción, y concluir por regla lógica del absurdo que vale la proposición original. Este tipo de razonamiento se encuentra, en parte, implícito en el escrito.

Si pensamos que la práctica la debe efectuar un estudiante, se podrían, además, anticipar conflictos ligados fundamentalmente al proceso de idealización-materialización, dado que es necesario recurrir a ostensivos adecuados para materializar ciertas ideas que surgen en la realización de la práctica, por ejemplo, evocar la idea de que $\sqrt{2}$ es racional con un ostensivo como $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

4.2. Práctica de validación en Matemática Discreta y su análisis ontosemiótico.

En el cuadernillo de ingreso de Matemática Discreta (Konic et al., 2021) se trabajan algunos aspectos de lógica proposicional. En el mismo, se reconoce la importancia del razonamiento lógico para la demostración de teoremas, y, en tal sentido, se aborda el significado de los símbolos lógicos $(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$ y los valores de verdad de las proposiciones compuestas. También se trabaja la recíproca y la contrarrecíproca de una proposición condicional, tautologías, contradicciones y algunas equivalencias lógicas, por ejemplo, $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$. Se introducen los cuantificadores $\forall$ y $\exists$. Sin embargo, no se advierten, en este material, instancias de validación de proposiciones matemáticas, por lo que hemos decidido indagar la primera unidad de la asignatura propiamente dicha.

Para el desarrollo de la asignatura se siguen las lecciones del libro de González-Gutiérrez (2004). En la primera unidad se desarrolla la temática conjuntos, abordándose relaciones y operaciones entre estos, así como también, demostraciones de leyes que satisfacen. En este contexto, una de las primeras propiedades que se demuestran es la propiedad distributiva de la unión respecto de la intersección de conjuntos: práctica de validación 2 (PV2), la cual presentamos en la Figura 2.

Dados tres conjuntos A, B y C de un conjunto universal arbitrario, $\mathscr{U}$, se verifica:

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Demostración

En efecto,

1. En efecto, sea x cualquier elemento del conjunto universal $\mathscr{U}$, entonces

$$\begin{aligned}
x \in A \cup (B \cap C) &\iff x \in A \ \vee \ [x \in (B \cap C)] && \{\text{Definición de unión}\} \\
&\iff x \in A \ \vee \ (x \in B \ \wedge \ x \in C) && \{\text{Definición de intersección}\} \\
&\iff (x \in A \ \vee \ x \in B) \ \wedge \ (x \in A \ \vee \ x \in C) && \{\text{Distributividad}\} \\
&\iff x \in (A \cup B) \ \wedge \ x \in (A \cup C) && \{\text{Definición de unión}\} \\
&\iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) && \{\text{Definición de intersección}\}
\end{aligned}$$

Al ser x cualquier elemento de $\mathscr{U}$, se sigue que

$$\forall x \, [x \in A \cup (B \cap C) \iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)]$$

consecuentemente,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

FIGURA 2. Práctica de validación 2 (PV2). Fuente: González-Gutiérrez (2004, p. 21).

En la Tabla 2 se muestra el análisis ontosemiótico de objetos y procesos efectuado para la práctica de validación 2.

Objetos Primarios	Procesos Duales
Procedimientos. Se toma un x arbitrario perteneciente al conjunto universal. Se parte de la expresión: $x \in A \cup (B \cap C)$ y se plantean expresiones equivalentes: $x \in A \vee [x \in (B \cap C)]$, $x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$, $(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$, $x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)$.	*Representación-Significación.* A la expresión $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ se le otorga el significado de que, dado cualquier elemento, el mismo pertenece al primer conjunto si y sólo si pertenece al segundo conjunto. A expresiones como $A \cup (B \cap C)$ se la significa como un conjunto que es la unión entre otros dos: A y $B \cap C$.

Se obtiene la expresión:
$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Se expresa que al ser x un elemento cualquiera de U, vale $\forall x(x \in A \cup (B \cap C) \leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C))$, y por lo tanto vale: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Definiciones disponibles
Conjunto. Conjunto Universal. Igualdad entre conjuntos: dos conjuntos son iguales si para todo elemento x, x pertenece al primer conjunto si y sólo si x pertenece al segundo.
Operaciones entre conjuntos: unión($x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$) e intersección ($x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$).

Proposición disponible.
Distributividad de la disyunción respecto a la conjunción.
Proposiciones emergentes (PE).
PE1. $\forall x[x \in A \cup (B \cap C) \leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)]$
PE2. Sean A, B y C conjuntos del conjunto universal: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Lenguaje. Predominantemente simbólico lógico y algebraico.

Argumentos.
Se argumenta a partir de tomar un x arbitrario del conjunto universal que pertenece al conjunto $A \cup (B \cap C)$, y planteando equivalencias, mediante el uso de definiciones y reglas lógicas (como la distributividad de la disyunción respecto de la conjunción) se deduce que este elemento pertenece al conjunto $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Se deduce (de manera implícita) que $x \in A \cup (B \cap C) \leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ por regla lógica de transitividad del bicondicional.

Se significa a la expresión $x \in A \cup (B \cap C)$ como: un elemento cualquiera pertenece a la unión de dos conjuntos, es decir pertenece al primero (A) o al segundo ($B \cap C$).
A la expresión $x \in A \vee [x \in (B \cap C)]$ se le otorga el contenido de una disyunción entre dos proposiciones: $x \in A$ y $x \in (B \cap C)$), y a esta última se la significa como que pertenece a una intersección, es decir, a ambos conjuntos.
Se significa a la expresión $x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$ como una disyunción entre dos proposiciones donde una es una conjunción.
A la expresión $x \in A \vee x \in B$ se le otorga el contenido de que $x \in (A \cup B)$.
Se significa a la expresión $x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)$ como: el elemento x pertenece tanto al conjunto $A \cup B$ como al conjunto $A \cup C$ (y por ende, a la intersección de ambos).
A la expresión $\forall x : (x \in A \cup (B \cap C) \leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C))$ se le otorga el contenido de que los conjuntos $A \cup (B \cap C)$ y $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ son iguales.

Materialización-Idealización.
Los ostensivos A, B y C materializan tres conjuntos particulares arbitrarios.
Se materializa con el ostensivo x un elemento particular arbitrario del conjunto universal.
El ostensivo $\forall x : (x \in A \cup (B \cap C) \leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C))$ evoca la idea de que los conjuntos $A \cup (B \cap C)$ y $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ son iguales.
El ostensivo $A \cup (B \cap C)$ (por ejemplo) evoca la unión de los conjuntos A y $B \cap C$.

Por último, se concluye que, al ser x cualquier elemento del conjunto universal entonces el bicondicional vale para todo elemento (utilizando implícitamente la regla de introducción del generalizador[6]). De ello se deduce que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (a través de la definición de igualdad de conjuntos) y se generaliza la propiedad para tres conjuntos cualesquiera (por introducción del generalizador). Así, los argumentos corresponden a una demostración directa, con cierto grado de formalidad, aunque se utilizan implícitamente algunas reglas lógicas como las mencionadas (introducción del generalizador o transitividad del bicondicional).	Con el ostensivo $x \in A \cup (B \cap C)$ se materializa que el elemento x pertenece a la unión entre dos conjuntos (A y $B \cap C$). El ostensivo $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ remite a la idea de que el elemento arbitrario x pertenece a una intersección de dos conjuntos ($A \cup B$ y $A \cup C$), es decir, pertenece a ambos. *Particularización-Generalización.* Se parte de tres conjuntos A, B y C particulares arbitrarios y se generaliza para todo conjunto. Se parte de un x particular arbitrario perteneciente al conjunto universal y se generaliza la propiedad para todo elemento del conjunto universal. *Descomposición-Reificación.* Se necesita reconocer a ciertos objetos como un todo unitario, por ejemplo, al conjunto $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ como la intersección de dos conjuntos, que son a su vez, uniones de otros dos. Se necesita reificar lo realizado en todos los pasos de esta práctica para dar emergencia a una demostración de una igualdad de conjuntos.

Tabla 2

Describimos a continuación algunos de los conflictos semióticos potenciales que anticipamos a partir del análisis realizado en la Tabla 2.

- Dificultades para reconocer en el ostensivo x un elemento particular arbitrario del conjunto universal. De igual manera, dificultades para reconocer en los conjuntos A, B y C tres conjuntos particulares pero arbitrarios.
- Disparidades entre el significado otorgado a la expresión $A \cup (B \cap C)$ y el significado pretendido. Más específicamente, se pueden prever conflictos para reconocer la unión de dos conjuntos donde uno de ellos es a su vez, la intersección de otros dos. Lo mismo sucede con ostensivos tales como $B \cap C$, $A \cup B$, $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

[6] $P(a)$
Luego, $\forall x P(x)$(siempre que a sea un elemento arbitrario).

- Desajustes entre el significado otorgado a expresiones como $x \in A \cup (B \cap C)$ o $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, y el significado pretendido. Más precisamente, dificultades al relacionar el primer ostensivo con la idea de que un elemento particular arbitrario pertenece a la unión de dos conjuntos (A y $B \cap C$), es decir, pertenece a uno o al otro; y al segundo ostensivo con la idea de que este elemento pertenece a una intersección de dos conjuntos ($A \cup B$ y $A \cup C$), es decir, pertenece a ambos conjuntos.
- Posibles disparidades entre el contenido dado a expresiones como $x \in A \vee x \in (B \cap C)$ y el pretendido. Más puntualmente, dificultades para reconocer en dicho ostensivo la disyunción entre dos proposiciones: $x \in A$ y $x \in (B \cap C)$, o, por ejemplo, en $(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$ una conjunción entre dos proposiciones que son disyunciones.
- Desajustes entre el contenido otorgado a la expresión $\forall x : (x \in A \cup (B \cap C) \leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C))$, y el pretendido, más precisamente, se pueden anticipar dificultades para reconocer en ese ostensivo que los conjuntos $A \cup (B \cap C)$ y $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ son iguales.
- Otro conflicto está ligado con la posibilidad de generalizar la propiedad a partir de haberla probado para tres conjuntos particulares arbitrarios y para un elemento particular arbitrario del conjunto universal.
- En la demostración para $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ se podrían generar conflictos vinculados con la reificación de lo realizado en los distintos pasos, ya que, se requiere comprender la cadena de bi-implicaciones que se desarrolla, lo que se logra demostrar con eso, por qué se puede generalizar y por qué eso permite demostrar la igualdad de los conjuntos.

Tal como mencionamos en el análisis de PV1, si se piensa en la realización de esta práctica por parte de los estudiantes, se pueden sumar otros conflictos ligados, fundamentalmente, al proceso de idealización-materialización, ya que, por ejemplo, es necesario recurrir a un ostensivo adecuado (como x) para evocar un elemento particular arbitrario del conjunto universal, o materializar con el ostensivo $\forall x : (x \in A \cup (B \cap C) \leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C))$ la idea de que los conjuntos $A \cup (B \cap C)$ y $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ son iguales, entre otros.

4.3. Práctica de validación en Geometría I y su análisis ontosemiótico. En el cuadernillo de ingreso de Geometría (Elguero et al., 2021) se indaga sobre las relaciones y diferencias entre los objetos geométricos (puntos, rectas, figuras planas) y perceptibles. Se trabajan las definiciones de rectas, semirrectas, segmentos, ángulos, tipos de ángulos y medición de ángulos. En este contexto, se plantean tareas sobre cálculos de medidas desconocidas de ángulos, con el objetivo de que los estudiantes las resuelvan poniendo a funcionar definiciones y propiedades trabajadas, sin usar instrumentos de medición. El objetivo que se proponen es introducir al estudiantado en un razonamiento deductivo, ya que, se explicita que dichas tareas permiten la obtención de un resultado a partir del empleo de propiedades de las figuras.

Se definen así los axiomas, un sistema axiomático y los teoremas. En particular, se propone, en una de las primeras presentaciones de PowerPoint expuesta en el ingreso, un ejemplo de lo que sería una demostración de un teorema, la demostración de que la medida de un ángulo exterior en un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes a él. A esta práctica la denominamos práctica de validación 3 (PV3) y la presentamos en la Figura 3.

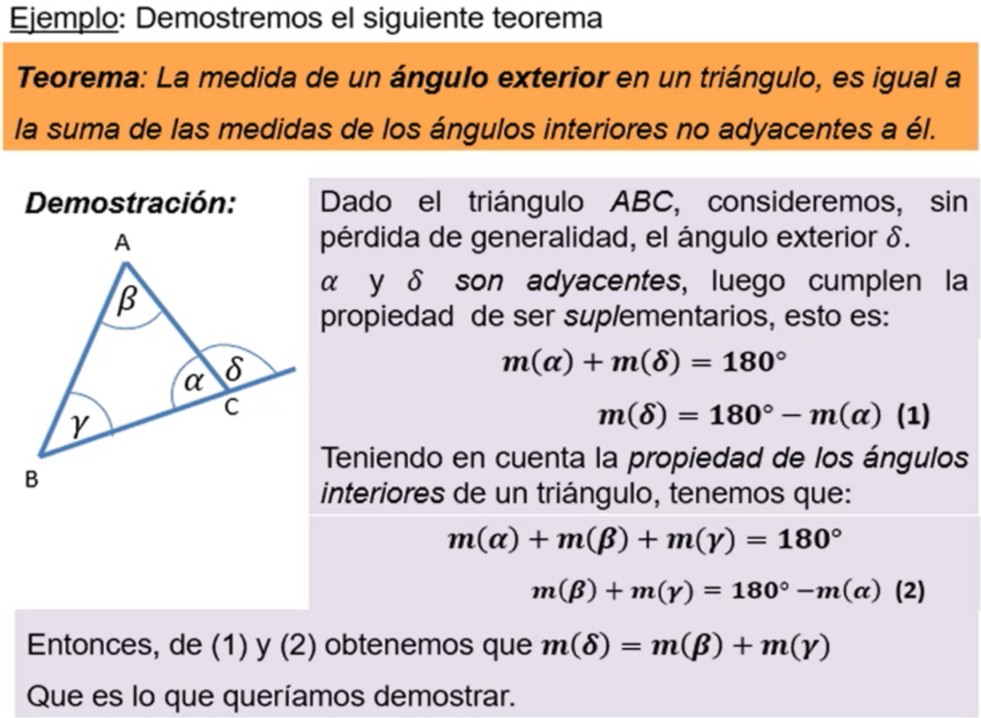

FIGURA 3. Práctica de validación 3 (PV3). Fuente: Elguero et al. (2021).

En la Tabla 3 mostramos el análisis ontosemiótico realizado a PV3 explicitando los objetos y procesos que son necesarios movilizar para la comprensión y el desarrollo de esta práctica.

Objetos Primarios	Procesos Duales
Procedimientos. Se realiza un dibujo de un triángulo en el cual se marcan sus ángulos interiores y se los denota con α, β y γ. Se considera un ángulo exterior cualquiera δ adyacente a uno de los ángulos interiores: α.	*Representación-Significación.* Es necesario significar al enunciado como una doble generalización: para todo triángulo y para todo ángulo exterior del triángulo, su medida es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes a él.

Se deduce que α y δ son suplementarios y se expresa que: $m(\alpha) + m(\delta) = 180°$.
Se reescribe la igualdad anterior como: $m(\delta) = 180° - m(\alpha)$.
Se expresa que: $m(\alpha) + m(\beta) + m(\gamma) = 180°$.
Se reescribe la igualdad anterior como: $m(\beta) + m(\gamma) = 180° - m(\alpha)$.
Se deduce que $m(\delta) = m(\beta) + m(\gamma)$

Definiciones disponibles.
Triángulo.
Ángulos exteriores e interiores de un triángulo.
Ángulos suplementarios: aquellos en que la suma de sus medidas es $180°$.
Ángulos adyacentes: aquellos que tienen un lado en común y los otros lados son semirrectas opuestas.

Proposiciones disponibles (PD).
PD1. Si dos ángulos son adyacentes entonces son suplementarios.
PD2. Existencia del elemento neutro de la suma.
PD3. Existencia del elemento inverso aditivo en el conjunto de los números enteros.
PD4. La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es $180°$.
PD5. Transitividad de la igualdad.
Proposición emergente.
La medida de un ángulo exterior en un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes a él.

Lenguaje.
Si bien hay indicios de lenguaje coloquial y gráfico, predomina un lenguaje de tipo simbólico algebraico.

Argumentos.
Se argumenta a través de una demostración directa e informal.

Al dibujo se lo significa como el ostensivo de la figura geométrica: triángulo con sus ángulos interiores y un ángulo exterior a uno de ellos.
Se significa a la expresión “ α y δ son adyacentes” como: α y δ tienen un lado en común y los otros lados son semirrectas opuestas. A la expresión “ángulos suplementarios” se le da el significado de aquellos ángulos cuyas medidas suman $180°$.
A la expresión $m(\alpha) + m(\delta) = 180°$ se la significa como: la suma de las medidas de α y δ es $180°$.
A la expresión $m(\delta) = m(\beta) + m(\gamma)$ se le otorga el significado de que, la medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes a él.

Materialización-Idealización.
Se materializa a través de un dibujo, la representación de un objeto ideal (un triángulo con los ángulos interiores y un ángulo exterior adyacente a uno de ellos).
Se materializa a través del dibujo el ángulo exterior a uno de los ángulos interiores extendiendo la recta BC, marcando el arco y evocándolo con una letra.
Con los ostensivos α, β y γ se materializa los tres ángulos interiores del triángulo ABC. Se materializa con el ostensivo δ el ángulo exterior del triángulo ABC, adyacente a α.
El ostensivo $m(\alpha)$ remite la medida de un ángulo α.
Con el ostensivo $m(\alpha) + m(\delta) = 180°$ se evoca que los ángulos α y δ son suplementarios.
Con el ostensivo $m(\alpha) + m(\beta) + m(\gamma) = 180°$ se materializa la propiedad de que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es igual a $180°$.
Con el ostensivo $m(\delta) = m(\beta) + m(\gamma)$ se evoca la idea de que, la medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la

Se considera un triángulo particular arbitrario con ángulos α, β y γ, y un ángulo exterior a α. Apoyándose en el dibujo, se deduce que α y δ son adyacentes, y por PD1, que son suplementarios: $m(\delta) + m(\alpha) = 180°$. Por otro lado, utilizando PD4 se deduce que $m(\alpha) + m(\beta) + m(\gamma) = 180°$. Mediante el uso de propiedades que permiten transformar ambas igualdades en otras equivalentes se llega a la expresión: $m(\delta) = m(\beta) + m(\gamma)$. Implícitamente se utiliza la regla de introducción del generalizador para asegurar que esto vale para cualquier ángulo exterior y cualquier triángulo.	suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes. *Particularización-Generalización.* Se parte de un triángulo particular arbitrario y se generaliza para todo triángulo y de un ángulo exterior particular arbitrario y se generaliza para cualquier ángulo exterior del triángulo. *Descomposición-reificación.* El dibujo, que interviene como un todo unitario, debe ser descompuesto en diferentes elementos (triángulo, ángulos interiores, semirrectas, ángulo exterior al triángulo). Se necesita reificar el lenguaje gráfico con el lenguaje coloquial y simbólico algebraico para dar emergencia a la demostración del teorema.

Tabla 3

Describimos a continuación algunos conflictos semióticos potenciales identificados a partir del análisis realizado a PV3 (Tabla 3).

- Dificultades para significar el enunciado como una doble generalización: para cualquier triángulo y para cualquier ángulo exterior al mismo, su medida es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes al ángulo exterior.
- Dificultad para reconocer en el ostensivo $m(\alpha)$ la medida de un ángulo α.
- Disparidades en el otorgamiento de significado a la expresión $m(\alpha)+m(\delta) = 180°$ en relación con el significado pretendido, más específicamente, dificultades para reconocer en dicho ostensivo que la suma de las medidas de α y δ es $180°$. Algo similar puede ocurrir con el ostensivo $m(\alpha)+m(\beta)+m(\gamma) = 180°$.
- Otro potencial conflicto puede estar vinculado con el pasaje de la expresión $m(\alpha)+m(\delta) = 180°$ a la expresión $m(\delta) = 180° - m(\alpha)$ en el sentido de tener que otorgar significado a la segunda expresión, como consecuencia de la aplicación de propiedades en la primera que se utilizan implícitamente. Lo mismo podría suceder con el pasaje de la expresión $m(\alpha) + m(\beta) + m(\gamma) = 180°$ a la expresión $m(\beta) + m(\gamma) = 180° - m(\alpha)$.
- Desajustes en el significado otorgado a la expresión $m(\delta) = m(\beta) + m(\gamma)$, y más precisamente, dificultades para reconocer que la medida de un ángulo

exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes a él.

- Dificultades para reconocer en el dibujo el ángulo δ como adyacente a α.
- Otro conflicto puede asociarse a la posibilidad de generalizar la propiedad a partir de haberla probado para un triángulo y un ángulo exterior particulares pero arbitrarios.
- Otros conflictos podrían surgir para unificar el dibujo (lenguaje gráfico) con lo planteado en lenguaje simbólico algebraico para dar emergencia a la demostración del teorema.
- Dificultades para comprender que el dibujo interviene como un todo que debe ser descompuesto en diferentes elementos para su respectivo análisis: ángulos interiores del triángulo, semirrectas, ángulo exterior al triángulo.

Nuevamente, si pensamos que la práctica la tiene que realizar efectivamente el alumnado, a los ya mencionados pueden agregarse conflictos vinculados al proceso de idealización-materialización, tales como, dificultades para materializar con el dibujo la representación de un objeto ideal (triángulo con los ángulos interiores y un ángulo exterior adyacente a uno de ellos), o para recurrir a ostensivos (por ejemplo α, β y γ) para evocar tres ángulos interiores del triángulo ABC, entre otros.

4.4. Conclusiones de los análisis. Los análisis realizados a estas prácticas de validación ponen en evidencia que:

- Se debe tener disponible una gran variedad de objetos primarios.

  Particularmente, en las prácticas se ponen a funcionar procedimientos o acciones que están en estrecha relación con los argumentos y que, en muchos casos, no son anticipados en los cuadernillos o textos, por ejemplo, en la PV1, se supone que $\sqrt{2}$ es un número racional y se ponen a funcionar ciertos procedimientos, sin hacer referencia a que se intenta suponer una proposición, para deducir a partir de ella una contradicción y poder asegurar que dicha proposición no vale.

  Para comprender y realizar cada práctica, es necesario que los estudiantes tengan disponible diversas definiciones y propiedades, algunas de las cuales se utilizan implícitamente en los textos, tal es el caso, por ejemplo, de la siguiente propiedad en la PV1: si dos números reales son iguales entonces los cuadrados de dichos números son iguales; o de la definición de igualdad de conjuntos no explicitada desde el comienzo en la PV2.

  Los argumentos se desarrollan de acuerdo con la forma lógica de los enunciados de las proposiciones que son necesarias validar, algunos de los cuales incluyen, por ejemplo, una doble generalización (en la PV3), lo que da cuenta de su complejidad. El tipo de argumento desarrollado se corresponde, en todos los casos, con demostraciones informales (directas e indirectas), puesto que la mayoría de las propiedades, reglas lógicas y métodos de demostración se utilizan de manera implícita en los textos analizados. Por ejemplo, en la PV1 no se hace explícita la forma que se emplea para argumentar (método del absurdo).

Si bien en algunas de las prácticas hay indicios de lenguaje coloquial, gráfico y simbólico aritmético, el lenguaje que las regula es de tipo simbólico algebraico.

- Para comprender y desarrollar estas prácticas, se deben transitar por diversos procesos duales.

  Uno de los procesos fundamentales es el proceso de representación-significación, el cual se manifiesta, por un lado, en la necesidad de otorgar significado a ciertos términos lógicos que aparecen en las proposiciones que hay que validar o en las prácticas mismas, por ejemplo, en la PV1 otorgar significado al condicional $\Rightarrow$ y al término contradicción como una proposición falsa (conjunción de una proposición y su negación), o al bicondicional $\Leftrightarrow$ en la PV2. Por otra parte, también es necesario otorgarles contenido a ciertas expresiones matemáticas, por ejemplo, en la PV1 es necesario significar la expresión $2q^2 = p^2$ como p^2 es múltiplo de 2, o en la PV2 a la igualdad entre conjuntos. En la PV3, además, es necesario significar a los dibujos como una representación ostensiva de las figuras que son objetos teóricos o ideales.

  También se hace necesario transitar por procesos de materialización-idealización, dado que, para avanzar es necesario reconocer en ciertos ostensivos las ideas que se movilizan, por ejemplo, en la PV1 reconocer los objetos no ostensivos que se movilizan en la expresión $2q^2 = (2k)^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$. Pero también, si se piensa en la realización efectiva de las prácticas por parte de un estudiante, es necesario transitar por procesos de idealización-materialización, ya que, se deben evocar ciertas ideas con los ostensivos adecuados, por ejemplo, en la PV2, es necesario materializar un elemento cualquiera del primer conjunto con un ostensivo como x.

  Son fundamentales los procesos de particularización-generalización, principalmente al generalizar la validez de las proposiciones a partir de probarlas para elementos particulares arbitrarios (en la PV2, por ejemplo, se parte de un elemento x particular arbitrario y se generaliza para todo x), así como utilizar propiedades generales en casos particulares.

  Es necesario también transitar procesos de descomposición-reificación, dado que en las prácticas es esencial, por un lado, reconocer algunos objetos como un todo unitario y, por otro, poner en relación todos los pasos llevados a cabo para comprender la emergencia de un tipo de validación, por ejemplo, poner en relación todos los pasos realizados en la PV1 y unificarlos para comprender el funcionamiento del método del absurdo.

- La forma de avanzar en estos procesos duales puede ser fuente de conflictos semióticos potenciales, vinculados a posibles disparidades entre significados otorgados a ciertas expresiones matemáticas y símbolos lógicos respecto de los significados pretendidos; dificultades para reconocer en ciertos ostensivos los objetos no ostensivos que se movilizan, así como también para utilizar ostensivos adecuados al evocar objetos no ostensivos; dificultades para generalizar las proposiciones a partir de haberlas probado para objetos particulares arbitrarios, y también, al tener que particularizar propiedades generales; ausencia de reificación a partir de un tratamiento sistémico de cada uno de los pasos propuestos en las prácticas y posibles dificultades para considerar determinados objetos como un todo unitario que debe ser descompuesto en diferentes elementos para su análisis.

§5. Consideraciones finales

La exploración y el análisis de algunas de las primeras demostraciones que se promueven en los materiales del ingreso a la carrera de grado Profesorado en Matemática en la universidad donde tiene lugar nuestra labor como docentes, nos permitió detectar algunos conflictos semióticos potenciales que aportan explicaciones y posibilitan gestionar algunas de las dificultades efectivas que manifiestan los estudiantes para comprender y realizar demostraciones, teniendo en cuenta la variedad de objetos que son necesarios tener disponibles y los procesos que se deberían transitar. Además, este estudio confirma las hipótesis iniciales sobre posibles distancias entre las prácticas de validación logradas por estudiantes del último año del nivel secundario, estudiadas y analizadas en Markiewicz et al. (2021), respecto de las que se promueven en el nivel superior, así como también, comprender desde otra perspectiva esta distancia. Así mismo, nos lleva a cuestionarnos ¿cómo articular los modos de validación que el alumnado trae de la escuela secundaria con este tipo de pruebas que exigen un manejo formal y funcional del método deductivo, como lo son las demostraciones?

Consideramos que es necesario generar una actividad matemática más amplia que incluya la generación y refinamiento de conjeturas y la producción de argumentos para estas conjeturas que no necesariamente califiquen como demostraciones, pero que pueden llegar a aportar elementos para idear las mismas (A. Stylianides et al., 2016). El trabajo sobre otros tipos de pruebas que tienen una función más explicativa (Balacheff, 2000; Hanna, 2000) podrían favorecer la comprensión por parte de los estudiantes (Fiallo, 2013) y actuar de bisagra entre las pruebas pragmáticas logradas y las demostraciones pretendidas, apuntando así a una continuidad cognitiva entre la argumentación y la demostración (Boero, 2007; Pedemonte, 2005). Ejemplo de estos tipos de pruebas son las pruebas intelectuales a las que refiere Balacheff (2000), particularmente, las pruebas de tipo ejemplo genérico, cuando se intentan explicar las razones de validez de una aserción realizando transformaciones sobre un objeto representante de una determinada clase, sirviendo como medio para mostrar la prueba, o también, la experiencia mental, que se centra en la acción, interiorizándola y separándola de su ejecución sobre un representante en particular y basándose en el uso de propiedades y relaciones entre los objetos. Otro ejemplo son las fundamentaciones, tales como las concibe Duarte (2010), las cuales se apoyan en el valor explicativo de los argumentos, por encima del formalismo, admitiendo así, un lenguaje familiar.

La complejidad ontosemiótica y lógica de las demostraciones esperadas en el nivel superior y los conflictos semióticos potenciales puestos en evidencia en este trabajo, tensionan, de algún modo, la idea de una continuidad cognitiva entre la argumentación y la demostración (Boero et al., 1996) y son aspectos a tener en cuenta cuando se piensa en la entrada a la validación en la universidad. En este contexto, se hace imprescindible flexibilizar el concepto riguroso y absoluto de demostración, ya que, una visión estrecha de la demostración no refleja la realidad en la práctica matemática educativa (Hanna y de Villiers, 2012; Montoro, 2007). Pero también es fundamental conocer y ser conscientes de la complejidad ontológica, semiótica y lógica de este tipo de prácticas y de los conflictos semióticos que puedan generarse en la práctica, y, en este sentido, este estudio pone de manifiesto algunos aspectos que son necesarios movilizar (objetos y procesos) para poder comprender y construir las demostraciones pretendidas.

Así, este trabajo ayuda a problematizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la demostración, pero también marca la necesidad de hacerse cargo de esta problemática, tanto desde la escuela secundaria, como por parte de quienes estamos a cargo de regular el conocimiento en el nivel de educación superior, más aún en el Profesorado en Matemática, repensando el tipo de validación pretendido en cada nivel educativo (Esteley et al., 2019) y recuperando las formas de validar de estudiantes que ingresan a la universidad para, paulatinamente, ir construyendo prácticas de validación más cercanas a la demostración. Todo esto con el propósito de que los estudiantes puedan avanzar en un ambiente de mayor articulación con sus conocimientos disponibles.

Finalmente, esta investigación pretende ser un aporte a los estudios sobre la complejidad ontosemiótica que revisten las demostraciones matemáticas (Markiewicz y Etchegaray, 2017, 2018; Recio, 1999), ya que, pone de manifiesto relaciones y significados que en muchas ocasiones están ocultos en las prácticas planteadas en los materiales de trabajo que utiliza un docente. Sin embargo, es sumamente necesario reconocer ciertas limitaciones del estudio. Por un lado, es importante señalar que el análisis realizado se basó únicamente en tres demostraciones presentes en los materiales del ingreso a la universidad. Si bien este análisis constituye un paso inicial fundamental para comprender las dificultades de los estudiantes ante la demostración y pensar en procesos de estudio con mayor idoneidad cognitiva e instruccional, reconocemos que no es suficiente para extraer conclusiones más generales sobre el tipo de prácticas de validación que prevalecen en el desarrollo completo de las asignaturas. En este sentido, se hace necesario ampliar la exploración y el análisis teniendo en cuenta otros aspectos fundamentales, como lo son las clases que efectivamente dictan los docentes, donde abordan distintos tipos de prácticas de validación. Por otro lado, es necesario reconocer que nuestro análisis se lleva a cabo en un contexto específico, es decir, en una carrera de grado de una universidad particular. Sería de gran interés poder extender este estudio a otras universidades para realizar un análisis más exhaustivo sobre el tipo de prácticas de validación que se llevan a cabo en distintos contextos. Continuamos nuestra línea de investigación en la búsqueda continua de mejoras para los procesos de enseñanza y aprendizaje de la demostración a partir de la construcción de propuestas que lo posibiliten (Lew y Mejía Ramos, 2019; A. J. Stylianides et al., 2022).

Bibliografía

Alfaro-Carvajal, C., Flores-Martínez, P., & Valverde-Soto, G. (2019). La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. *Uniciencia*, *33*(2), 55-75. https://doi.org/10.15359/ru.33-2.5

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemática*. Una empresa docente.

Boero, P. (2007). *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice*. Sense Publishers.

Boero, P., Garuti, R., Lemut, E., & Mariotti, A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. En L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME international conference* (pp. 113-120).

D'Andrea, R., & Sastre, P. (2013). ¿Cómo facilitar el proceso de demostración matemática en estudiantes universitarios? *UNION*, *33*, 137-145.

Duarte, B. (2010). *Cuestiones didácticas a propósito de la enseñanza de la fundamentación en matemática*. [Tesis doctoral]. Universidad de San Andrés.

Elguero, C., Ferrochio, E., & Maero, A. (2021). *Integración a la Cultura Académica Profesorado y Licenciatura en Matemática, Geometría*. https://www.exa.unrc.edu.ar/wp-content/uploads/2020/12/Geometr%C3%ADa%C3%ADa-2021.pdf

Esteley, C., Cruz, M. F., & Scaglia, S. (2019). *Quehacer matemático y validación: ideas de futuros profesores*. XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.

Fiallo, J. (2013). Estudio de los procesos de argumentación y demostración. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 7-18). Universidad Pedagógica Nacional.

Font, V., & Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *69*, 33-52.

Font, V., & Rubio, N. V. (2017). Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics Education. *ZDM. The international journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2019). The ontosemiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 38-43.

Godino, J. D., Burgos, M., & Gea, M. M. (2022). Analysing theories of meaning in mathematics education from the onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.*, *53*(10), 2609-2636. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1896042

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S., & Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *AIEM*, *8*, 117-142.

Godino, J. D., & Recio, A. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *19*(3), 405-414.

Gómez-Chacón, I. M. (2009). Actitudes matemáticas: propuestas para la transición del bachillerato a la universidad. *Educación matemática*, *21*(3), 5-32.

González-Gutiérrez, F. J. (2004). *Apuntes de matemática discreta*. Universidad de Cádiz. https://www.cs.buap.mx/~fjrobles/Conjun2.pdf

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 5-23.

Hanna, G., & de Villiers, M. (2012). Aspects of proof in mathematics education. En G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study* (pp. 1-10). Springer.

Hernández-Suarez, C. A. (2012). Caracterización de la actividad demostrativa en estudiantes de educación superior. *Eco Matemático Journal of Mathematical Sciences*, *3*(1), 36-43.

Konic, P., Bovio, A., & Bollo, C. (2021). *Integración a la Cultura Académica Profesorado y Licenciatura en Matemática, Matemática Discreta*. https://www.exa.unrc.edu.ar/wp-content/uploads/2020/12/Matem%C3%A1tica-Discreta-2021.pdf

Lew, K., & Mejía Ramos, J. P. (2019). Linguistic conventions of mathematical proof writing at the undergraduate level: Mathematicians' and students' 4 perspectives. *Journal for Research in Mathematics Education*, *50*(2), 121. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.50.2.0121

Markiewicz, M. E., Etchegaray, S., & Milanesio, B. (2021). Análisis ontosemiótico de procesos de validación en estudiantes del último año de la escuela secundaria. *UNION*, *17*(62).

Markiewicz, M. E., & Etchegaray, S. C. (2017). Análisis de objetos, procesos y conflictos semióticos en prácticas algebraicas de primer año de la universidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone & M. M. López (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*.

Markiewicz, M. E., & Etchegaray, S. C. (2018). La comprensión de textos: un análisis desde la didáctica de la matemática. *Contextos de Educación*, *24*, 41-54.

Milanesio, B., Burgos, M., & Markiewicz, M. E. (2023). Significados pragmáticos de la demostración matemática en estudiantes universitarios. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI.* (pp. 371-378). SEIEM.

Molina, O., & Samper, C. (2019). Tipos de problemas que provocan la generación de argumentos inductivos, abductivos y deductivos. *Bolema*, *33*, 109-134.

Montoro, V. (2007). Concepciones de estudiantes de profesorado acerca del aprendizaje de la demostración. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, *2*(1), 101-121.

Orquera, V., & Ferreyra, D. (2022). *Integración a la cultura académica profesorado y licenciatura en matemática Cálculo*. https://drive.google.com/file/d/1q_C6lldf6z6fPp9CXAH6X0w6lOwPpa6o/view

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *25*(3), 313-348.

Peparelli, S., Zon, N., Bigolín, S., & Matos, N. (2011). El pasaje del nivel medio al nivel universitario: un estudio en una asignatura de primer año del profesorado en matemática. *Educación Matemática*, (*1*), *38*.

Recio, A. (1999). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática* [*Tesis doctoral*]. Universidad de Granada.

Selden, A., & Selden, J. (2008). Overcoming students'difficulties in learning to understand and construct proofs. *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics*, 95-110.

Stylianides, A., Bieda, K., & Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in Mathematics Education research. En A. Gutierrez, G. Leder & P. Boero (Eds.), *Second handbook of research on the psychology of Mathematics Education: The journey continues* (pp. 315-351). Sense Publishers.

Stylianides, A. J., Komatsu, K., Weber, K., & Stylianides, G. J. (2022). Teaching and Learning Authentic Mathematics: The Case of Proving. En M. Danesi (Ed.), *Handbook of Cognitive Mathematics*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-03945-4_9

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2017). Based Interventions in the area of proof: The past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 119-127.

Weber, K., Lew, K., & Mejía Ramos, J. P. (2020). Using expectancy value theory to account for students' mathematical justifications. *Cognition and Instruction*, *38*(1), 27-56. https://doi.org/10.1080/07370008.2019.1636796

Bettina Milanesio
Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales - UNRC.
(✉) *bettinamilanesio@gmail.com*

María Elena Markiewicz
Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales - UNRC.
(✉) *mmarkiewicz@exa.unrc.edu.ar*

Recibido: *1ro de agosto de 2023.*
Aceptado: *27 de marzo de 2024.*
Publicado en línea: *30 de abril de 2024.*