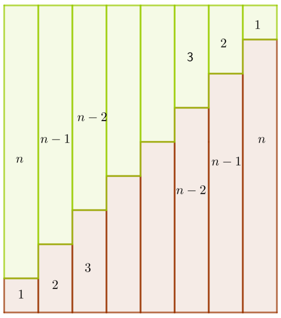
Sección de Problemas

☞ *por Diego A. Sulca*

En esta edición vamos a explorar algunas preguntas en torno a los cuadrados perfectos. Estos son los números $0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$, y son quizás, junto con los números primos, los primeros números “especiales"que analizamos en nuestras clases de matemática en el secundario. Geométricamente, el cuadrado n^2 representa el área de un cuadrado de lado entero n.

El primer problema consiste de dos identidades que bien podrían resolverse haciendo manipulaciones algebraicas o invocando al principio de inducción matemática. Sin embargo el reto que les propongo es probar las identidades de manera geométrica, sin recurrir al álgebra. A modo de ejemplo, el siguiente gráfico



muestra la igualdad $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. En efecto, en la figura observamos un rectángulo de base n y altura $n+1$, y por lo tanto de área $n(n+1)$. Este rectángulo a su vez se encuentra dividido en rectángulos largos cuyas áreas se encuentran especificada en el dibujo. El área de cada una de las dos zonas de un solo color es igual a $1+2+3+\cdots+n$. Luego $2(1+2+3+\cdots+n) = n(n+1)$ y de aquí sale la fórmula deseada.

Problema 1. Probar geométricamente los siguientes enunciados.

(a) La suma de los primeros n números impares es igual a n^2.
(b) La suma de los primeros n cuadrados positivos es igual a $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Ahora les presento una serie de problemas de caráctar numérico. A los números los escribimos usualmente en su notación decimal, y es por lo tanto natural hacerse preguntas sobre los cuadrados en torno a sus representaciones decimales.

Problema 2.

(a) ¿Con cuántos ceros puede terminar un cuadrado perfecto?
(b) ¿Con qué digito puede terminar un cuadrado perfecto?
(c) ¿Cuales son los posibles dos últimos dígitos de un cuadrado perfecto?

Problema 3.

(a) Si N es un número de k dígitos, demostrar que hay un cuadrado perfecto cuya distancia a N es menor que $10^{\frac{k}{2}}$.
(b) Probar que si N es un número cualquiera, entonces existe un cuadrado perfecto que empieza con N. Por ejemplo, para $N = 1234$ obtengo $1234321 = 1111^2$ y para $N = 999$ obtengo $9998244 = 3162^2$.

En lo que sigue usaremos la notación $N = \overline{a_1 \ldots a_r}$ para indicar que $a_1, \ldots, a_r$ son los dígitos de N: a_r es la unidad, a_{r-1} la decena, a_{r-2} la centena, etc. Usamos la barra para no confundirnos con $a_1 \cdots a_r$, que normalmente denota la multiplicación de $a_1, \ldots, a_r$.

Sea $N = \overline{a_1 \ldots a_k}$ un cuadrado perfecto. Quiero agregarle r dígitos $a_{k+1}, \ldots, a_{k+r}$ a la derecha para que el número resultante $M = \overline{a_1 \ldots a_k a_{k+1} \ldots a_{k+r}}$ sea nuevamente un cuadrado perfecto. Me pregunto cuál es el menor valor posible de r (para un N dado). Obviamente agregando dos ceros al final de N se obtiene un cuadrado. Para evitar esta trivialidad se va a pedir que el último dígito agregado a_{r+k} sea distinto de cero. Por ejemplo, si $N = 144$ $(= 12^2)$, entonces $r = 1$ pues $1444 = 38^2$. Si $N = 121$ $(= 11^2)$ entonces el próximo cuadrado que empieza con 121 y no termina en 0 es $121801 = 349^2$.

Encontrar una expresión general para r en términos de N parece ser una tarea difícil. Para simplificar el problema podemos preguntarnos sobre cotas para r. Si se exige además que r sea par se puede llegar a una cota inferior de r.

Problema 4. Sea $N = \overline{a_1 \cdots a_k}$ un cuadrado perfecto. Sea r un número par y sean $a_{k+1}, \ldots, a_{k+r}$ dígitos tales que $a_{k+r} \neq 0$ y el número $M = \overline{a_1 \ldots a_k a_{k+1} \ldots a_{k+r}}$ es también un cuadrado perfecto. Probar que $r \geq k$.

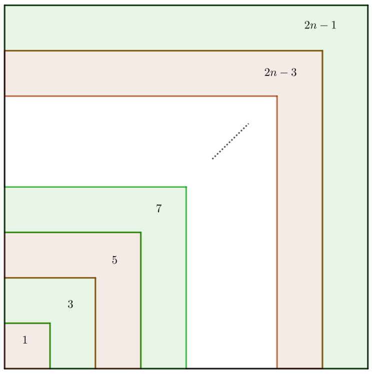
¿Se animan a formular una cota superior para r?

Finalmente les comparto un problema de la Olimpíada Matemática Argentina del año 2001 que se tomó en la selección del equipo que nos representó ese año en la Olimpiada Internacional de Matemática. Este problema es el primero que me fascinó de manera infinita. Cuando lo ví me parecía imposible y me llevó un buen tiempo (años) en resolverlo. A pesar de esto me cambió mucho la forma en que entendía a las matemáticas. Ustedes no se preocupen, porque con lo trabajado en los problemas anteriores no les debería resultar difícil. Solo espero que puedan disfrutarlo tanto (y más) que yo.

Problema 5. Pablito escribe en el pizarrón un millón de dígitos, todos distintos de cero, empezando de izquierda a derecha. Cada vez que termina de escribir un dígito, si el número que aparece en el pizarrón es un cuadrado perfecto, entonces recibe 1 peso (épocas del uno a uno). Por ejemplo, si empezara escribiendo 169744 ya habría ganado 4 pesos pues $1 = 1^2, 16 = 4^2, 169 = 13^2, 169744 = 412^2$. Demostrar que Pablito no puede ganar más de 40 pesos.

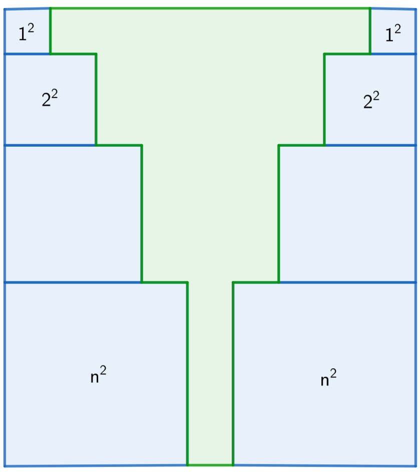
SOLUCIONES

Solución 1. (a) En el siguiente dibujo se presenta un cuadrado de tamaño $n \times n$ y desde el corner inferior izquierdo hasta el corner superior derecho se van dibujando uno dentro del otro los cuadrados de tamaño 1×1, 2×2, 3×3, etc.



Cada número en la diagonal es el área de la zona pintada en donde se encuentra el número. Es claro que estos números tienen que ir creciendo de a dos a partir de 1, y por lo tanto resultarán ser los n primeros impares. La suma de todos estos números da el área del cuadrado y por lo tanto es n^2.

(b) Consideremos el siguiente rectángulo



El mismo se construye apilando cuadrados de tamaño $1 \times 1, 2 \times 2, \ldots, n \times n$ a la izquierda y a la derecha. Estas pilas están distanciadas en una unidad. Los números en el gráfico indican el área del cuadrado que lo encierra. Como se puede apreciar, la base del rectángulo mide $n+1+n = 2n+1$, mientras que la altura mide

$1+2+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$. Por lo tanto el área del rectángulo es $\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$. Deducimos que

$$2(1^2+2^2+\ldots+n^2)+(\text{área de la zona verde})=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1).$$

Si a la zona verde la dividimos de abajo hacia arriba en cuadraditos de tamaño 1×1 su área resulta

$$\begin{aligned}\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}+\underbrace{3+\ldots+3}_{n-1}+\ldots+\underbrace{2n-3+2n-3}_{2}+\underbrace{2n-1}_{1}\\ &=(1+3+5+\cdots+2n-1)+(1+3+5+\cdots+2n-3)+\cdots+(1+3)+1\\ &=n^2+(n-1)^2+\cdots+2^2+1^2.\end{aligned}$$

Juntando todo obtenemos $3(1^2+2^2+\cdots+n^2)=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$, de donde se deduce la identidad deseada.

El cálculo del área de la zona verde también se puede hacer gráficamente. ¿Se animan a hacerlo?

Solución 2. (a) Si n termina con r ceros entonces $n=m10^r$ para algún m que no es múltiplo de 10. Luego $n^2=m^2 10^{2r}$. Como m^2 tampoco es múltiplo de 10, deducimos que n^2 termina con $2r$ ceros. Luego el número de ceros con que termina un cuadrado es siempre un número par.

(b) Si calculamos el cuadrado de un número n cuya unidad es el dígito u, la unidad de n^2 será igual a la unidad de u^2. Formalmente, si u es la unidad de n entonces podemos escribir $n=10m+u$ para algún m y luego $n^2=10^2m^2+20mu+u^2=10(10m^2+2um)+u^2$. De aquí vemos que solo u^2 aporta a la unidad de n^2. Calculando $0^2=0$, $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$, $5^2=25$, $6^2=36$, $7^2=49$, $8^2=64$, $9^2=81$, concluímos que los únicos valores posibles para la unidad de n^2 son $0,1,4,5,6,9$.

(c) Si $\overline{du}$ son los últimos dígitos de n entonces los últimos dos dígitos de n^2 son los mismos que los de $\overline{du}^2$. En efecto, $n=100m+\overline{du}^2$ para algún m y por lo tanto $n^2=100^2m^2+200m\overline{du}+\overline{du}^2=100(100m^2+2m\overline{du})+\overline{du}^2$, y de esta igualdad se sigue nuestra afirmación. Al igual que antes, todo lo que resta hacer es calcular los cuadrados desde 0^2 hasta 99^2 y obtener sus dos últimos dígitos. De hecho basta calcular hasta 49^2, ¿por qué?

Solución 3. (a) Si N ya es un cuadrado no hay nada que probar. Si no fuera un cuadrado lo podemos encerrar entre dos cuadrados consecutivos $n^2<N<(n+1)^2=n^2+2n+1$. La distancia de N a algunos de los cuadrados n^2 o $(n+1)^2$ debe ser menor o igual que n pues si fuera $N-n^2\geq n+1$ y $(n+1)^2-N\geq n+1$ entonces sumando estas desigualdades término a término obtendríamos el absurdo $(n+1)^2 - n^2 \geq 2n+2$, cuando en realidad $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$. Para terminar, observemos que $n < \sqrt{N} < 10^{\frac{k}{2}}$.

(b) Sea $N = \overline{a_1 \dots a_k}$. Como primera estrategia podríamos agregarle ceros a la derecha y al número resultante, digamos M, buscarle el cuadrado más cercano. La cantidad de ceros a agregar debería ser lo suficiente para que el cuadrado más cercano a M también empiece con $\overline{a_1 \dots a_k}$. Pero como el cuadrado más cercano a un número puede estar por debajo del número, lo cual forzaría a cambiar a_k, cambiamos la estrategia y antes de agregar los ceros coloco un 5.

De manera más precisa, considero el número $M = \overline{a_1 \dots a_k 50 \dots 0}$ de $2k+1$ dígitos obtenido a partir de N agregándole un 5 y luego k ceros a la derecha. Por el primer item, el cuadrado más cercano está a distancia $< 10^{\frac{2k+1}{2}} < 4 \cdot 10^k$. Esto quiere decir que el cuadrado más cercano vive entre los números $\overline{a_1 \dots a_k 10 \dots 0}$ y $\overline{a_1 \dots a_k 90 \dots 0}$ (ambos con k ceros al final). Luego el cuadrado más cercano tiene los primeros k dígitos iguales a los de M.

Solución 4. Sea $N = n^2$ y $M = m^2$. Tenemos que $n^2 \cdot 10^r + \overline{a_{k+1} \dots a_{k+r}} = m^2$, con lo cual

$$\overline{a_{k+1} \dots a_{k+r}} = m^2 - \cdot 10^r n^2 = (m - n10^{\frac{r}{2}})(m + n10^{\frac{r}{2}}) \geq m + n10^{\frac{r}{2}}.$$

En esta desigualdad usamos que $\frac{r}{2}$ es entero y por lo tanto $m - n10^{\frac{r}{2}} \geq 1$. No puede ser cero porque $a_{k+r} \neq 0$.

Notemos ahora que $M = m^2 > 10^{k+r-1}$, con lo cual $m > 10^{\frac{k+r-1}{2}}$ y así

$$10^r > \overline{a_{k+1} \dots a_{k+r}} > 10^{\frac{k+r-1}{2}},$$

De aquí resulta $r > \frac{k+r-1}{2}$ y luego $r > k-1$, es decir, $r \geq k$.

Solución 5. Supongamos que $N_1 < N_2 < N_3 < \cdots < N_d$ son todos los cuadrados obtenidos por Pablito. Vamos a probar por inducción que N_{2k} tiene por lo menos 2^k dígitos. Esto es evidente cuando para $k = 1$: N_2 tiene al menos $2 = 2^1$ dígitos. Asumamos que vale para k, es decir, que N_{2k} tiene por lo menos 2^k dígitos. Vamos a probar lo análogo para $k+1$. Analicemos tres casos:

- Caso 1: La diferencia de dígitos entre N_{2k} y N_{2k+1} es par. Por el Problema 4, la cantidad de dígitos de N_{2k+1} es por lo menos 2 veces la cantidad de dígitos de N_{2k}, y por lo tanto es $\geq 2^{k+1}$. Luego con más razón N_{2k+2} tendrá por lo menos 2^{k+1} dígitos.
- Caso 2: La diferencia de dígitos entre N_{2k+1} y N_{2k+2} es par. Argumentando como el caso anterior llegamos a que N_{2k+2} tiene por lo menos 2^{k+1} dígitos.
- Caso 3: La diferencias de dígitos entre N_{2k} y N_{2k+1} y entre N_{2k+2} y N_{2k+1} son impares. Pero entonces la diferencia de dígitos entre N_{2k+2} y N_{2k} es par

y podemos usar el Problema 4 para concluir que la cantidad de dígitos de N_{2k+2} es al menos el doble que la cantidad de dígitos de N_{2k}, y por lo tanto es $\geq 2^{k+1}$.

Esto termina la inducción porque hemos visto que en cualquiera de los casos la cantidad de dígitos de N_{2k+2} es por lo menos 2^{k+1}.

Para terminar, la hipótesis del problema nos dice que N_d tiene a lo sumo 10^6. Si d es par, entonces por lo probado arriba deberíamos tener $10^6 \geq 2^{\frac{d}{2}}$, lo cual implica $\frac{d}{2} \leq 19$, es decir, Pablito gana a lo sumo 38 pesos. Si d es impar entonces $d-1$ es par y nuevamente, por lo probado antes, deberíamos tener $10^6 \geq 2^{\frac{d-1}{2}}$. Luego $\frac{d-1}{2} \leq 19$ y en tal caso Pablito gana como mucho 39 pesos.