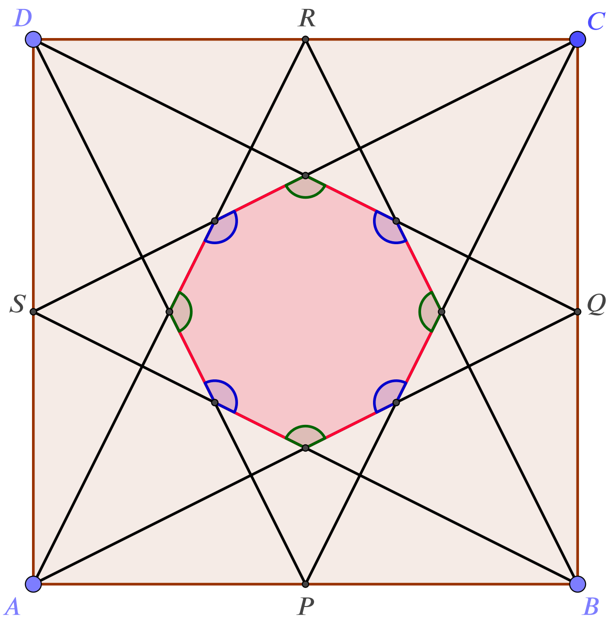
en un cuadrado cualquiera, el octógono interior obtenido por el corte de las 8 medias diagonales no es regular?

Recordamos que por media diagonal de un cuadrado nos referimos al segmento que une un vértice con el punto medio de un lado opuesto (o sea, hay dos medias diagonales por vértice).

Hay 8 medias diagonales en un cuadrado $\mathcal{C} = \square ABCD$, que podemos dividirlas en dos grupos. Si P, Q, R, S son los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente, tenemos un grupo formado por AQ, BR, CS y DP, y otro formado por AR, BS, CP y DQ. Cada uno de estos dos conjuntos de cuatro medias diagonales determina un cuadrado que tiene $\frac{1}{5}$ del área de $\mathcal{C}$ (ver el ¿Sabías que...? del número anterior, Número 38, vol. 2, año 2023).

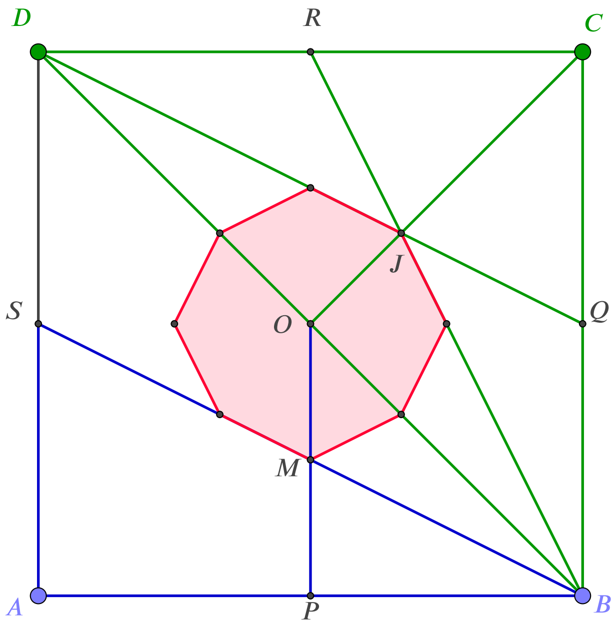
El corte de las 8 medias diagonales determina un octógono $\mathcal{O}$, que es además la intersección de los dos cuadrados interiores mencionados mas arriba.



Podría parecer que por la simetría con que fue construido el octógono, este debería ser regular. Pero no, para nuestra sorpresa no es así. Por supuesto que los 8 lados del octógono $\mathcal{O}$ son congruentes. En efecto, dos lados consecutivos de $\mathcal{O}$ son congruentes pues algunos pares de ellos son simétricos con respecto a una diagonal del cuadrado $\mathcal{C}$ y otros pares son simétricos con respecto a un segmento que une los puntos medios de $\mathcal{C}$.

Sin embargo, los ángulos no son todos congruentes, sino que vienen en 2 conjuntos de 4 ángulos congruentes cada uno. Por un lado, si rotamos 90° el cuadrado $ABCD$ con respecto a su centro, cada ángulo azul del octógono va a parar al ángulo azul siguiente y lo mismo ocurre con los verdes. Esto demuestra que los ángulos azules son todos congruentes entre sí, y que los ángulos verdes también son todos congruentes entre sí. Por otro lado, damos a continuación dos pruebas muy sencillas (sin medir) de que los ángulos verdes no son congruentes a los azules. Dejamos de desafío al lector calcular la medida de los ángulos azules y verdes.

(1) Para la primer demostración, observemos la figura siguiente:



Si $\mathcal{O}$ fuese regular, OM y OJ serían congruentes. Sin embargo, es fácil ver que no miden lo mismo:

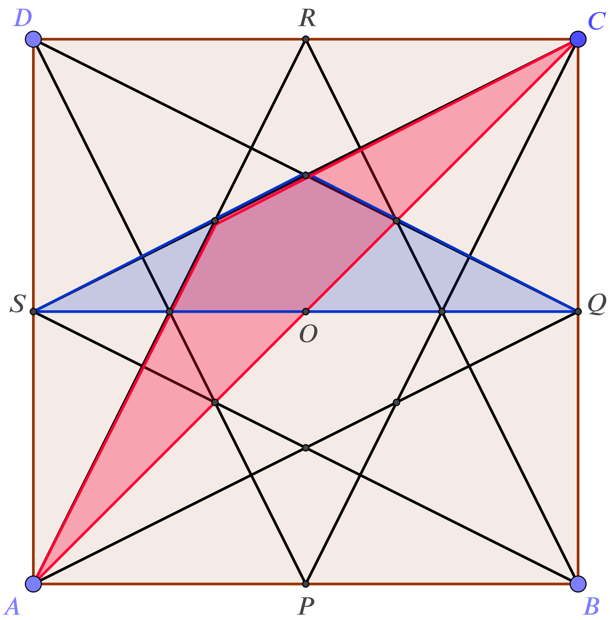
$$|OM| = |MP| = \tfrac{1}{2}|AS| = \tfrac{1}{4}|AB|,$$

mientras que

$$|OJ| = \tfrac{1}{3}|OC| = \tfrac{1}{6}|AC| = \tfrac{\sqrt{2}}{6}|AB|,$$

donde hemos usado que MP es base media del triángulo $\triangle SAB$ (en el 1er caso) y que J es el centroide de $\triangle BCD$ (en el 2do caso). Recordemos que el centroide de un triángulo es la intersección de las medianas y que dada una mediana cualquiera, se encuentra a $\frac{1}{3}$ del punto medio del lado donde apoya la mediana y a $\frac{2}{3}$ del vértice opuesto.

(2) La segunda demostración es más simple todavía. Basta observar la siguiente figura.



Si el octógono fuese regular, entonces al rotar el triángulo azul por el centro de $\mathcal{O}$ de forma antihoraria tendría que coincidir con el triángulo rojo, pero claramente el triángulo azul tiene el lado mayor mas corto que el lado mayor del rojo (1 versus $\sqrt{2}$ si suponemos que $\mathcal{C}$ es unitario).

Finalmente, ahora que ya hemos visto que el octógono no es regular, nos surge la duda, ¿cuál es su área? Sabemos que tiene que ser menor que $\frac{1}{5}$ del área del cuadrado grande $\mathcal{C}$. De las figuras, vemos que por construcción, el área de $\mathcal{O}$ es el área de $\mathcal{C}_1$ (o de $\mathcal{C}_2$) menos el área de cuatro triangulitos rectángulos.

¿Te animás a encontrar el área de $\mathcal{O}$? La solución en la última página.