Revista de Educación Matemática
Volumen 38, N° 2 (2023), páginas 31 – 47
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Artículos de Matemática

SOBRE JUSTIFICACIONES EN MATEMÁTICA: CUANTIFICADORES, IMPLICACIONES Y EQUIVALENCIAS.

Marilina Carena

Resumen. Este trabajo tiene como fin analizar algunas justificaciones acerca de los valores de verdad de proposiciones matemáticas básicas que contienen cuantificadores o implicaciones. En particular, se hace énfasis en las formas incorrectas de hacerlo, puesto que muchas de ellas persisten aún en estudiantes avanzados de carreras de grado. Esto se abordará, principalmente, desde lo coloquial para ser aplicado luego en ejemplos matemáticos básicos.

Abstract. This paper aims to analyze some justifications concerning to the truth value of basic mathematical propositions containing quantifiers or implications. In particular, emphasis is placed on the wrong ways of doing it, since many of them still persist even in advanced undergraduate students. This will be addressed mainly from the colloquial to be applied later in basic mathematical examples.

Introducción

Si bien en la escuela secundaria no suelen abordarse, en general, contenidos de lógica formal, hay ciertas actividades que incluyen razonamientos lógicos básicos. Este es el caso, por ejemplo, de los ejercicios de tipo "Verdadero o Falso" y sus justificaciones.

Teniendo en cuenta la alta probabilidad que existe de acertar la respuesta en tales ejercicios, es natural que la importancia radique en la justificación de la misma. El modo correcto de hacerlo suele presentar dudas aun en estudiantes de carreras de grado, como si las reglas para ello fueran arbitrarias o contraintuitivas: *¿con un ejemplo alcanza?*; *¿puedo enunciar qué sería lo correcto?*; *¿puedo tomar valores particulares?*

Estas son algunas de las preguntas que escuchamos reiteradamente. Por ello, resulta importante poder transmitir que el razonamiento utilizado en la Matemática

Palabras clave: Educación Matemática, implicaciones, cuantificadores.
Keywords: Mathematics education, implications, quantifiers.

no es diferente al aplicado en la vida cotidiana. Esto significa que para poder determinar (y demostrar) si un enunciado matemático es verdadero o falso, debe razonarse de la misma forma en que se lo hace para decidir si algo de la vida cotidiana es cierto o no.

La mayor diferencia es que no toda afirmación de la vida cotidiana es verdadera o falsa, pues eso puede depender del gusto, estado de ánimo o la opinión de cada persona, entre otras cosas. En Matemática, en cambio, se trabaja con oraciones que son enunciados. Un **enunciado** o **proposición** es una oración que admite uno y solo un valor de verdad: verdadero o falso. Por ejemplo, las siguientes afirmaciones *sí* son enunciados:

- Si nació en el año 2005, entonces nació en el siglo XXI.
- Todas las personas tienen cabello color negro.
- Existen personas con cabello color negro.

La primera y la última de las afirmaciones anteriores son verdaderas, mientras que la segunda resulta falsa. Sin embargo, si debemos defender o justificar esta respuesta sobre la veracidad o falsedad de cada una, será necesario usar argumentos correctos, como trabajaremos en las siguientes secciones. Para lograr esto es necesario, a su vez, que las proposiciones se enuncien de forma completa y correcta, conteniendo los cuantificadores e implicaciones que deseamos plantear.

Por ejemplo, consideremos lo siguiente:

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

¿Qué se espera que un alumno responda sobre la verdad de esta afirmación? Puesto que no contiene ningún cuantificador, algunas interpretaciones posibles son:

- la igualdad enunciada vale para toda elección de números reales no negativos x e y;
- existen números reales no negativos x e y tales que la igualdad vale;
- la igualdad dada no vale para ninguna elección de números reales x e y.

La interpretación asumida "por defecto" suele ser la primera, pero es preciso enunciar lo que realmente queremos plantear incluyendo los cuantificadores correspondientes ya que, a diferentes cuantificadores, corresponden distintos valores de verdad. Esto puede lograrse de forma coloquial, sin necesidad de recurrir a ninguna simbología extra. Por ejemplo, la siguiente proposición es falsa:

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x}+\sqrt{y} \quad \text{para cualquier elección de reales números no negativos } x \text{ e } y;$$

mientras que resulta verdadero enunciar que:

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \text{para cierta elección de números reales no negativos } x \text{ e } y.$$

Similarmente, consideremos la afirmación

Un cuadrado es un cuadrilátero.

Si bien este enunciado no presenta problemas desde el punto de vista lógico puesto que puede determinarse su valor de verdad, quizás no resulte la forma adecuada de expresarlo si estamos describiendo, por ejemplo, las propiedades de un cuadrado. Más precisamente, si un alumno encuentra esta frase por primera vez, podría preguntarse si se refiere a que:

- todo cuadrado es un cuadrilátero;
- todo cuadrilátero es un cuadrado;
- cuadrilátero y cuadrado son conceptos equivalentes.

Es claro que la única opción correcta en este caso es la primera, que también puede reescribirse utilizando los conectores "si" y "entonces"como:

Si es un cuadrado, entonces es un cuadrilátero.

Por la familiaridad que la mayoría de nosotros tenemos con el concepto de cuadrado, quizás el ejemplo previo no ilustre en profundidad la conveniencia de la redacción adecuada. Por ejemplo, vayamos a algo menos básico sobre cuadriláteros, como la afirmación:

Los ángulos interiores opuestos de un cuadrilátero inscripto en una circunferencia son suplementarios.

¿Qué quiere transmitir la oración anterior? Las opciones, nuevamente, pueden ser:

- si los ángulos interiores opuestos de un cuadrilátero son suplementarios, entonces el cuadrilátero puede inscribirse en una circunferencia;
- si un cuadrilátero puede inscribirse en una circunferencia, entonces sus ángulos interiores opuestos son suplementarios;
- un cuadrilátero puede inscribirse en una circunferencia si y solo si sus ángulos interiores opuestos son suplementarios.

Determinar cuál de las interpretaciones anteriores es la correcta puede no ser tan obvio como en el caso del cuadrado, principalmente para aquellos que se encuentren con la propiedad por primera vez.

Una vez dado un enunciado matemático de modo que admita un único valor de verdad (verdadero o falso) es importante poder justificar este valor de forma correcta. En las siguientes secciones trabajaremos ejemplos sobre esto, teniendo en cuenta los cuantificadores, las implicaciones y los conectores de conjunción y disyunción. Más precisamente, este trabajo se organiza de la siguiente forma:

- Sección 1: se trabaja sobre la importancia de los *cuantificadores* involucrados en un enunciado al momento de determinar y justificar su valor de verdad.

- Sección 2: se aborda la diferencia entre *implicaciones* y *equivalencias*, así como los conceptos de recíproco, contrarrecíproco, condiciones necesarias y condiciones suficientes.
- Sección 3: se presentan los conectores de disyunción y de conjunción entre proposiciones, y se analiza el significado de implicaciones verdaderas y falsas que los contienen.

Las tres secciones anteriores se abordan, principalmente, con ejemplos que no involucran matemática. Luego, en la Sección 4, se aplica todo lo trabajado previamente para determinar y justificar el valor de verdad de distintos enunciados matemáticos básicos.

Algunos fragmentos y ejemplos contenidos en este artículo fueron extraídos de (Carena, 2021).

§1. La importancia de los cuantificadores

Para justificar la veracidad o falsedad de un enunciado se debe dar una **demostración**. Las demostraciones tienen diversas formas, dependiendo del enunciado que se quiera probar: la falsedad de algunos enunciados puede demostrarse dando un **contraejemplo**, es decir, un ejemplo para el cual el enunciado no se cumpla, mientras que en ciertos casos bastará con un **ejemplo** para demostrar que el enunciado es verdadero. Nos encontraremos también con enunciados cuyo valor de verdad no podrá demostrarse ni con ejemplos ni con contraejemplos.

Para ilustrar esto, supongamos que queremos demostrar que la afirmación

Todas las personas tienen cabello color negro

es **falsa**. Para ello será suficiente con indicar una sola persona que no tenga el cabello color negro. Notar que ser falsa no significa que *ninguna* persona tiene cabello negro, sino que existe al menos una que no lo tiene. Parece obvia esta aclaración, pero a veces suele olvidarse esta lógica cuando se intenta argumentar sobre un enunciado matemático. Aquí, la persona indicada es nuestro “contraejemplo”.

Sin embargo, para probar que

Existen personas con cabello color negro

es **verdadera**, será suficiente con indicar una persona con cabello negro (será nuestro “ejemplo”). Notar que esta misma persona serviría para demostrar que la siguiente afirmación es **falsa**:

No existen personas con cabello color negro.

Con lo anterior podemos observar que **no** será posible encontrar una receta de cómo demostrar la veracidad o falsedad de un enunciado, sino que dependerá de la forma en la que el mismo esté expresado. Será necesario razonar de manera lógica en cada caso, para determinar si se necesita dar una demostración mediante propiedades, un contraejemplo o un ejemplo, independientemente de que la afirmación sea verdadera o falsa.

Sin embargo, es importante señalar algunas de las formas **incorrectas** que aparecen frecuentemente al momento de intentar probar la validez de algunas afirmaciones. Por ejemplo, si alguien afirma que

Todas las personas nacidas en Argentina tienen cabello color negro,

no alcanzará con exponer ni una, ni dos, ni 500 personas nacidas en Argentina con cabello de color negro, pues esas no son *todas* las personas sobre las cuales se está realizando la afirmación. Exhibir varios ejemplos en un conjunto de objetos satisfaciendo una propiedad, aunque sean muchos, no alcanza para demostrar que dicha propiedad vale para todo el conjunto. De hecho, aunque se exhiban miles de personas argentinas con cabello negro, bastará con encontrar una sola persona que no lo tenga para demostrar que es falsa, tal como se vio en el primer ejemplo de esta sección.

En otras palabras, para demostrar que cierta propiedad vale para **todo** elemento en un cierto conjunto, no basta con chequear que valga para algunos, sino que habrá que verificar que vale para **todos los casos posibles**. Esto puede ser tedioso si estamos hablando de una cantidad elevada de elementos, y requerirá de métodos específicos si se trata de una cantidad infinita de ellos. Esta situación es muy frecuente en las afirmaciones matemáticas, en las que las propiedades se enuncian, por ejemplo, para todos los números naturales o reales. En tal caso, cualquier cantidad de ejemplos que se presenten para demostrar la validez de la propiedad no será suficiente, pues hay infinitos posibles. Sin embargo, un solo ejemplo resultará suficiente para demostrar su falsedad. Para ilustrar esto consideremos los dos enunciados matemáticos siguientes, cuyos valores de verdad se indican:

(i) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, para todo par de números reales a y b. Falso

(ii) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, para todo par de números reales a y b. Verdadero

¿Cómo podemos demostrar que (i) es falsa? En este caso, usando la misma lógica que en un debate sobre enunciados no matemáticos: bastará con exponer valores para los cuales la afirmación no se cumple, es decir, un par de números reales a y b tales que $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$. Por ejemplo, podemos tomar $a = 1$ y $b = 2$ para obtener, por un lado, $(a+b)^2 = 3^2 = 9$ y, por el otro, $a^2 + b^2 = 1^2 + 2^2 = 5$. Es claro que $9 \neq 5$, por lo que el par elegido es nuestro contraejemplo.

Cabe señalar que un error frecuente para justificar que un enunciado es falso consiste en exhibir cuál debería ser el resultado correcto. Más precisamente, es frecuente leer que la afirmación (i) es falsa puesto que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. ¿Por qué es incorrecto justificar así? Porque seguimos sin demostrar que lo dado es falso salvo que se demuestre, además, que $a^2 + 2ab + b^2 \neq a^2 + b^2$, tomando valores particulares para a y b como arriba, por ejemplo. Es importante comprender esto ya que no siempre expresiones en apariencia distintas representan cantidades diferentes. Para ilustrar esto, podemos considerar la identidad

$$a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2},$$

que propone una manera alternativa de calcular el promedio entre cualesquiera dos números reales a, b. Otro ejemplo es la llamada "identidad pitagórica", que establece que

$$\cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1,$$

para cualquier número real α.

Así, enunciar y demostrar una verdad relacionada a un enunciado dado *no* es suficiente para probar la falsedad del mismo, ya que podrían ser ambas cosas verdaderas. Si se opta por este camino se debe, además, mostrar que esta verdad contradice a la proposición enunciada. Sin ello, ambas afirmaciones podrían ser verdaderas. Se volverá sobre esto más adelante en casos concretos como, por ejemplo, en el Enunciado 7.

Consideremos nuevamente los valores $a = 1$ y $b = 2$ elegidos para probar que (i) es falsa, y comprobemos que la identidad (ii) sí se cumple para ellos. Ya vimos que $(a+b)^2 = 9$. Por otra parte, para el lado derecho de la igualdad tenemos que

$$a^2 + 2ab + b^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2^2 = 1 + 4 + 4 = 9.$$

Así, vemos que para este par de valores a y b se obtiene el mismo resultado en ambos lados de la igualdad. Podemos probar con otros y ver que también se cumple. Sin embargo, como mencionamos antes, esto no alcanza para probar que (ii) es verdadera ya que, por más que analicemos muchos ejemplos, los posibles valores para a y b son infinitos. Esto solo serviría, en caso de tener que determinar el valor de verdad de la afirmación, como una evidencia empírica de que podría ser verdadera. Esto nos conduce a intentar demostrar que la identidad (ii) vale para valores de a y b generales mediante herramientas adecuadas. Para ello usaremos que z^2 es un símbolo que indica el producto del número z por sí mismo, es decir, $z^2 = z \cdot z$ para todo número real z. Luego, por la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma y la propiedad conmutativa del producto, obtenemos

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2,$$

para cualesquiera a y b reales, lo que prueba que el enunciado (ii) es verdadero.

Como conclusión, debemos prestar especial atención a los cuantificadores involucrados en un enunciado, ya que los mismos determinan tanto su valor de verdad como las posibles formas de justificarlo. En especial, resulta importante comprender que no alcanza con probar con algunos valores particulares para demostrar la verdad de un enunciado que contiene un cuantificador universal como (ii).

§2. Implicaciones versus equivalencias

Supongamos que se desean encontrar los valores reales de x que satisfacen la siguiente igualdad

$$x + 4 = \sqrt{x + 10}. \tag{1}$$

¿Qué procedimiento y escritura resultan ser los más frecuentes? Lo más probable es que encontremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} x + 4 &= \sqrt{x + 10} \\ (x + 4)^2 &= x + 10 \\ x^2 + 8x + 16 &= x + 10 \\ x^2 + 7x + 6 &= 0, \end{aligned}$$

y, luego de aplicar la fórmula de la resolvente, se obtiene $x = -6$ y $x = -1$. Se ve directamente que ninguno de estos valores genera un radicando negativo en la ecuación original. Sin embargo, es fácil chequear que $x = -6$ genera un valor negativo en el miembro izquierdo de (1), y un valor positivo en el miembro derecho (porque $\sqrt{4} = 2$ y $\sqrt{4} \neq -2$, ver (Benitez y Carena, 2021) o la Figura 1 para convencerse), por lo que no es solución de dicha ecuación. Así, solamente $x = -1$ es solución de la ecuación dada.

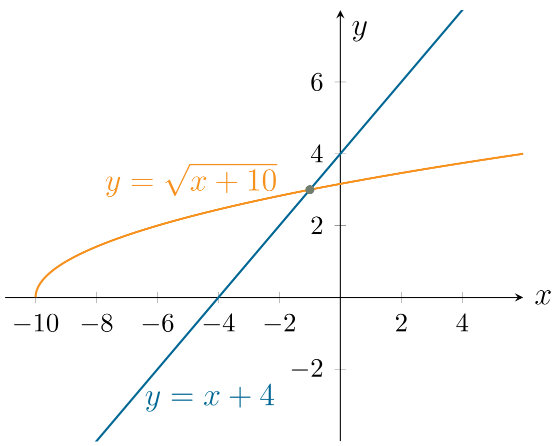

Figura 1. Representación gráfica de la ecuación $x + 4 = \sqrt{x + 10}$.

Entonces aquí es donde surgen dos preguntas fundamentales que generan confusión en los alumnos:

- ¿Por qué aparecen soluciones ficticias, si la resolución no posee errores?
- ¿Cuándo una verificación deja de ser opcional para convertirse en parte de la resolución?

La respuesta a ambas preguntas está contenida en el uso de **equivalencias** o **implicaciones**. Remarcar la diferencia entre estos dos conceptos resulta fundamental para un aprendizaje matemático sólido y consistente. Abordaremos esto a continuación.

Aunque las expresiones "si", "entonces" y "solo si" aparecen frecuentemente en frases cotidianas, su significado no siempre es interpretado correctamente. Por ejemplo, supongamos que una persona afirma lo siguiente:

Si gano la lotería, entonces me compro un auto.

Aquí, la palabra "si" funciona como introductor de la premisa "ganar la lotería", mientras que "entonces" es un introductor para la conclusión "comprar un auto". Suponiendo que la persona que lo afirma cumple con lo que dice, esto significa simplemente que la validez del primer enunciado implica la validez del segundo. Solo eso. Sin embargo, las siguientes interpretaciones erróneas sobre la afirmación anterior suelen escucharse en el lenguaje cotidiano:

- Si *no* gana la lotería, entonces *no* se compra el auto. ✗
- Si se compró el auto, entonces ganó la lotería. ✗

La primera interpretación es incorrecta, ya que la persona no dijo qué sucederá si no gana la lotería. Solamente afirmó algo que haría si la ganara. Con respecto a la segunda, la persona nunca dijo que ganar la lotería era la única forma de comprarse el auto. Quizás consiguió prestado el dinero para comprarlo, vendió algo para conseguirlo, o cualquier otra posibilidad.

Si A, entonces B. Cuando un enunciado de este tipo es verdadero, significa que si el enunciado A es verdad, entonces también lo es B. No establece nada para B cuando A es falso. Tampoco significa que si B es verdadero, entonces A también. Se denota como $A \Rightarrow B$, y se lee también como "A implica B".

En las dos interpretaciones incorrectas de arriba, la segunda corresponde al error de considerar que vale el **recíproco** de la afirmación (B implica A), mientras que en la primera la falacia surge de pensar que *negar el antecedente implica la negación de la consecuencia* (no ocurre A, entonces no ocurrirá B).

Lo que sí se puede deducir, suponiendo que la persona cumple con lo que afirma como si se tratara de un contrato, es que:

- Si *no* se compró el auto, entonces *no* se ganó la lotería, ✓

ya que afirmó que si ganaba, lo compraba. Esto se conoce como el **contrarrecíproco** de la afirmación hecha, y es posible establecer que $A \Rightarrow B$ es equivalente a

$$\text{negación de } B \Rightarrow \text{negación de } A.$$

Volviendo a la lista anterior de interpretaciones incorrectas, la segunda habría sido correcta si la persona hubiera afirmado que:

Me compro un auto ***solo si*** *gano la lotería.*

De nuevo, la expresión anterior *no* afirma que si gana la lotería entonces se compra un auto. Puede ocurrir que utilice todo el dinero para comprar otra cosa. Solo dice que ganar la lotería sería la única forma de comprarse un auto.

Esto nos conduce a pensar en un conectivo entre dos expresiones, que nos permita concluir que si cualquiera de ellas es cierta, la otra también. Para esto se combinan las frases anteriores para formar lo que se conoce como “si y solo si”:

Me compro un auto ***si y solo si*** *gano la lotería.*

De la veracidad de esta frase se deduce que:

- Si se compró el auto, entonces ganó la lotería. ✔
- Si ganó la lotería, entonces se comprará el auto. ✔
- Si *no* gana la lotería, entonces *no* se comprará el auto. ✔
- Si *no* se compró el auto, entonces *no* ganó la lotería. ✔

***A* si y solo si *B*.** Este conectivo se utiliza para relacionar dos enunciados, y significa que la validez de cualquiera de ellos implica la validez del otro. Esto se denota simbólicamente como $A \Leftrightarrow B$, ya que significa ambas cosas a la vez: $A \Rightarrow B$ y $B \Rightarrow A$.

Para considerar otro ejemplo, cercano y real, recordemos un enunciado en relación al COVID-19, que todos conocimos durante la pandemia. Sabíamos que:

Si una persona tiene más de 60 años, entonces es considerada de riesgo.

En la afirmación anterior tenemos:

- A: Tener más de 60 años.
- B: Ser persona de riesgo.

Sabemos que A implica B. ¿Se puede deducir de esto alguna de las siguientes afirmaciones?

(a) Si es persona de riesgo, entonces tiene más de 60 años.
(b) Si no tiene más de 60 años, entonces no es persona de riesgo.
(c) Si no es persona de riesgo, entonces no tiene más de 60 años.

Claramente (a) y (b) son conclusiones incorrectas: una persona puede ser de riesgo por tener alguna enfermedad aunque sea muy joven. En cambio, la afirmación (c) sí es correcta (ya que, si una persona tuviera más de 60 años, entonces sería de riesgo y como no lo es, no tiene más de 60 años), y corresponde al contrarrecíproco del enunciado dado.

Esto, que se ve tan claro con este ejemplo concreto, suele traer problemas cuando se trabaja con proposiciones matemáticas, en donde la situación es más abstracta. Por eso es conveniente tener siempre al alcance ejemplos cotidianos que permitan al alumno trasladar el mismo razonamiento a enunciados matemáticos. No solo en Matemática es importante utilizar las implicaciones de forma correcta para no llegar a conclusiones erróneas, también lo es en lo cotidiano. Es muy frecuente encontrar falacias lógicas en discursos: se utilizan argumentos que parecen válidos para atacar o invalidar otra opinión, pero no lo son. Esto puede ser intencional o, simplemente, por descuido o ignorancia.

En el enunciado sobre el COVID-19, tener más de 60 años era una condición *suficiente* para ser considerada personada de riesgo, pero no *necesaria*. Trabajaremos sobre esto a continuación.

Si el enunciado $A \Rightarrow B$ es verdadero, decimos que la condición A es **suficiente** para que se cumpla la condición B. Por ejemplo, podemos reescribir la frase referida a un polígono:

Si es un cuadrado, entonces es un cuadrilátero,

como

Ser un cuadrado $\Rightarrow$ *ser un cuadrilátero.*

Así, el hecho de que un polígono sea un cuadrado es condición suficiente para que sea un cuadrilátero. Claramente el recíproco no es cierto: existen cuadriláteros que no son cuadrados. Por eso, tampoco podemos concluir nada de cuando no vale A: que un polígono no sea un cuadrado no implica que no sea un cuadrilátero.

Cuando el enunciado $A \Rightarrow B$ es verdadero también se dice que B es condición **necesaria** para que se cumpla la condición A. Así, ser un cuadrilátero es una condición necesaria para ser un cuadrado (y no al revés). Luego, si un polígono *no* es un cuadrilátero, entonces *no* es un cuadrado.

Cuando $A \Leftrightarrow B$ vale, se dice que A y B son **equivalentes**. Así, la validez de la condición A es necesaria y suficiente para la validez de B.

Por ejemplo, puede probarse que las siguientes afirmaciones sobre un número entero son verdaderas:

- que su última cifra sea 4 es condición suficiente para ser un número par (pero no necesaria);

- que sea par es condición necesaria para ser divisible por 6 (pero no suficiente);
- que su última cifra sea 0 es condición necesaria y suficiente para ser divisible por 10.

Retomemos el ejemplo del inicio de la sección para responder, a partir de lo trabajado previamente, las preguntas allí planteadas sobre las soluciones ficticias de la ecuación (1). Cuando se presentan ecuaciones con raíces cuadradas, la forma usual de resolverlas es elevar ambos miembros al cuadrado. Sin embargo, la ecuación que se obtiene al hacer esto *no* es equivalente a la original. Más precisamente, por la propiedad uniforme del producto para números reales se tiene que $x = y$ implica que $x \cdot c = y \cdot c$ para todo número real c. En particular, tomando $c = x$ se obtiene que $x^2 = y \cdot x = y^2$, puesto que partimos del supuesto que $x = y$. Así, probamos que

$$x = y \quad \Rightarrow \quad x^2 = y^2.$$

Es decir, $x = y$ *implica* $x^2 = y^2$, pero el recíproco no es cierto. Esto significa que $x^2 = y^2$ no implica necesariamente que $x = y$. Para probarlo, basta con tomar $x = 1$ e $y = -1$, por ejemplo. Así, las ecuaciones

$$x = y \qquad \text{y} \qquad x^2 = y^2$$

no son equivalentes. Entonces, si en la resolución de la ecuación colocamos el símbolo $\Rightarrow$ para indicar implicación y usamos $\Leftrightarrow$ para equivalencia, tenemos que:

$$\begin{gathered} x + 4 = \sqrt{x + 10} \\ \Downarrow \\ (x + 4)^2 = x + 10 \\ \Updownarrow \\ x^2 + 8x + 16 = x + 10 \\ \Updownarrow \\ x^2 + 7x + 6 = 0. \end{gathered}$$

Así, queda claro que si la ecuación original tiene una solución, esta será solución de la segunda. Sin embargo, no toda solución de la segunda lo será de la primera. En otras palabras, *ser solución de la ecuación cuadrática es condición necesaria para ser solución de la original, pero no es suficiente.*

Esto significa que las soluciones de la ecuación original deberán buscarse entre las de la segunda, siendo esta equivalente a la última ecuación. Es por este motivo que aparecen soluciones ficticias, aun cuando cada paso sea correcto. Por lo tanto, la verificación deja de ser un paso opcional para convertirse en parte de la resolución ya que, de todos los valores hallados, se deben determinar cuáles son soluciones de la ecuación dada y cuáles no.

§3. Disyunción y conjunción

Nos abocaremos ahora a la disyunción "o" y a la conjunción "y". Dejaremos de lado aquí lo que en lógica se conoce como *disyunción exclusiva*, que coloquialmente también se expresa mediante el uso de "o", donde una afirmación es verdadera si vale una y solo una de las opciones. Por ejemplo, si uno gana un sorteo y nos dicen que podemos elegir como premio un automóvil o un viaje, queda claro que no podemos obtener ambas cosas. En un sentido similar se trabaja con proposiciones matemáticas, pero no lo analizaremos aquí.

En este trabajo consideraremos solamente la *disyunción inclusiva* "o", que es un conector entre dos o más proposiciones que hace que el enunciado sea verdadero si al menos una las proposiciones lo es. Para comprenderlo, supongamos que una empresa busca cubrir un puesto de trabajo y el requisito para ello es:

Saber escribir en inglés o en francés.

¿Cuándo una persona cumple con el requisito? Claramente, si sabe escribir en inglés, o en francés, o en ambos idiomas. Si no cumple con ninguna de esas dos cosas, entonces no cumple con el requisito de la empresa. En cambio, supongamos que para el puesto se pide:

Saber escribir en inglés y en francés.

En este caso las condiciones se conectan mediante la *conjunción* "y", por lo que solo cumplirán con el requisito aquellas personan que sepan escribir en ambos idiomas. Quien no sepa hacerlo en al menos uno de ellos, no lo satisface.

Agreguemos ahora una implicación, como en el siguiente enunciado:

Si se obtienen al menos 60 puntos en el examen y se asiste al 80 % de las clases, entonces se aprueba la materia. (†)

En la frase anterior aparece la conjunción "y" entre las dos condiciones suficientes para aprobar la materia. Es decir, si se cumplen *ambas* condiciones, se aprueba la materia. Entonces, ¿qué podemos concluir acerca de un estudiante que *no* aprobó la materia? ¿Que falló necesariamente en ambas cosas? Claramente no, pero sí que falló en al menos una: si un estudiante no aprobó la materia, entonces o bien no obtuvo el mínimo de 60 puntos en el examen, o bien no asistió lo suficiente a clases (o quizás ninguna de las dos cosas). Aparece aquí la disyunción inclusiva "o" entre ambas condiciones.

Consideremos, en cambio, la afirmación

Si se obtienen al menos 60 puntos en el examen o si se presenta una monografía, entonces se aprueba la materia.

Ahora existe una disyunción entre ambas condiciones: con que cualquiera de las dos se cumpla (o ambas, si encontramos a alguien muy aplicado), es suficiente para aprobar la materia. Entonces, si alguien no aprueba la materia, podemos concluir que no hizo ninguna de las dos cosas: no aprobó el examen y no presentó una monografía. En este caso aparece la conjunción "y" entre ambas condiciones.

§4. Enunciados matemáticos

Trabajaremos con algunos enunciados matemáticos variados y básicos, determinando y demostrando su valor de verdad con el objetivo de aplicar y afianzar todo lo trabajado previamente.

Enunciado 1. *No siempre el producto de dos números irracionales es otro número irracional.*

Respuesta: El enunciado puede reescribirse como "existen números irracionales z y w tales que $z \cdot w$ no es un número irracional". Para probar que dichos números existen, podemos considerar $z = \sqrt{2}$ y también $w = \sqrt{2}$. Entonces

$$z \cdot w = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = 2,$$

que no es un número irracional. Esto prueba que el enunciado es **verdadero**. Existen muchos otros ejemplos, como $z = \sqrt{3}$ y $w = \sqrt{12}$, o $z = \sqrt{2}$ y $w = \sqrt{8}$. #

Enunciado 2. *La suma de dos números pares es siempre otro número par.*

Respuesta: Notar que la expresión "es siempre" es una de las formas usadas para referirse al cuantificador universal "para todo". Así, lo que afirma el enunciado es que $m + n$ es un número par, *para toda* elección de números pares m y n. Consideremos algunos ejemplos para comprender: $4 + 6 = 10$; $22 + 6 = 28$; $12 - 24 = -12$. Como mencionamos, *no* alcanza con la verificación de algunos casos para concluir que una cierta afirmación sea cierta. Simplemente nos conduce a conjeturar que *puede llegar a ser verdadera*, pero deberemos demostrarla de forma general. Para ello, sean m y n dos números pares. Luego, existen números enteros p y q tales que $m = 2p$ y $n = 2q$. Entonces:

$$m + n = 2p + 2q = 2(p + q).$$

Por la ley de cierre de la suma en los números enteros, $p + q$ es un número entero y, por lo tanto, $m + n$ es un número par. Así, la afirmación es **verdadera**. #

Enunciado 3. $x \leq x^2$ *para todo número real* x.

Respuesta: Como antes, tomemos algunos valores para ver qué ocurre: $2 \leq 2^2$; $3 \leq 3^2$; $-\frac{1}{3} \leq (-\frac{1}{3})^2$. Sin embargo, esto ya no ocurre si tomamos números reales entre 0 y 1. Por ejemplo, si $x = \frac{1}{2}$ entonces $x^2 = \frac{1}{4}$, que es menor que x. Esto demuestra que la afirmación es **falsa**. La primera parte ilustra que a veces una "mala" elección de ejemplos puede conducirnos a un valor de verdad incorrecto, y que no es suficiente con exhibir miles (ni infinitos) ejemplos para probarlo. #

Enunciado 4. $x \leq x^2$ *para todo número real* $x \geq 1$.

Respuesta: A diferencia del enunciado anterior, ahora se agrega la restricción $x \geq 1$. Los ejemplos que tomamos antes muestran que este enunciado *puede ser verdadero*. De hecho lo es, y vamos a demostrarlo de forma general: tomemos un número real $x \geq 1$. En particular, x es positivo, por lo que podemos multiplicar por x esta desigualdad a ambos lados y el orden se mantiene. Así:

$$x \cdot x \geq 1 \cdot x,$$

es decir, $x^2 \geq x$ como afirma el enunciado, que resulta ahora **verdadero**. #

El argumento que usaremos para justificar la respuesta del siguiente enunciado utiliza lo trabajado sobre las implicaciones, y lo que podemos deducir o no de ellas.

Enunciado 5. *Existe un triángulo rectángulo cuyos lados miden* 5, 4 *y* 8 *unidades de longitud.*

Respuesta: Notar que el enunciado no se refiere a la existencia de cualquier triángulo con esas longitudes para sus lados, sino que especifica además que debe ser *rectángulo*. Si dicho triángulo existiera, por ser rectángulo sabemos que cumple con lo establecido en el teorema de Pitágoras. Es decir, recordando que la hipotenusa es el lado de mayor longitud, debería ocurrir que

$$8^2 = 5^2 + 4^2.$$

Pero el lado izquierdo de esta igualdad es 64, mientras que el derecho es 41. Así, puesto que no vale lo que afirma el teorema de Pitágoras, dicho triángulo no puede existir y el enunciado resulta **falso**. #

Al igual que el Enunciado 2, la siguiente afirmación hace referencia a la cerradura de un cierto conjunto numérico bajo una operación determinada.

Enunciado 6. *Si* m *y* n *son números impares, entonces el producto* mn *también lo es.*

Respuesta: Este enunciado puede reescribirse usando cuantificadores como: mn es un número impar *para toda* elección de m y n impares. Como antes, probando con varios valores podemos intuir que es verdadero, así que intentemos demostrarlo. Sean m y n dos números impares cualesquiera. Así, existen números enteros p y q tales que $m = 2p + 1$ y $n = 2q + 1$. Luego

$$mn = (2p + 1)(2q + 1) = 4pq + 2p + 2q + 1 = 2(2pq + p + q) + 1.$$

Introducimos ahora una abreviatura k para la expresión $2pq + p + q$, que resulta ser un número entero por la ley de cierre del producto y de la suma para números enteros. Esto implica que $mn = 2k + 1$, es decir, mn es impar y el enunciado es **verdadero**. #

Consideremos, finalmente, algunos enunciados que contienen disyunción o conjunción.

Enunciado 7. *Si un número entero mayor o igual que* 6 *es divisible por* 2 *o por* 3*, entonces es divisible por* 6*.*

Respuesta: La afirmación es **falsa**. Para demostrar que lo es, basta con exhibir un número entero mayor o igual que 6 que sea divisible por 2 o por 3, pero no por 6. Por ejemplo, el número 15 es divisible por 3 pero no por 6; o el número 14 que es divisible por 2 pero no por 6. Sabemos que el enunciado se convierte en verdadero si cambiamos "o" por "y" pero, como ya mencionamos antes, enunciar el criterio correctamente no alcanza para probar que el dado es falso. #

Enunciado 8. *Si la última cifra de un número entero es* 0 *o* 5*, entonces es divisible por* 5*.*

Respuesta: La afirmación es **verdadera**. Esto es lo que enuncia precisamente el criterio de divisibilidad por 5. Sin embargo, al dar un enunciado así en la escuela secundaria, deberíamos pensar qué justificación se espera por parte de un alumno ya que, en general, no domina una demostración de este hecho en ese nivel , y solo podría limitarse a decir que "así es el criterio". #

Enunciado 9. *Sean* m *y* n *dos números enteros. Si el producto* mn *es un número par, entonces* m *o* n *es un número par.*

Respuesta: En el Enunciado 6 se establece y demuestra que

Si m *y* n *son números impares, entonces el producto* mn *también lo es.*

Imitando el razonamiento realizado debajo de (†), tenemos que si el producto mn *no* es impar (lo que significa que es par), entonces debió haber fallado alguna de las dos condiciones sobre m y n. Es decir, al menos uno de los dos debe ser un número par. Esto prueba que el Enunciado 9 es **verdadero**. #

Finalizamos este trabajo con un enunciado sobre un criterio de divisibilidad que puede ser factible de ser demostrado en la escuela secundaria. Aunque los criterios suelen enunciarse dando condiciones suficientes que garanticen la divisibilidad como en el enunciado anterior, los mismas son, además, necesarias. Esto se verá en el siguiente ejemplo.

Enunciado 10. *Un número es divisible por* 6 *si y solo si es divisible por* 2 *y por* 3*.*

Respuesta: En este caso el enunciado contiene un "si y solo si", por lo que está diciendo que:

- si un número es divisible por 6, entonces es divisible por 2 y por 3;
- si un número es divisible por 2 y por 3, entonces es divisible por 6.

Para que el enunciado sea verdadero deben cumplirse *ambas* de estas implicaciones. Si al menos una falla, sería falso. Es sencillo ver que la primera se cumple: si un número m es divisible por 6, entonces existe un número entero k tal que $m = 6k$. Luego,

$$m = 6k = (3 \cdot 2)k = 3(2k) = 2(3k),$$

lo que implica que m es divisible tanto por 2 como por 3, ya que $2k$ y $3k$ son números enteros por la ley de cierre para el producto de números enteros.

Para probar la segunda implicación, supongamos que m es divisible tanto por 2 como por 3. Entonces existen números enteros p y q tales que $m = 2p$ y $m = 3q$. De esto se deduce que

$$2p = 3q.$$

Esta igualdad nos dice que $3q$ es un número par que es producto de dos números enteros. El Enunciado 9 establece que, entonces, al menos uno de los dos factores debe ser par. Puesto que 3 no puede serlo, tenemos que q lo es. Es decir, $q = 2t$, para algún número entero t. Así, tenemos que

$$m = 3q = 3(2t) = 6t,$$

lo que prueba que m es divisible por 6. Entonces el enunciado es **verdadero**. #

Conclusiones finales

Como se mencionó en la introducción, la lógica formal y las demostraciones matemáticas no se abordan, en general, en la escuela secundaria. Sin embargo, el desarrollo del sentido de argumentación puede comenzar a desarrollarse de forma coloquial y sin que esto implique pérdida de rigurosidad. Trabajar en enunciados cotidianos que involucren cuantificadores, implicaciones, disyunciones y conjunciones permiten al alumno adquirir y naturalizar la forma de razonar y argumentar lógica y correctamente. Identificar y debatir las formas incorrectas de hacerlo también puede resultar una aporte significativo en esa dirección. Luego, el paso a enunciados matemáticos básicos podría hacerse de manera natural, y constituir así una base sólida para que, quienes lo necesiten posteriormente, puedan construir técnicas para comprender y comunicar demostraciones de mayor nivel y complejidad. El siguiente fragmento, extraído de (Solow, 1993), describe esta idea de una forma muy certera y significativa:

> Para jugar al ajedrez, usted debe aprender primero cómo se mueve cada una de las piezas. Solamente después de que estas reglas han sido asimiladas por su subconsciente, usted podrá concentrar toda su atención en aspectos creativos como las estrategias, tácticas, etc. De igual forma sucede en matemáticas.

Eduardo Sáenz de Cabezón dijo "Las matemáticas nos hacen más libres y menos manipulables". Considero que el desarrollo del sentido lógico que permite analizar, razonar y argumentar de forma correcta sobre la veracidad o falsedad de un enunciado es un claro reflejo de esta afirmación.

Agradecimientos. Se agradece a quienes realizaron la tarea de ser revisores de este artículo por su minuciosa lectura y sus detalladas sugerencias y correcciones que, sin dudas, mejoraron la calidad del trabajo.

Bibliografía

Benitez, F., y Carena, M. (2021). Reflexiones acerca de la definición de radicación y su relación con la construcción de nuevos conceptos. *Rev. Educ. Mat.*, *36*(1), 9–26.

Carena, M. (2021). *Manual de matemática preuniversitaria: edición ampliada y corregida*. 2da ed., Ediciones UNL, Santa Fe.

Solow, D. (1993). *Cómo entender y hacer demostraciones en Matemáticas*. Limusa-Noriega Editores. (Traducción del trabajo original *How to read and do proofs*).

Marilina Carena
CONICET - Facultad de Ingeniería Química (UNL)
(✉) *marilcarena@gmail.com*

Recibido: *4 de febrero de 2023.*
Aceptado: *22 de junio de 2023.*
Publicado en línea: *3 de agosto de 2023.*