Revista de Educación Matemática
Volumen 38, N° 1 (2023), páginas 43 – 52
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Artículos de Matemática

RAÍCES DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

Eduardo Degiorgio, Guillermo Farías

Resumen. El objetivo de este trabajo es obtener una fórmula general para hallar las raíces de funciones como

$$f(x) = k\,\mathrm{sen}(a(x-c)) + b, \qquad g(x) = k\cos(a(x-c)) + b,$$

para diferentes valores de a, b, c y k. Para ello se comienza hallando, para cada una de las funciones, una raíz x_R y la abscisa x_M de un punto máximo adyacente a x_R. A partir de la distancia entre estos dos valores y del período de la función se determinan todas las demás raíces.

Abstract. The aim of this work is to obtain a general formula for the roots of functions of the type

$$f(x) = k\sin(a(x-c)) + b, \qquad g(x) = k\cos(a(x-c)) + b,$$

for differents values of a, b, c and k. We start finding, for each one of the given functions, a root x_R and the abscise x_M of a maximum point which is adjacent of x_R. From the distance between these two values and the period of the function, all the other roots are determined.

Introducción

Hallar las raíces de una función H es uno de los problemas más antiguos de la Matemática, y significa encontrar los valores de x para los que $H(x) = 0$. Gráficamente, equivale a determinar la abscisa de cada punto de intersección de la gráfica de H con el eje $y = 0$.

La importancia de encontrar las raíces de una función se debe a que estas aparecen con mucha frecuencia en la resolución de problemas pertenecientes a diversas ramas de la Matemática, como el cálculo, el álgebra o las ecuaciones diferenciales, entre otras.

Siempre que se pueda, resulta útil contar con una fórmula que permita obtener explícitamente todas las raíces de una función. Por fórmula *explícita* se entiende a toda aquella que permita calcular las raíces de la función a partir

Palabras clave: Raíces de una función, seno, coseno.
Keywords: Roots of a function, sine, cosine.

de expresiones que involucren solamente a los coeficientes y/o parámetros de la función. Este es el caso de la resolvente para funciones cuadráticas donde, a partir de la función inversa de $h\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ definida como $h(x) = x^2$, se pueden determinar explícitamente las raíces reales de cualquier otra función cuadrática. Más precisamente, si $H(x) = ax^2 + bx + c$ (con $a \neq 0$) tiene raíces reales, están dadas por

$$x = \frac{-b \pm h^{-1}(b^2 - 4ac)}{2a}.$$

Dado el éxito conseguido con la función cuadrática, es natural preguntarse si algo similar ocurre con funciones polinomiales de grado mayor que 2. De manera más formal, es natural plantearse si siempre es posible calcular las raíces de funciones polinomiales mediante radicales, es decir, con fórmulas en las que se utilizan solamente los coeficientes de los polinomios junto a las operaciones de suma, resta, producto y división, y las inversas de las funciones $p(x) = x^n$ para $n = 2, 3, \ldots$

Para el caso de raíces reales de polinomios cúbicos hay una respuesta afirmativa y fue proporcionada por Cardano quien, mediante hábiles manipulaciones algebraicas, consigue reducir el caso cúbico al cuadrático (no obstante, no toda raíz real de una función cúbica se obtiene con la fórmula de Cardano, lo que llevó a Cardano a formularse una pregunta muy interesante para la época: ¿cuántas raíces tiene una ecuación cúbica?). Adaptando las técnicas de Cardano, su alumno Ferrari consigue una fórmula para determinar raíces de polinomios de grado 4, reduciendo el problema a encontrar raíces de un polinomio de grado 3.

Sin embargo, no es posible seguir con esta idea para polinomios de grado 5 o más. Más precisamente, Ruffini, y posteriormente Abel, establecen que no es posible hallar una fórmula para las raíces de una ecuación polinómica *general* de grado mayor o igual que 5, mediante una cantidad finita de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y raíces de los coeficientes (una descripción detallada sobre el desarrollo de la teoría de ecuaciones polinómicas puede verse en (Tignol, 2016)). Así, por ejemplo, las inversas de $p(x) = x^n$ $(n = 2, 3, \ldots)$ junto a las operaciones de suma, resta, producto y división, no son suficientes para dar una fórmula en términos de los coeficientes para todas las raíces de un polinomio general de grado 5.

El objetivo de este trabajo es probar que es posible hallar una fórmula para una familia de funciones que se obtiene al modificar

$$F(t) = \operatorname{sen}(t) \qquad \text{y} \qquad G(t) = \cos(t).$$

Concretamente, obtendremos una fórmula general para determinar todas las raíces de funciones de la forma

$$f(x) = k \operatorname{sen}(a(x-c)) + b \qquad \text{y} \qquad g(x) = k\cos(a(x-c)) + b, \tag{1}$$

para diferentes valores de a, b, c y k (siendo a y k distintos de cero), en términos de las funciones inversas de F y G, respectivamente.

Recordemos que la función $F(t) = \operatorname{sen}(t)$ representa la variación de la ordenada de un punto Q situado en el círculo unitario centrado en el origen de coordenadas, en función de su ángulo t medido en radianes (ver Figura 1). Por otra parte, la función $G(t) = \cos(t)$ representa la variación de la abscisa del punto en función de su ángulo t.

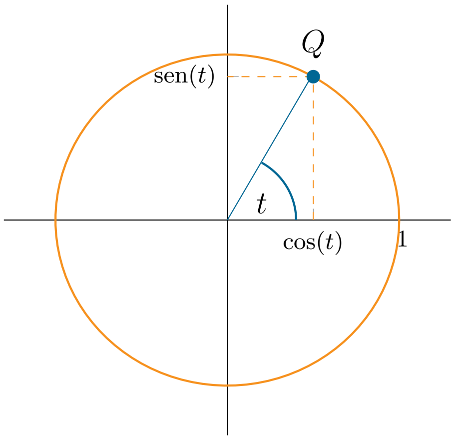


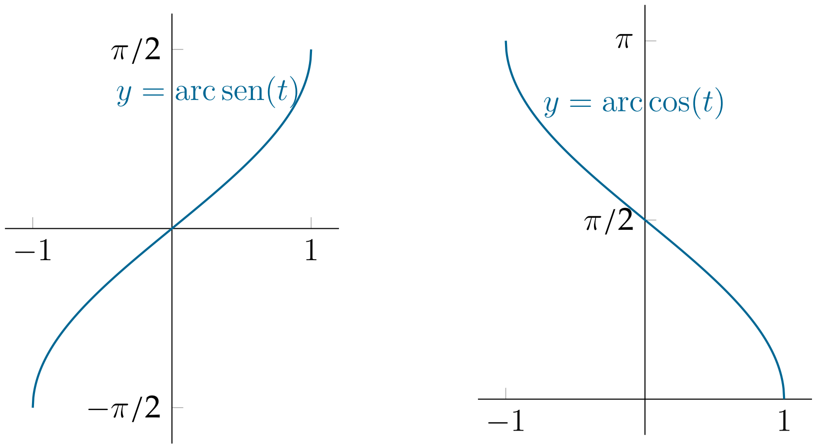
FIGURA 1. Ángulo t determinado por un punto Q; $\operatorname{sen}(t)$ y $\cos(t)$.

De la definición de F y G se deducen algunas propiedades muy conocidas que nos resultará útil recordar aquí:

- Si el punto Q parte de la posición $t = 0$, entonces Q dará una "vuelta completa" en sentido antihorario cuando t sea 2π. Es decir, en ese momento vuelve a su posición inicial, por lo que $F(0) = F(2\pi)$ y $G(0) = G(2\pi)$ y, así, los valores comenzarán a repetirse de forma periódica a medida que Q recorra el círculo, sin importar cuántas vueltas haya dado. En otras palabras, ambas funciones tienen período 2π: $F(x + 2\pi n) = F(2\pi)$ y $G(x + 2\pi n) = G(2\pi)$ para todo entero n.
- Antes que comience la segunda vuelta, la ordenada de Q habrá tomado dos veces el valor cero: cuando $t = 0$ y cuando $t = \pi$. Estos valores son las únicas dos raíces de F en $[0, 2\pi)$, y podremos obtener todas las raíces de F sumando múltiplos enteros del período a cada una de ellas.
- Similarmente, la abscisa de Q vale cero dos veces antes de comenzar la segunda vuelta: cuando $t = \frac{\pi}{2}$ y cuando $t = \frac{3\pi}{2}$. Como antes, obtendremos todas las raíces de G sumando a estos valores múltiplos enteros del período 2π.
- La imagen de ambas funciones es, claramente, el intervalo $[-1, 1]$.

El hecho de ser periódicas hace que no sean inyectivas si consideramos a todos los reales como su dominio. Sin embargo, sí lo serán si restringimos adecuadamente el dominio de cada una. Precisamente, un punto Q sobre el círculo unitario recorre todas alturas diferentes cuando su ángulo pertenece al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, mientras que las abscisas no se repiten si el ángulo va desde 0 a π. Así, con el fin de que resulten biyectivas y disponer de sus funciones inversas, consideramos $F\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ y $G\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$.

Las función inversa de F se denomina *arcoseno* y se denota como $\operatorname{arc\,sen}$, por lo que su dominio es el intervalo $[-1, 1]$ y su imagen es $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Similarmente, la función inversa de G se llama *arcocoseno* y se indica como $\operatorname{arc\,cos}$, su dominio es el intervalo $[-1, 1]$ y su imagen es $[0, \pi]$.



Volviendo a las funciones f y g dadas en (1), cada uno de los parámetros involucrados produce un efecto sobre la gráfica de las funciones F y G:

- a modifica el período, el cual es $P = \frac{2\pi}{|a|}$,
- b produce un desplazamiento vertical,
- c produce un desplazamiento horizontal,
- k modifica la amplitud.

En la Figura 2 se puede ver la gráfica de f para los valores $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$ y $k = 4$.

Como el objetivo es hallar raíces de f y g, lo primero que debemos hacer es asegurarnos de que existan. Para ello se deben analizar los valores posibles de los parámetros a, b, c y k. Notar que a y c no influyen en el hecho de que estas funciones tengan o no raíces, ya que modifican sus gráficas solo en sentido horizontal: a dilata o contrae en dicho sentido según si su valor absoluto es menor o mayor que 1, mientras que c desplaza hacia izquierda o derecha. Quienes sí resultan determinantes para la existencia de raíces son los parámetros b y k.

El teorema de Bolzano del valor intermedio establece que si una función continua toma en los extremos de un intervalo $[u, v]$ valores de signo opuesto, entonces la función admite, al menos, una raíz en dicho intervalo. Así, sabiendo

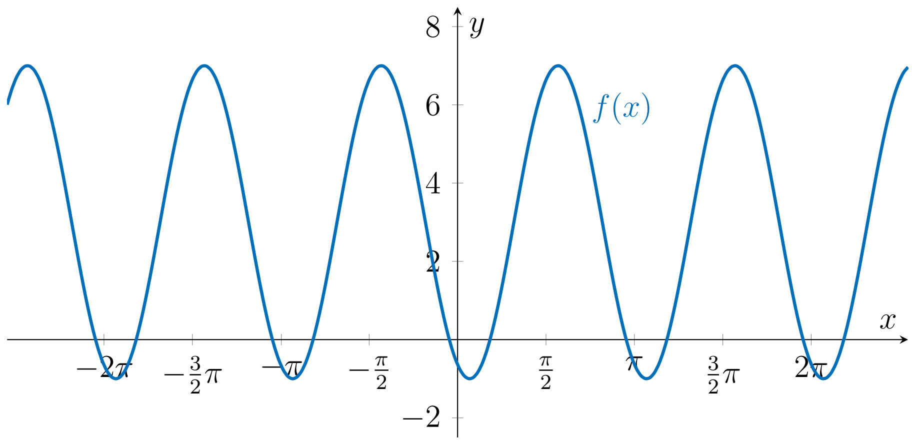


FIGURA 2. Gráfica de $f(x) = 4\,\mathrm{sen}(2(x-1)) + 3$.

que estamos trabajando con funciones continuas, para que f tenga raíces debe ocurrir que su máximo sea mayor o igual que cero y que su mínimo sea menor o igual que cero. En otras palabras, no queremos que la gráfica quede completamente por arriba del eje horizontal, ni tampoco completamente por abajo, para que existan raíces. Esto se consigue con la relación

$$|b| \leq |k|,$$

es decir, $-|k| \leq b \leq |k|$. Esta desigualdad se deduce del hecho que, si $k > 0$, entonces

$$-k + b \leq k\,\mathrm{sen}(a(x-c)) + b \leq k + b,$$

mientras que

$$-k + b \geq k\,\mathrm{sen}(a(x-c)) + b \geq k + b$$

cuando $k < 0$. Así, en cualquiera de los casos, el máximo es $M = |k| + b$ y el mínimo es $m = -|k| + b$, porque la función seno toman valores entre -1 y 1. Lo mismo vale para g. Queremos $M \geq 0$ y $m \leq 0$, lo cual equivale a $-|k| \leq b \leq |k|$. Así, el teorema del valor intermedio garantiza la existencia de raíces.

Cuando no hay desplazamiento vertical, es decir, cuando $b = 0$, es suficiente con hallar una sola raíz, y las demás se determinan fácilmente a partir de ella y el período P, sumando múltiplos enteros de $\frac{P}{2}$ (esto es, $\frac{n\pi}{|a|}$ con $n \in \mathbb{Z}$). El problema surge cuando $b \neq 0$ ya que esto no funciona debido a que, al desplazar verticalmente la gráfica, la distancia entre dos raíces consecutivas deja de ser igual a $\frac{P}{2}$. Sin embargo, lo que no modifica b es el hecho de que dentro de cada intervalo de longitud menor estricta que P hay, a lo sumo, dos raíces. Así, si encontramos dos raíces x_R y x_R^* que disten menos que P, por la periodicidad de las funciones consideradas, basta con trasladar cada una de ellas para obtener todas las demás raíces.

En este trabajo proponemos calcular, primero, una raíz x_R de la función utilizando la respectiva función inversa. Luego, hallamos la abscisa x_M de un punto máximo adyacente a x_R. A partir de la distancia entre estos dos valores, se obtiene otra raíz x_R^* que resulta "vecina" a x_R, en el sentido que distan, a los sumo, $\frac{P}{2}$. Trasladando cada una de ellas mediante múltiplos enteros de P, obtenemos una fórmula para todas las raíces de las funciones f y g, en términos de los coeficientes y las funciones inversas de F y G, respectivamente.

El método

Analicemos primero el caso de f. Para hallar una raíz de la función f simplemente planteamos la ecuación

$$k \operatorname{sen}(a(x-c)) + b = 0,$$

la cual equivale a

$$\operatorname{sen}(a(x-c)) + \frac{b}{k} = 0.$$

Así, las raíces de f coinciden con las de $\tilde{f}$, siendo $\tilde{f}(x) = \operatorname{sen}(a(x-c)) + \frac{b}{k}$. Al resolver cualquiera de estas ecuaciones obtenemos

$$\boxed{x_R = c + \frac{\operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{b}{k}\right)}{a}.}$$

Notar que la relación entre b y k implica que el número x_R está bien definido.

Como mencionamos en la Introducción, para el caso $b \neq 0$, no es posible obtener el resto de las raíces de $\tilde{f}$ sumando múltiplos enteros de $\frac{P}{2}$. Para solucionar esto, proponemos comenzar hallando la abscisa de un punto máximo de $\tilde{f}$ adyacente a x_R. Para ello recordamos que el máximo de $\tilde{f}$ es $M = 1 + \frac{b}{k}$, y planteamos

$$\operatorname{sen}(a(x-c)) + \frac{b}{k} = 1 + \frac{b}{k}.$$

Sabiendo que $\operatorname{arc\,sen}(1) = \pi/2$, despejamos x para obtener

$$x_M = c + \frac{\pi}{2a} \, .$$

Para nuestro objetivo vamos a considerar la distancia d entre la raíz x_R y x_M. Supongamos, primero, que $a > 0$. Entonces $x_M > x_R$, por lo que

$$d = c + \frac{\pi}{2a} - c - \frac{\operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{b}{k}\right)}{a} = \frac{\pi}{2a} - \frac{\operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{b}{k}\right)}{a}.$$

La idea del método para hallar todas las raíces es:

(i) Notar que la raíz "siguiente" a x_R (a la derecha de x_R) está a distancia d del valor que denotamos con x_M. En otras palabras, para llegar a dicha raíz hay que "avanzar" una distancia igual a $2d$ desde x_R. Así, tenemos que

$$\boxed{x_R^*} = x_R + 2d = \boxed{c + \frac{\pi - \operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{b}{k}\right)}{a}}.$$

(ii) Puesto que $d \leq \frac{P}{2}$, las demás raíces se obtienen sumando múltiplos enteros del período P (es decir, nP con $n \in \mathbb{Z}$) a estas dos raíces x_R y x_R^*.

Finalmente, notar que si $a < 0$ lo único que pasa es que el valor x_M queda a la izquierda de x_R (ver Figura 3). Así, la raíz "vecina" se obtiene **restando** de x_R el doble de la distancia entre x_R y x_M (que ahora es $-d$, siendo d el valor definido anteriormente), obteniendo el **mismo valor** para x_R^*, pero ahora con $x_R^* < x_R$.

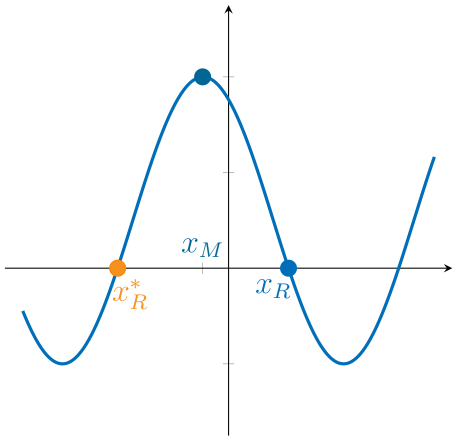


FIGURA 3. Caso $a < 0$.

Por último, para lograr una fórmula más simple para las raíces, usaremos el siguiente hecho que nos permitirá reescribir lo obtenido.

- Si n es un entero arbitrario, entonces
$$nP = \frac{2\pi n}{|a|} = \frac{2\pi \ell}{a},$$
siendo $\ell = \pm n$ según el signo de a. Es decir, múltiplos enteros de P equivalen a múltiplos enteros de $\frac{2\pi}{a}$. Esto nos permite eliminar el valor absoluto de a y operar. Así,
$$x_R + nP = c + \frac{\operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{b}{k}\right) + 2\pi\ell}{a},$$
$$x_R^* + nP = c + \frac{\pi - \operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{b}{k}\right) + 2\pi\ell}{a}.$$

Así, concluimos que:

Todas las raíces de la función $f(x) = k\,\mathrm{sen}(a(x-c)) + b$, donde a y k son distintos de cero y $-|k| \le b \le |k|$, se obtienen como:

$$R_\ell = c + \frac{\operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{b}{k}\right) + 2\pi\ell}{a},$$

$$R_\ell^* = c + \frac{(2\ell+1)\pi - \operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{b}{k}\right)}{a},$$

con $\ell \in \mathbb{Z}$.

Pasemos ahora al caso de g. La idea central es la misma, solamente cambian algunos valores. Aquí tenemos que

$$x_R = c + \frac{\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{b}{k}\right)}{a}, \quad x_M = c,$$

donde hemos usado que $\operatorname{arc\,cos}(1) = 0$ para determinar la abscisa x_M de un punto máximo de $\tilde{g}(x) = \cos(a(x-c)) + \frac{b}{k}$, adyacente a x_R (menor o mayor que x_R, según el signo de a).

Si $a > 0$, la distancia entre x_R y x_M es

$$d = \frac{\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{b}{k}\right)}{a},$$

ya que x_M es menor que x_R. Así, la otra raíz se obtiene restando de x_R el doble de esta distancia:

$$x_R^* = x_R - 2d = c - \frac{\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{b}{k}\right)}{a}.$$

Si $a < 0$, entonces x_M es mayor que x_R, por lo que la otra raíz se obtiene sumando a x_R el doble de la distancia entre x_R y x_M que, ahora, es $-d$, llegando al mismo valor para x_R^*. Nuevamente tenemos que $d \le \frac{P}{2}$, por lo que las demás raíces se obtienen sumando múltiplos enteros de P a x_R y x_R^*.

Para obtener una fórmula final más simple para las raíces recordamos que, como vimos antes, múltiplos enteros de P equivalen a múltiplos enteros de $\frac{2\pi}{a}$, por lo que podemos concluir que:

Todas las raíces de la función $g(x) = k\cos(a(x-c)) + b$, donde a y k son distintos de cero y $-|k| \le b \le |k|$, se obtienen como:

$$R_\ell = c + \frac{\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{b}{k}\right) + 2\pi\ell}{a},$$

$$R_\ell^* = c + \frac{2\pi\ell - \operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{b}{k}\right)}{a},$$

con $\ell \in \mathbb{Z}$.

Haciendo clic en los siguientes códigos QR, o escaneando los mismos, se pueden observar los resultados de las fórmulas obtenidas para las raíces de f y g, respectivamente, de forma gráfica y numérica mediante GeoGebra para diferentes valores de los parámetros:

Para finalizar, presentamos casos particulares de los parámetros b y k que permiten calcular fácilmente los valores de $\operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{b}{k}\right)$ y $\arccos\left(-\frac{b}{k}\right)$, para obtener expresiones explícitas para las raíces de las funciones correspondientes. Más precisamente, consideremos primero el caso $b = k$, es decir,

$$\bar{f}(x) = k\,\mathrm{sen}(a(x-c)) + k \qquad \text{y} \qquad \bar{g}(x) = k\cos(a(x-c)) + k,$$

con a y k no nulos. En este caso, puesto que $\operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{b}{k}\right) = -\frac{\pi}{2}$ y $\arccos\left(-\frac{b}{k}\right) = \pi$, de la fórmula obtenida se puede concluir que todas las raíces de $\bar{f}$ están dadas por

$$R_\ell^{\bar{f}} = c + \frac{\pi(4\ell - 1)}{2a},$$

mientras que todas las raíces de $\bar{g}$ son

$$R_\ell^{\bar{g}} = c + \frac{\pi(2\ell + 1)}{a},$$

para $\ell \in \mathbb{Z}$ en ambos casos.

A su vez, cuando $b = -k$ tenemos que $\operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{b}{k}\right) = \frac{\pi}{2}$ y $\arccos\left(-\frac{b}{k}\right) = 0$, por lo que las raíces de

$$\hat{f}(x) = k\,\mathrm{sen}(a(x-c)) - k \qquad \text{y} \qquad \hat{g}(x) = k\cos(a(x-c)) - k,$$

para a y k distintos de cero, son

$$R_\ell^{\hat{f}} = c + \frac{\pi(4\ell + 1)}{2a} \qquad \text{y} \qquad R_\ell^{\hat{g}} = c + \frac{2\pi\ell}{a},$$

con $\ell \in \mathbb{Z}$.

Agradecimientos. Los autores desean agradecer a María Eugenia Maumary y a Marilina Carena por su enorme aporte y apoyo al artículo. También se agradece al editor así como al revisor/revisora de este artículo, por su minuciosa lectura y sus detalladas sugerencias y comentarios que mejoraron mucho la calidad del trabajo.

Bibliografía

Tignol, J.-P. (2016). *Galois' theory of algebraic equations* (Second ed.). World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ.

Eduardo Degiorgio
Alumno de la Escuela Industrial Superior (UNL)
(✉) *degiorgioeduardo@gmail.com*

Guillermo Farías
Alumno de la Escuela Industrial Superior (UNL)
(✉) *guillote369@gmail.com*

Recibido: *7 de septiembre de 2022.*
Aceptado: *30 de marzo de 2023.*
Publicado en línea: *27 de abril de 2023.*