Revista de Educación Matemática
Volumen 38, N° 3 (2023), páginas 4 – 24
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Aportes para la Enseñanza de la Matemática.

EN BÚSQUEDA DE LA *COMPLETITUD* PARA MEJORAR LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE COORDENADAS DE UN VECTOR EN UNA BASE DADA, EN ESTUDIANTES DE LAS CARRERAS DE INGENIERÍA Y LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Gisela P. Fitt y Silvia R. Raichman

Resumen. En el espacio curricular Geometría Analítica, correspondiente al primer año de las carreras de Ingenierías y de la Licenciatura en Ciencias de la Computación, en Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo, se detectan en algunos estudiantes dificultades en la apropiación, comprensión y transferencia del concepto de *coordenadas de un vector respecto de una base del espacio bidimensional*.

El estudio y análisis de dicho problema didáctico, desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico, permite la generación de una propuesta que fue desarrollada como trabajo final de Especialización en Didáctica de la Matemática de la Universidad Nacional de San Luis. La misma surge a partir de un análisis reflexivo y crítico de los materiales existentes, los recursos disponibles y de las tecnologías para la enseñanza de la Geometría Analítica. Dentro del modelo pedagógico implementado en la asignatura, se incorporan dispositivos didácticos en diferentes momentos del proceso de estudio.

Presentamos los objetivos e intencionalidades específicas de cada actividad propuesta y describimos cómo buscamos atenuar el problema didáctico, al promover la comprensión profunda de la organización matemática coordenadas de un vector respecto de una base en una mayor cantidad de estudiantes

Palabras clave: Geometría Analítica, Coordenadas de un vector, Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Keywords: Analytical Geometry, Coordinates of a vector, Anthropological Theory of the Didactic.

ABSTRACT. In the Analytical Geometry curricular space, corresponding to the first year of the Engineering careers and the Degree in Computer Science, in the Facultad de Ingeniería of the Universidad Nacional de Cuyo, are detected difficulties in some students, in the appropriation, comprehension and transfer of the concept of vector coordinates with respect to a two-dimensional space basis.

The study and analysis of this didactic problem, from the Anthropological Theory of the Didactic, allows the generation of a proposal that was developed as a final work of Specialization in Mathematics Didactics of the Universidad Nacional de San Luis. It arises from a reflective and critical analysis of the existing materials, available resources and technologies for Analytical Geometry teaching. Within the pedagogical model implemented in the subject, didactics devices are incorporated at different moments of the study process.

We present the objectives and specific intentions of each proposed activity and describe how we seek to mitigate the didactic problem by promoting a deep understanding of the mathematical organization of coordinates of a vector with respect to a base in a larger number of students.

§1. Introducción

En el espacio curricular Geometría Analítica, correspondiente al primer año de las carreras de Ingenierías y de la Licenciatura en Ciencias de la Computación, en Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo, se implementa un modelo pedagógico constituido por cinco escenarios de interacción (Raichman & Mirasso, 2018). El mismo contiene actividades diseñadas e implementadas para favorecer la apropiación de conceptos y procedimientos propios de la Geometría Analítica plana y espacial. Cada escenario de interacción (*desarrollo de contenidos, exploración y experimentación, tutorías, integración de contenidos y articulación*) tiene intencionalidades educativas específicas con las correspondientes actividades y recursos asociados.

Para cada unidad temática del programa de la asignatura (*Espacios Vectoriales - Planos y Rectas - Secciones Cónicas - Superficies - Ecuaciones de Lugares Geométricos en Coordenadas Polares, Esféricas y Cilíndricas - Rotaciones y Traslaciones en el Plano y en el Espacio*) se elaboran actividades y recursos didácticos que se encuentran disponibles en el aula virtual dentro del Aula Abierta de la Facultad de Ingeniería (Plataforma Moodle) y en el texto *Geometría analítica para ciencias e ingenierías: Actividades para el aprendizaje* (Raichman y col., 2023). Las guías de estudio y actividades semanales que se incluyen en dicho espacio virtual están orientadas a la organización y planificación del estudio de la asignatura.

En la primera unidad del curso, se detectan dificultades en la apropiación y la comprensión de los contenidos asociados a *coordenadas de un vector respecto de una base del espacio bidimensional*. A partir de diferentes instancias de evaluación, se observa que algunos estudiantes obtienen las coordenadas de un vector respecto de una base dada con un único algoritmo correcto, sin que el resultado esté necesariamente vinculado a una adecuada comprensión de los contenidos. Esto se visibiliza al solicitarles que representen gráficamente los resultados analíticos y, o bien no lo pueden hacer, o grafican las coordenadas en la nueva base como si fuese un nuevo vector.

Con el fin de atenuar el problema didáctico detectado sobre la apropiación, comprensión y transferencia del concepto de coordenadas de un vector respecto de una base del espacio bidimensional buscamos en la Teoría Antropológica de lo Didáctico, (en adelante TAD), herramientas y estrategias para abordar la problemática. La TAD define a la actividad matemática y al saber que surge de la misma, como una *organización o praxeología matemática* en una determinada institución. Fonseca y col. (2010) describen a este concepto como:

> Una organización matemática (en adelante OM) surge siempre como respuesta a una cuestión o a un conjunto de cuestiones. No se dice lo que es una OM, pero se da un esbozo de su estructura postulando que está constituida por cuatro componentes principales: **tipos de tareas**, **técnicas**, **tecnologías** y **teorías**. Si ponemos el énfasis en las relaciones dinámicas que se establecen entre dichos componentes a fin de llevar a cabo la actividad matemática necesaria para responder a las cuestiones problemáticas iniciales, entonces aparecen dos caras inseparables: la práctica matemática o "**praxis**"$[T/\tau]$, formada por las **tareas**, T, y las **técnicas** matemáticas, τ; y el "**logos**"$[\theta/\Theta]$, constituido por el **discurso matemático** que justifica e interpreta dicha práctica y que estructuramos en dos niveles: la **tecnología**, θ, que hace referencia directa a la práctica y la **teoría**, θ, que constituye un segundo nivel de justificación de la práctica (o tecnología de la tecnología). Al unir las dos caras inseparables de la actividad matemática, se obtiene la noción de **praxeología matemática**. (Fonseca y col., 2010, p. 6)

A la organización matemática asociada a coordenadas de un vector respecto de una base del espacio bidimensional la denominamos OM $(v)_B$.

La comprensión vista desde la TAD se refiere a la posibilidad de producir (o reproducir) un discurso tecnológico-teórico vinculado con actividades de resolución de problemas. Este discurso construido por los alumnos puede contener argumentos "informales" o "espontáneos" producidos por los sujetos en las instancias de resolución de problemas para comentar, explicar y justificar su actividad. (Bosch, 2000).

La fundamentación de las elecciones, para la propuesta que se detalla en este artículo, se basa en la búsqueda de un "incremento de la comprensión"[1] sobre la organización matemática OM $(v)_B$ por parte de los estudiantes.

[1]Frase de William P. Thurston que hace referencia al "avance de la comprensión humana de las matemáticas". Extraído del artículo de Bosch (2000).

El "grado de completitud" de una *organización matemática local*[2], (en adelante OM), se puede determinar a partir del análisis conjunto entre la dinámica del proceso de estudio (cuyo producto final es la OM en cuestión) y la *estructura* de dicha OM. Los autores Bosch y col. (2004) explican que el proceso de construcción de la OM está dado por diferentes *momentos didácticos* de la actividad matemática, formando parte de lo que denominan *dinámica* del proceso de estudio. En tanto que, designan como *estructura* de una organización matemática local a las cuatro componentes: tarea, técnica, tecnología y teoría, $[T/\tau/\theta/\Theta]$, junto con las relaciones que se establecen entre ellas. En la siguiente tabla se sintetizan los conceptos expresados, que determinan la dinámica del proceso de estudio de una OM y los indicadores de completitud vinculados a la estructura de la OM.

Dinámica del proceso de estudio de la OM "Momentos Didácticos"	La ***Estructura*** de la OM "Indicadores de Completitud"
1) *El momento del primer encuentro* 2) *El momento exploratorio* 3) *El momento de construcción de un entorno tecnológico-teórico* 4) *El momento de trabajo de la técnica* 5) *El momento de la institucionalización* 6) *El momento de la evaluación*	**OML1**[3]. *Integración de tipos de tareas* **OML2**. *Diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas* **OML3**. *Independencia de los ostensivos que integran las técnicas* **OML4**. *Existencia de tareas y de técnicas "inversas"* **OML5**. *Interpretación del resultado de aplicar las técnicas* **OML6**. *Existencia de tareas matemáticas "abiertas"* **OML7**. *Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica*

Tabla 1. Análisis del grado de completitud de una OM

Aumentar el *grado de completitud* de la OM $(v)_B$ favorece la construcción del discurso tecnológico- teórico y por consecuencia promueve un incremento en la compresión profunda de esta organización matemática.

A partir del análisis realizado desde la TAD y a los efectos de aumentar el grado de completitud de la OM $(v)_B$ surge el diseño de dispositivos con objetivos educativos específicos. Los mismos inciden en la estructura y desarrollo del proceso de estudio de la Geometría Analítica ayudando a la comprensión de coordenadas

[2]Las Organizaciones Matemáticas se clasifican según su complejidad en: organizaciones matemáticas *puntuales*, *locales*, *regionales* y *globales* (Chevallard, 1999). En este artículo se estudia la completitud de una *organización matemática local* asociada a coordenadas de un vector en el plano respecto a una base dada, designada como OM $(v)_B$, relativa a la institución correspondiente a la asignatura Geometría Analítica de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo.
[3]La denominación de los indicadores es tomada de los autores Bosch y col. (2004).

de un vector respecto de una base, por lo que se denominan *dispositivos didácticos* (Chevallard y col., 1997).

Un obstáculo cognitivo importante para la transición del pensamiento matemático elemental que han incorporado los estudiantes en la secundaria, al pensamiento matemático avanzado necesario para la trayectoria académica universitaria, es la falta de relación entre los registros semióticos de representación gráfica y analítica (Bosch y col., 2004). Se decide, por lo tanto, elaborar dispositivos didácticos para fortalecer y promover la construcción de un entorno tecnológico-teórico que les permita a los estudiantes poder debatir sobre sus técnicas, discernir cuál es más conveniente usar y crear nuevas técnicas que sean más económicas y/o más eficientes.

Los mismos se incorporan a las actividades existentes en la asignatura y se planifican de acuerdo con el cronograma indicado en la Tabla 2, cuya implementación describiremos en los siguientes apartados. En la sección 2 se presentan y describen los tres dispositivos didácticos y en la sección 3 se amplía cada uno de los *momentos* e *indicadores* de la Tabla 1, ya que son las herramientas que se utilizan para el diseño y análisis de nuestra propuesta de enseñanza.

	Semana 1	**Semana 2**	**Semana 3**	**Semana 4**	**Semana 5**
	UNIDAD 1: “Espacios Vectoriales”			**UNIDAD 2: “Planos y Rectas”**	**Examen Parcial**
Tema	**Espacios Vectoriales**	**Vectores geométricos: Producto Escalar**	**Vectores geométricos: Producto Vectorial y Mixto.**	**Planos**	**Esp. Vectoriales. Vectores geométricos: Producto escalar, vectorial y mixto.**
Implementación	*Trabajo asincrónico de los estudiantes, previo a clase, con las actividades de los dispositivos N°1 y N°2.* *Análisis sincrónico, en clase, de los resultados obtenidos en dispositivos N°1 y N°2 con la mediación del docente.* *Trabajo sincrónico, en clase, de la Incorporación 1 Dispositivo N°3 en actividades áulicas*	*Trabajo asincrónico de los estudiantes transfiriendo resultados obtenidos en Dispositivos N°1, 2 y 3 a nuevas situaciones.* *Análisis sincrónico, en clase, de los resultados de la transferencia realizada por los estudiantes, con mediación del docente.*	*Trabajo asincrónico de los estudiantes transfiriendo resultados obtenidos en Dispositivos N°1, 2 y 3 a nuevas situaciones.* *Análisis sincrónico, en clase, de los resultados de la transferencia realizada por los estudiantes, con mediación del docente.*	**Repaso Parcial** *Trabajo sincrónico de la Incorporación 2- Dispositivo N°3 incluidas en una guía de actividades destinada al repaso en clase de los contenidos del primer parcial.*	*Integración a la evaluación de actividades coherentes con las realizadas en los Dispositivos N°1, N°2 y N°3.*

Tabla 2. Cronograma parcial de la asignatura con las inserciones de los dispositivos didácticos

§2. Descripción de los dispositivos

2.1. Dispositivo Nº1: "Actividad Inicial". A los efectos de revisar los conocimientos previos de los estudiantes, necesarios para iniciar el estudio de la OM $(v)_B$, analizamos qué contenidos se estudian en los cursos de ingreso obligatorios.

Detectamos que los ingresantes a las carreras de Ingeniería estudian conceptos básicos asociados a vectores en el plano desde un enfoque analítico en el curso de Física. Por otra parte, los alumnos de la Licenciatura en Ciencias de la Computación estudian las operaciones entre vectores para resolver problemas en el curso de Resolución de Problemas.

Diseñamos el primer dispositivo didáctico para reforzar y nivelar los contenidos previos requeridos para una adecuada comprensión de OM $(v)_B$. Además de revisar dichos contenidos, se introduce a los estudiantes *en tareas de visualización, interpretación de las operaciones básicas entre vectores y del lenguaje simbólico*.

Este primer dispositivo comienza con el *momento de construcción* de un entorno tecnológico-teórico, donde los estudiantes fundamentan sus técnicas y las comunican a sus pares desarrollando su propio discurso tecnológico-teórico en cuestión, en paralelo al *momento de institucionalización*. De ahí, la potencia de este dispositivo teniendo en cuenta la comprensión que se busca incrementar.

Además, esta actividad inicia con los *escenarios de exploración y experimentación* que están disponibles en el espacio virtual de la asignatura, aula abierta de Facultad de Ingeniería, para explorarlos de forma asincrónica como actividad preparatoria previa a la primera clase de *desarrollo de contenidos*.

El dispositivo N°1 contiene actividades para desarrollar en dos partes implementadas desde GeoGebra (Figura 1). La primera parte, "*Vectores Geométricos*", tiene como objetivo la visualización de las operaciones producto por un escalar y suma de vectores geométricos, sin definir un espacio vectorial determinado. La segunda parte, "*Vectores en el plano*", trabaja los mismos conceptos teóricos a partir de un nuevo recurso interactivo, pero con vectores en el plano cartesiano.

Actividades iniciales con el Recurso Interactivo - Vectores Geométricos:

a) Selecciona diferentes valores para el parámetro k, y visualiza qué ocurre con el vector $k\mathbf{w}$.

b) Registra en tu cuaderno los cambios observados para $k > 0$ y $k < 0$.

c) Selecciona la casilla de "Mostrar segundo vector", modifica los valores de α y visualiza y registra qué ocurre con el vector $\mathbf{v}$.

d) Compara los cambios que produce el parámetro k en el vector $k\mathbf{w}$ con los cambios que efectúa el parámetro α en el vector $\mathbf{v}$. (Sugerencia: en tu análisis incluye las opciones $k = 0$ y $\alpha = 0$).

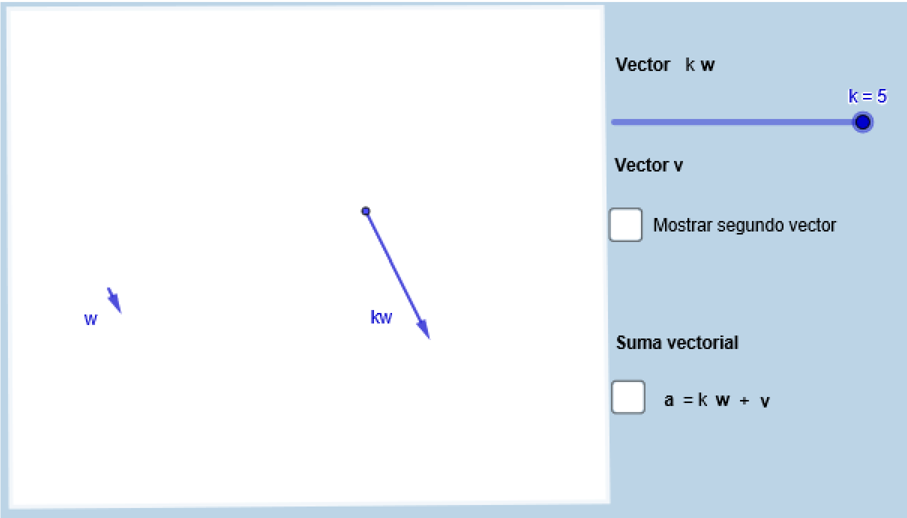
e) Selecciona la casilla asociada a la suma vectorial y vuelve a modificar alternativamente los valores de los parámetros α y k para visualizar los resultados de diferentes sumas.

f) Elige una configuración de modo tal que los vectores $k\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ pertenezcan a la misma recta y tengan el mismo sentido. Observa qué ocurre con el vector suma.

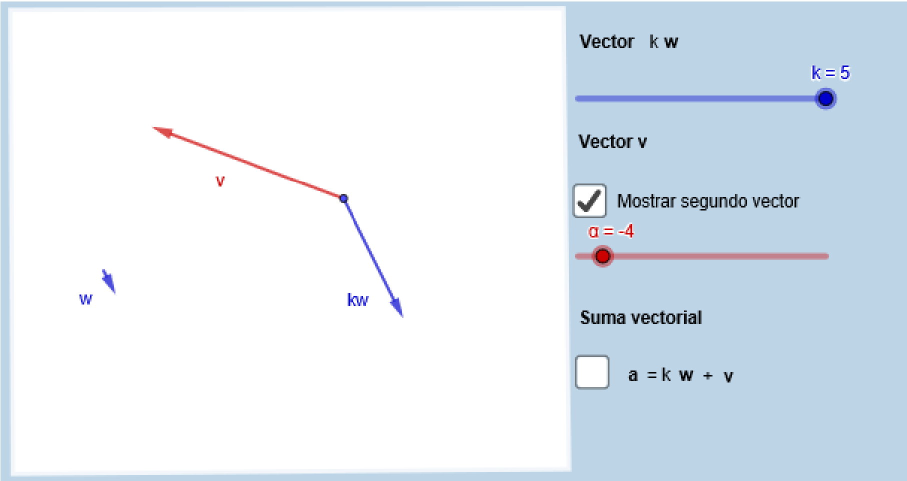
g) Elige una configuración de modo tal que los vectores $k\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ pertenezcan a la misma recta y tengan sentido contrario. Observa qué ocurre con el vector suma.

FIGURA 1. Enunciados de las actividades del Dispositivo N°1

Parte I: "Vectores Geométricos". Para comenzar se dispone de dos vectores libres w y kw, con un deslizador asociado al parámetro k, que permite visualizar de forma dinámica cuál es el vector que se obtiene al multiplicar por un escalar al vector dado w. El parámetro puede tomar valores positivos, negativos y nulo para que el estudiante pueda elaborar conclusiones sobre cómo afecta tanto el signo como el valor del escalar, en el módulo y sentido del vector resultante (Figura 2.A).



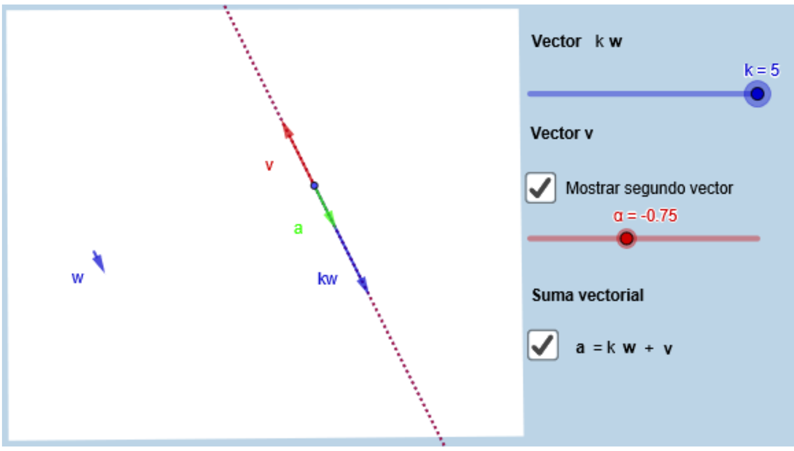
(A) Recurso Geométrico Interactivo - Configuración Inicial parte I



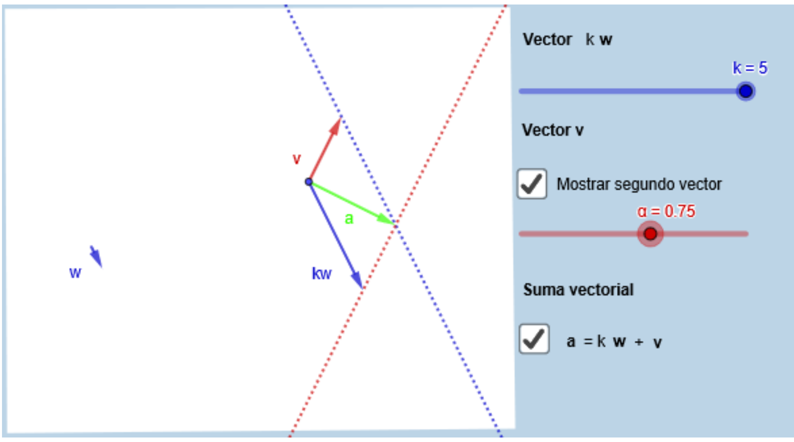
(B) Recurso Geométrico Interactivo - Vectores de la parte I

FIGURA 2

Dentro del mismo recurso, el estudiante puede seleccionar la opción para que aparezca un segundo vector v (Figura 2.B). El parámetro asociado al deslizador α permite obtener vectores v no paralelos de diferentes longitudes. Así mismo es posible seleccionar la opción que permite visualizar el vector a, que se obtiene al sumar vectorialmente los vectores elegidos kw y v. Se guía al alumno a través de las actividades propuestas (Figura 3.A) para que pueda sumar vectores que se encuentren en la misma recta de acción u otra combinación posible, donde kw y v sean linealmente independientes (Figura 3.B).



(A) Suma de vectores Linealmente Dependientes



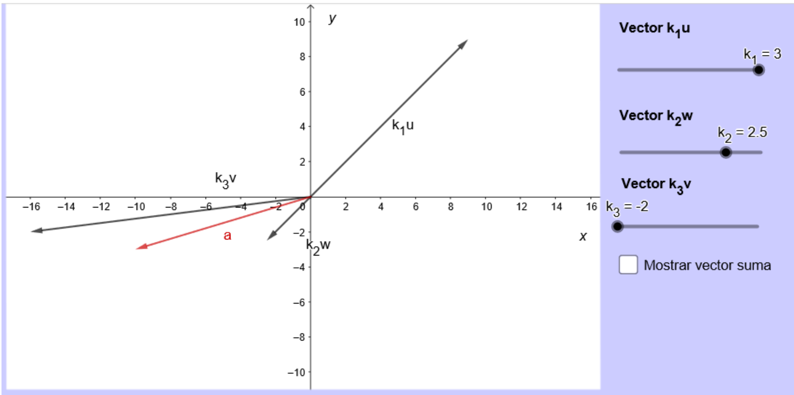
(B) Suma de vectores Linealmente Independientes

FIGURA 3

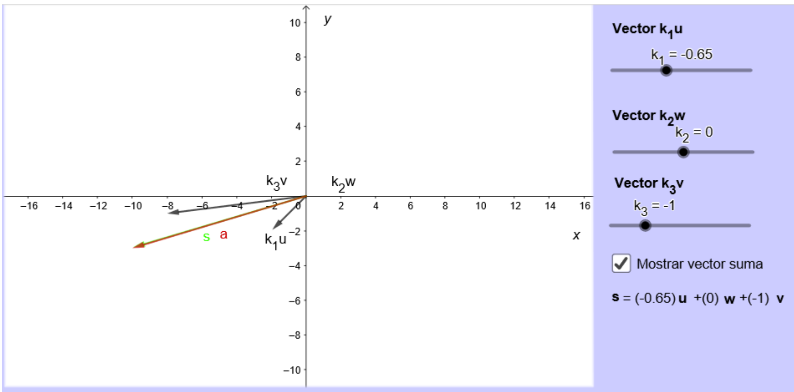
Sin introducir los conceptos de combinación e independencia lineal el estudiante ingresa a la primera clase de Geometría Analítica con un trabajo preliminar sobre operaciones entre vectores geométricos, enriqueciendo los conocimientos previos estudiados en los cursos de ingreso, desde la interpretación geométrica.

Durante el desarrollo de la parte I, el estudiante anota en su cuaderno las conclusiones que elabora. Las mismas se retoman la primera semana de cursado de Geometría Analítica en el momento de institucionalización (Tabla 2 - Columna 1), en el cual los docentes guiamos a los estudiantes a vincular entre sí los conceptos de base, independencia y combinación lineal, que son los saberes necesarios para mejorar la comprensión de la OM $(v)_B$.

Parte II: "Vectores en el plano". El recurso contiene un vector fijo a y tres vectores k_1u, k_2w y k_3v que el estudiante puede modificar a partir de los respectivos deslizadores k_1, k_2 y k_3. Además, dispone de una casilla que le permite mostrar el vector suma s, dado por $k_1u + k_2w + k_3v$. (Figura 4.A). Se motiva al estudiante con un desafío que implica obtener al vector fijo a, a partir de diferentes combinaciones lineales de los tres vectores k_1u, k_2w y k_3v. En la consigna se brindan sugerencias para iniciar la búsqueda de soluciones, tales como un valor nulo para k_1 (o para k_2). El uso de los deslizadores le permite explorar, visualizar posibles respuestas y validar las soluciones que proponga de forma gráfica seleccionando la casilla de "Mostrar vector suma", es decir, que al elegir una terna de valores para los deslizadores puede mostrar el vector s y verificar si es coincidente con el vector fijo a.



(A) Recurso Geométrico Interactivo – Configuración Inicial – Parte II



(B) Recurso Geométrico Interactivo- Validación de una solución particular

FIGURA 4

Las conclusiones que los estudiantes elaboran se recuperan en las clases sincrónicas junto con el docente y sus compañeros para relacionarlas con el concepto de base (Tabla 2 - Columna 1). Luego de la exploración y el análisis del desafío, se busca que los alumnos puedan inferir que la combinación lineal de un vector respecto a una base de un espacio vectorial es única y que existen infinitas combinaciones posibles, cuando el conjunto de vectores no cumple con la definición de base.

2.2. Dispositivo Nº2: "Autoevaluación y Verdadero o Falso". Diseñamos este dispositivo con los objetivos educativos de acompañar a los estudiantes en la revisión de sus aprendizajes asociados a la OM $(v)_B$ antes de la primera instancia de evaluación parcial, adquirir o reforzar una metodología de estudio para alcanzar los objetivos de la asignatura y promover una comunicación apropiada de sus razonamientos y justificación de sus producciones. Por otra parte, podemos obtener información acerca de la interpretación gráfica OM $(v)_B$ que realizan los estudiantes a los efectos de detectar problemas de comprensión antes de la primera evaluación parcial

El *momento de evaluación* de la OM $(v)_B$ se inicia a partir de este dispositivo, con dos tareas que son diferentes: una de ellas es una autoevaluación de múltiple opción y la segunda es un ejercicio de verdadero o falso que tienen objetivos en común, pero se implementan en distintos momentos (Tabla 2 - Columna 2). La resolución de ambas partes, no requieren desarrollos analíticos, sino que el potencial del dispositivo radica en la comprensión de los conceptos asociados a la OM $(v)_B$ partiendo desde el análisis de la información gráfica proporcionada. Esto último, forma parte del objetivo principal de la propuesta didáctica, es decir, relacionar los registros semióticos (gráfico y analítico) evitando que el "saber hacer" algorítmico no esté asociado a una apropiada comprensión de la organización matemática en cuestión.

La primera parte se implementa en el aula virtual de Geometría Analítica dentro del aula abierta de Facultad de Ingeniería, Plataforma Moodle, y está disponible luego de la primera semana de clases. A modo de autoevaluación, se le proporciona al estudiante una actividad que evalúa principalmente la interpretación gráfica del concepto de coordenadas de un vector respecto a una base dada en el plano, utilizando una pregunta de múltiple opción. Con el fin de guiar a los alumnos en la organización y planificación del estudio de la asignatura, dicha tarea se plantea con una fecha límite de entrega. Finalizado este período de tiempo se plantea en la siguiente clase, en forma de debate, la respuesta correcta y la justificación de las opciones incorrectas.

Como cierre de la clase sincrónica mencionada, se les propone la segunda parte del dispositivo que consiste en analizar la veracidad de ciertas afirmaciones. Para esta última actividad, se les proporcionan los gráficos y los enunciados durante la clase, dejándoles un tiempo para la interpretación y justificación de sus elecciones. Luego del análisis individual, se debate en forma grupal la argumentación para cada proposición con la apropiada guía del docente (Tabla 2 - Columna 1).

Parte I: "Autoevaluación". Consiste en una pregunta que tiene como datos las coordenadas de los vectores u, v y w, en la que se pide indicar cuál de los gráficos representa adecuadamente las coordenadas del vector w respecto de la base que determinan u y v (Figura 5).

Dado el conjunto formado por los vectores $u = (1, 2)$ y $v = (2, -2)$. La representación geométrica de las coordenadas del vector $w = (-3, -1)$ en la base $B = \{u, v\}$ es:

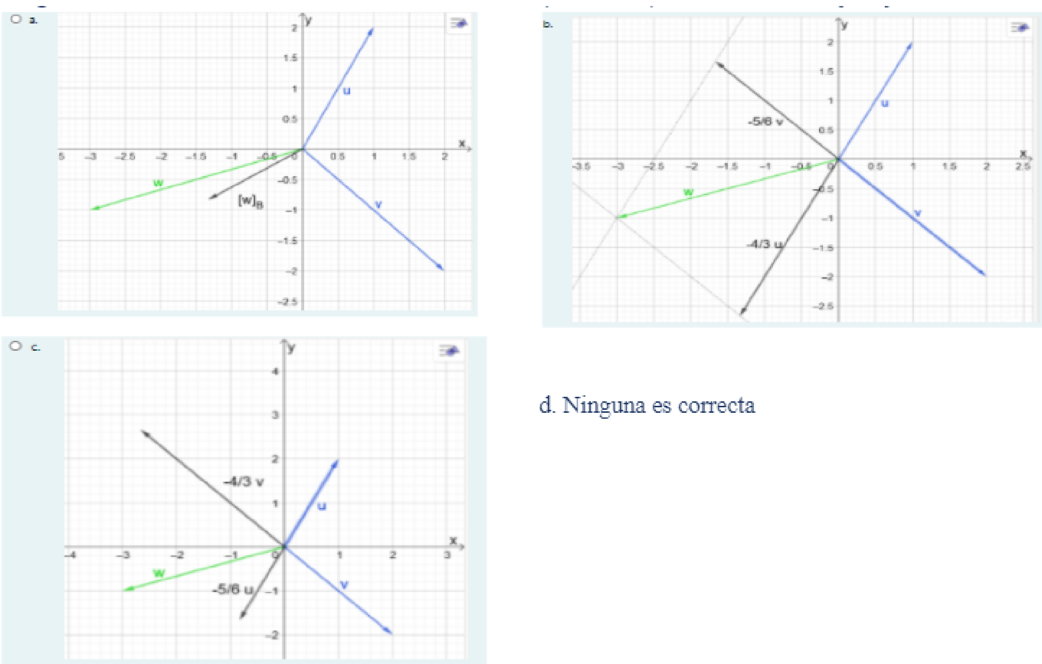


Figura 5. Enunciado y respuestas posibles de la autoevaluación implementada en la Plataforma Moodle

La representación gráfica dada como opción en a) es incorrecta, pero es la que se encuentra en muchas producciones escritas y orales de los estudiantes, como así también en las instancias de evaluación. Se percibe un "saber hacer" algorítmico correcto, que no está asociado a una apropiada comprensión del contenido mencionado, ya que grafican un vector de coordenadas $(-4/3, -5/6)$ como representación gráfica de $(w)_{\{u,v\}}$.

La opción b) corresponde a la respuesta correcta que se decide dar como una de las opciones para que el estudiante que logra la compresión, pueda visualizar cómo es una representación gráfica completa, con las referencias necesarias para relacionarlo con el desarrollo analítico. En la representación gráfica dada en el inciso c) se han asociado los escalares en el orden incorrecto, por lo que se busca mostrar la relación entre el orden en el que se expresan las coordenadas de un vector respecto a una base dada y el orden de los vectores que determinan la base.

Se muestra gráficamente que el vector w no es el resultado de la suma vectorial $-5/6u - 4/3v$.

Por último, se da como opción "*Ninguna de las anteriores*" pensando que es posible encontrar otros errores u obstáculos vinculados a la comprensión de la OM $(v)_B$ diferentes a los mencionados en las descripciones anteriores. En tal situación, corresponde al docente la tarea de revelar, durante la puesta en común, cuáles son los razonamientos de los alumnos que indican como correcta esta respuesta para poder corregirlos.

Parte II: "Verdadero o Falso". Como complemento de la parte I propuesta para el trabajo autónomo asincrónico del alumno, se elabora una parte II que consiste en una tarea de verdadero o falso, a los efectos de promover el análisis conceptual de los contenidos asociados a la OM $(v)_B$ de forma sincrónica con el acompañamiento del docente.

Tal como se puede ver en la Figura 6 se muestran dos representaciones del vector v, como combinación lineal de bases diferentes en R^2. En el primer gráfico, se adopta la base canónica del espacio bidimensional y en el segundo una base formada por los vectores a y b.

Las afirmaciones "*El conjunto $B = \{i, j\}$ es base para el espacio vectorial R^2*" y "*El conjunto $A = \{a, b\}$ es base para el espacio vectorial R^2*" tienen como objetivo identificar y analizar dos conjuntos de vectores que determinan bases para un mismo espacio vectorial que luego son tomados como referencia en las afirmaciones que siguen.

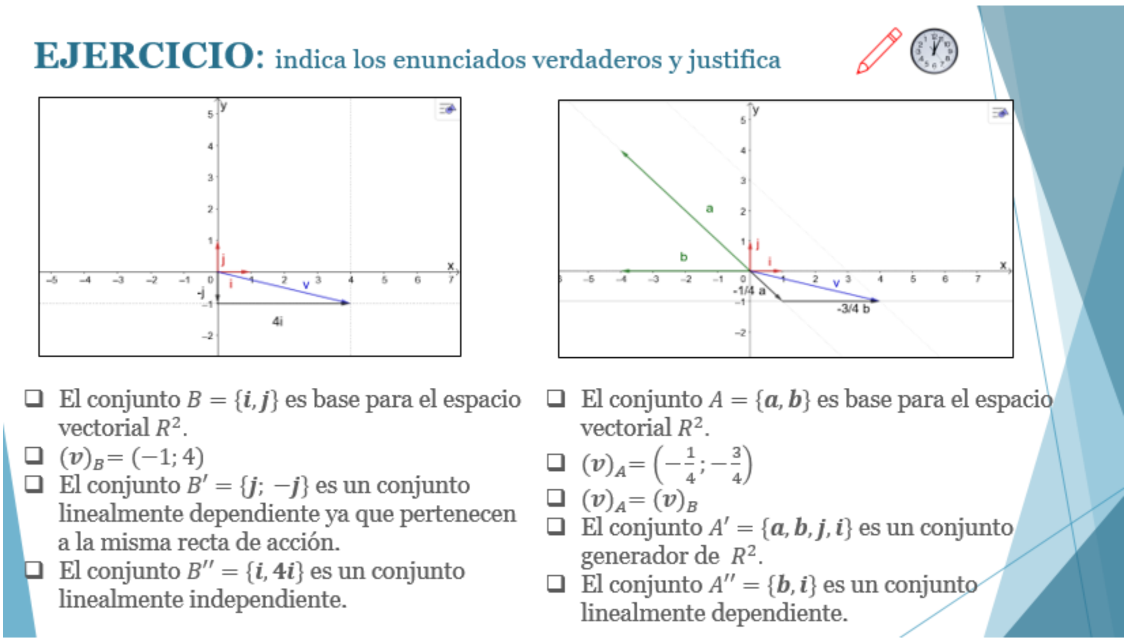


FIGURA 6. Gráficos y enunciados del ejercicio Verdadero o Falso- Parte II

La proposición "*El conjunto* $B' = \{j; -j\}$ *es un conjunto linealmente dependiente ya que pertenecen a la misma recta de acción*" es verdadera, al igual que "*El conjunto* $A'' = \{b, i\}$ *es un conjunto linealmente dependiente*". El alumno puede visualizar en la gráfica que ambos vectores están representados sobre la misma recta de acción, pero a continuación se les propone que "*El conjunto* $B'' = \{i, 4i\}$ *es un conjunto linealmente independiente*" y en este caso no se encuentran graficados los vectores i y $4i$ sobre la misma recta de acción por lo que se busca reflexionar sobre el concepto de "vectores libres", resultando falsa esta última proposición.

Luego se colocan afirmaciones sobre las coordenadas del vector v, respecto de las bases A y B, buscando analizar las relaciones entre el orden de los vectores de la base y el de las coordenadas. La afirmación sobre el vector de coordenadas $(v)_B$, resulta falsa porque el orden de los escalares está invertido. En tanto que, el vector de coordenadas $(v)_A$ es correcto y puede justificarse desde la suma vectorial que se encuentra representada en el gráfico de la derecha.

Por último, se busca reflexionar sobre el concepto de conjunto generador a partir de la afirmación "*El conjunto* $A' = \{a, b, j, i\}$ *es un conjunto generador de* R^2" que es verdadera. Esto permite discutir la diferencia conceptual entre conjunto generador y base de un espacio vectorial.

2.3. Dispositivo Didáctico Nº3: "Razonamiento inverso". Al realizar el análisis del material existente en la asignatura detectamos que en las guías de actividades propuestas para los escenarios de *desarrollo de contenidos* existían tareas asociadas a encontrar las coordenadas de un vector respecto de una base dada en R^2. Sin embargo, no había ejercitación que promueva el razonamiento inverso, es decir, recuperar las coordenadas de un vector en la base canónica teniendo como dato las coordenadas del vector en otra base. Por lo tanto, decidimos incorporar a la guía de aula-taller una actividad que llamamos a continuación "*Incorporación Nº1*" (*Geometría Analítica para ciencias e ingeniería. Actividades para el Aprendizaje.* Raichman y col. (2023)).

Por otra parte, en la guía elaborada para el repaso correspondiente a la evaluación parcial agregamos una tarea de verdadero o falso que plantea el análisis de afirmaciones que requieren del razonamiento inverso, a la cual denominamos como "*Incorporación Nº2*" (Tabla 2 - Columna 4).

Ambas actividades se proponen para llevarlas a cabo en clase de manera sincrónica con acompañamiento del docente como mediador.

Si bien en este dispositivo están presentes todos los momentos didácticos, excepto el de evaluación, se priorizan y potencian los momentos de *trabajo con la técnica* y el de *construcción* colaborativa del entorno *teórico-tecnológico*. A partir de este dispositivo se introducen tipos de *tareas inversas* que aumentan el grado de *completitud* de la OM $(v)_B$ y, en consecuencia, favorecen la *comprensión* de dicha organización matemática. Es decir, se incorporan nuevas tareas desde enfoques diferentes a los trabajados en los escenarios de desarrollo de contenidos, de exploración y experimentación (Raichman & Mirasso, 2018), mediante la interacción con el docente y la comunicación entre sus pares que, al aumentar la completitud, promueven y enriquecen la *comprensión profunda* de la OM $(v)_B$.

Incorporación Nº1. En la clase de aula taller asociada a las temáticas de la OM $(v)_B$ del libro *Geometría analítica para ciencias e ingenierías: Actividades para el aprendizaje* (Raichman y col., 2023) trabajamos con una guía de actividades que contiene cinco ejercicios de desarrollo. En el último ejercicio se presentan distintos tipos de tareas: graficar vectores con origen en diferentes puntos del plano; determinar los escalares que constituyen una combinación lineal de forma gráfica; justificar si un conjunto de vectores dados es un conjunto generador del espacio bidimensional; justificar si un conjunto de vectores dados constituye una base del espacio bidimensional; obtener coordenadas de un vector respecto de una base de R^2; validar soluciones analíticas y gráficas con un recurso de geometría dinámica.

Como complemento de las tareas anteriores agregamos un nuevo inciso solicitando las coordenadas del vector u respecto de la base canónica, teniendo como dato las coordenadas del vector u en la base B. El enunciado completo del mencionado ejercicio se muestra en la Figura 7.

Seleccionamos dicho ejercicio para realizar esta primera incorporación debido a que involucra diferentes tipos de tareas, buscando así completar los requerimientos iniciales, al mismo tiempo que se pretende evitar la mecanización de procedimientos algorítmicos de las tareas asociadas.

9. En un sistema coordenado *xy*, realice el siguiente procedimiento:

a) Ubique el punto inicial A(-2, 1), a partir del cual grafique el vector $\boldsymbol{w}$= (0, 2.5).

b) Ubique el punto C(2, 2), punto inicial de los vectores $\boldsymbol{v_1}$= (2, 1.5) y $\boldsymbol{v_2}$= (-0.5, 1).

c) Por el punto A trace una línea paralela a la dirección dada por el vector $\boldsymbol{v_1}$.

d) Por el punto extremo final del vector $\boldsymbol{w}$ trace una línea paralela a la dirección dada por el vector $\boldsymbol{v_2}$.

e) Determine gráficamente los escalares k_1 y k_2 que permiten escribir al vector $\boldsymbol{w}$ como combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v_1}$ y $\boldsymbol{v_2}$. Compare con la solución analítica.

f) Indique, justificando su respuesta, si modificando las coordenadas de A y/o C se modifica su respuesta.

g) Indique, justificando su respuesta, si el conjunto {$\boldsymbol{v_1}$; $\boldsymbol{v_2}$} genera a $\mathbb{R}^2$.

h) Justifique que el conjunto B={$\boldsymbol{v_1}$; $\boldsymbol{v_2}$} es base de $\mathbb{R}^2$ y determine las coordenadas de $\boldsymbol{w}$ en dicha base.

i) Indique las coordenadas del vector $\boldsymbol{u}$ sabiendo que $(\boldsymbol{u})_B$=(-2,3).

j) Utilice el *Recurso Geométrico Interactivo RGI–Combinación Lineal* para verificar las respuestas (a) a (e) y el *RGI-Cambio de base* para verificar la respuesta. [*Libro Interactivo Geometría Dinámica*].

Figura 7. Enunciado del ejercicio 9 de la Guía de Actividades con la incorporación Nº1

Incorporación Nº2. En la clase previa a la instancia de evaluación parcial, trabajamos con una guía de actividades que contienen ejercicios asociados a los temas que serán evaluados. Para hacer la segunda incorporación seleccionamos el primero de dichos ejercicios en el cual se dan como datos una base de R^2 y un vector v que deben expresar en dicha base. Bajo el formato de verdadero o falso se incorpora un cuarto inciso que complementa la revisión de los contenidos asociados a la OM $(v)_B$. En éste se busca que el alumno fundamente la veracidad de las proposiciones, explicitando el nivel de comprensión alcanzado en los conceptos asociados a la OM $(v)_B$ y la integración de los resultados obtenidos en los primeros incisos (Figura 8).

Las proposiciones i) e iii), indicadas en la Figura 8 son verdaderas y se seleccionan con la finalidad de repasar coordenadas de un vector respecto a la base canónica. Por otra parte, se vinculan los conceptos de coordenadas de un vector respecto a una base ortonormal, con el de proyecciones ortogonales de un vector en las direcciones de los vectores de la base. Las afirmaciones falsas que requieren justificación son ii) e iv), y se seleccionaron para promover la reflexión sobre qué ocurre cuando se solicitan las coordenadas de un vector que pertenece a la base dada.

Ejercicio 1

a) Dado el conjunto $B_1 = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}\}$ base de R^2, exprese al vector $\boldsymbol{v}$ en la base B_1 y en la base *canónica*, B_C. $\boldsymbol{u_1} = (2, -3\,)$; $\boldsymbol{u_2} = (3, 2\,)$; $\boldsymbol{v} = (-1, -2)$

b) Represente gráficamente el vector $\boldsymbol{v}$, los vectores de la base B_1 y verifique la respuesta dada en el inciso a).

c) Efectúe cambios apropiados en los vectores $\boldsymbol{u_1}$ y $\boldsymbol{u_2}$, de forma tal de obtener una nueva base B_2 que sea base ortonormal de R^2. Justifique su respuesta.

d) Coloque V (verdadero) o F (falso) en cada uno de los siguientes resultados. Justifique.

i.	$(\boldsymbol{v})_{B_c} = (-1, -2)$	
ii.	$(\boldsymbol{u_1})_{B_1} = (2, -3)$	
iii.	$(\boldsymbol{v})_{B_2} = (proy_{\vec{u_1}}\boldsymbol{v}, proy_{\vec{u_2}}\boldsymbol{v})$	
iv.	$(\boldsymbol{u_2})_{B_1} = (1,0)$	

FIGURA 8. Enunciado del guía de repaso para el primer examen parcial con la incorporación Nº2 (inciso d)

La implementación de la propuesta descripta que presentamos en este apartado se integra a los diferentes escenarios de interacción que conforman el modelo pedagógico de la asignatura, por lo que en cada uno de ellos es esencial la participación activa de los estudiantes, siendo el docente quien guía y acompaña el proceso de aprendizaje. En palabras de Chevallard: "*alrededor del juego del maestro: siempre sutilmente presente, aunque en ausencia, éste debe saberse ausentar incluso en presencia, a fin de dejar al alumno libre para conquistar una independencia que la figura tutelar del profesor hace a la vez posible e incierta*", Chevallard (1999, p. 21). En la siguiente sección se desarrolla el análisis de la propuesta didáctica desde el enfoque de la TAD.

§3. Análisis de la propuesta didáctica bajo el marco teórico de la TAD

Desde la TAD, el "grado de completitud" de una organización matemática local se puede determinar a partir del análisis conjunto entre la *dinámica* del proceso de estudio y la *estructura* de dicha OM. (Tabla 1)

En el proceso de construcción de una organización matemática local la *dinámica* está formada por los *momentos didácticos* que constituyen dimensiones del proceso que no necesariamente hacen referencia al orden cronológico ya que pueden darse en simultáneo o aparecer en varias ocasiones sin tener un orden prefijado.

Son seis los momentos didácticos: 1) el *momento del primer encuentro* con el tipo de tareas vinculado a una cuestión con sentido; 2) el *momento exploratorio* del tipo de tareas donde la comunidad puede crear técnicas para resolver las tareas; 3) el *momento de construcción* de un entorno tecnológico-teórico que fundamente y explique las técnicas utilizadas; 4) el *momento de trabajo de la técnica* que promueve la evolución de las técnicas existentes y la construcción de nuevas técnicas que resuelven las tareas iniciales o dan respuestas a tipos de tareas que serán integradas a la OM en construcción; 5) el *momento de la institucionalización* donde se diferencian y delimitan los elementos que son constituyentes de la OM de los que resultan auxiliares de la construcción; 6) el *momento de la evaluación* de la organización matemática construida.

El resultado del proceso de construcción que satisface y cumple con los seis momentos caracterizados, es una OM relativamente completa.

Cabe aclarar que una organización matemática local no es "completa" o "incompleta" sino que es "más" o "menos" completa dependiendo si están presentes los momentos y del grado en que sus componentes $[T/\tau/\theta/\Theta]$ cumplen las condiciones descriptas por los siguientes indicadores:

OML1. *Integración de tipos de tareas*. En una OM existen diferentes tipos de tareas. De acuerdo con este indicador, el grado de completitud depende de la integración entre los distintos tipos de tareas.

OML2. *Diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas*. Una OM será más completa si pueden existir técnicas alternativas o variaciones de una misma técnica para resolver algunos de sus tipos de tareas, sin que exista una vinculación entre cada tipo de tarea con su única técnica asociada. El discurso tecnológico permite cuestionar las distintas técnicas, analizar sus equivalencias o diferencias e identificar cuál es la más económica.

OML3. *Independencia de los ostensivos*[4] *que integran las técnicas*. La flexibilidad de las técnicas de una OML está asociada con que las mismas acepten diferentes representaciones ostensivas, dependiendo de la actividad matemática en las que están inmersas. Una OM es más completa si presenta independencia de los ostensivos que integran las técnicas, es decir, si éstas no se identifican rígidamente con objetos ostensivos para ser aplicadas.

OML4. *Existencia de tareas y de técnicas "inversas"*. El grado de completitud de una OM según este indicador está asociado con el hecho de que existan en ella técnicas "reversibles". Es decir, que existan técnicas que permitan resolver un tipo de tarea y también la tarea inversa (por "inversa" se entiende que es aquella tarea que se define intercambiando datos e incógnitas o cuestionando las condiciones de realización de la tarea o de la aplicación de una determinada técnica).

OML5. *Interpretación del resultado de aplicar las técnicas*. Este indicador de completitud se refiere a la existencia en una OM de elementos tecnológicos que permitan interpretar el funcionamiento y los resultados de las técnicas aplicadas. Es decir, una OM es más completa si su discurso tecnológico adquiere mayor funcionalidad, habilitando a la interpretación del funcionamiento de las técnicas y de su resultado.

OML6. *Existencia de tareas matemáticas "abiertas"*. Una OM será más completa en la medida en que permita abordar cuestiones "abiertas", es decir, tipos de tareas en los que se estudian situaciones donde los datos y las incógnitas no están prefijados en su totalidad.

OML7. *Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica*. El grado de completitud de una OM depende de las relaciones que se establezcan entre sus elementos tecnológicos y de su incidencia efectiva sobre la práctica matemática que se lleva a cabo en una OM.

Sintetizamos en la Tabla 3 los momentos e indicadores que se fortalecen con cada dispositivo elaborado, para que la organización matemática local OM $(v)_B$ sea "más" completa.

El *momento del primer encuentro* con el tipo de tareas vinculado a la OM $(v)_B$ se inicia con el dispositivo Nº1 al igual que el momento *exploratorio* del tipo de tareas.

[4]Según Bosch (2000) los *objetos ostensivos* son aquellos objetos que se perciben: se ven, se tocan, se oyen, etc. Son los objetos materiales o los objetos dotados de cierta materialidad como las escrituras, los grafismos, los sonidos, los gestos, etc. Se habla de "manipulación" de los objetos ostensivos, aunque los ostensivos en cuestión sean escrituras, gráficos, gestos o discursos. A diferencia, los *objetos no-ostensivos* son todos aquellos objetos que existen institucionalmente, en el sentido en que se les atribuye una determinada existencia, pero que no se pueden percibir ni mostrar por sí mismos: las ideas, los conceptos, las creencias, etc. Lo que sí se puede es "invocar" o "evocar" mediante la manipulación de ciertos objetos ostensivos apropiados.

	Momentos Didácticos						Indicadores de Completitud						
	1	2	3	4	5	6	OML1	OML2	OML3	OML4	OML5	OML6	OML7
Dispositivo Nº1													
Dispositivo Nº2													
Dispositivo Nº3													

TABLA 3. Aportes de cada dispositivo a la completitud de la OM$(v)_B$

Luego el estudiante saca conclusiones que se retoman fuertemente en el *momento de la institucionalización* que se da en paralelo al *momento de construcción*, donde los estudiantes fundamentan sus técnicas y las comunican a sus pares iniciando la construcción del discurso tecnológico-teórico en cuestión.

Como puede verse, los momentos de *primer encuentro*, *exploración*, *construcción* e *institucionalización* también están presentes en la implementación de los dispositivos Nº2 y Nº3. En el caso del dispositivo Nº2, además aparece el primer momento de *autoevaluación* en la OM $(v)_B$, ya que la parte I del mismo contiene una pregunta de múltiple opción para que el alumno aplique los aprendizajes que ha logrado en la primera semana. En paralelo, está presente el momento del *trabajo con la técnica*, ya que se pretende desde la representación gráfica y la interpretación de la misma que el estudiante pueda responder a la actividad fundamentando su elección en la clase posterior junto con el docente. Estos momentos de *institucionalización* y de *construcción* del entorno tecnológico-teórico, se potencian a su vez con la implementación de la Parte II del dispositivo.

Con las incorporaciones del dispositivo Nº3 buscamos que los alumnos cuestionen las técnicas y puedan discernir con argumentos que les brinda el discurso tecnológico construido, cuál es la técnica más económica que permite responder a las actividades de forma clara, rápida y sin demasiados cálculos.

Si bien los seis momentos didácticos ya estaban presentes en la asignatura, los nuevos dispositivos los complementan y enriquecen.

Por otra parte, con la incorporación de todos los dispositivos propuestos se integran nuevos tipos de tareas a los que estaban presentes en esta organización matemática, aportando de este modo al indicador **OML1**- *Integración de tipos de tareas*. Por ejemplo, con el Dispositivo Nº1 incorporamos la tarea de analizar desde un recurso geométrico interactivo los resultados gráficos de las operaciones vectoriales; con el dispositivo Nº2, la tarea de responder preguntas de múltiple opción y analizar la veracidad de afirmaciones que refieren a datos gráficos; con el dispositivo Nº3, se integran las tareas del tipo “inverso”.

Cada tipo de tarea no está aislado, sino que permiten desarrollar nuevas técnicas o mejorar técnicas mediante la aplicación sucesiva de ellas dentro de un discurso tecnológico compartido. A modo de ejemplo, con la primera incorporación del dispositivo Nº3, agregamos en un ejercicio de la guía de práctica un inciso que se integra a los demás con un tipo de tarea, (calcular las coordenadas de un vector en la base canónica, conocidas sus coordenadas en otra base dada), diferente a los tipos de tareas de los incisos restantes. Estos nuevos tipos de tareas generan la creación de nuevas técnicas o variación de una misma técnica para las tareas propuestas. Es decir, que el indicador **OML2** - *Diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas* también se pone en juego con la incorporación de todos los dispositivos. El momento de institucionalización propuesto por el docente luego del trabajo de cada dispositivo, permite que los alumnos comuniquen y fundamenten sus técnicas a partir del entorno tecnológico en construcción. En este intercambio entre estudiantes y el docente, se busca generar criterios a la hora de elegir una u otra técnica para dar respuestas a las actividades.

En los ejercicios de verdadero o falso diseñados para los dispositivos Nº2 y Nº3, se proponen afirmaciones utilizando diferentes objetos ostensivos para referirse a las coordenadas de un vector en una base específica. Por ejemplo, se solicita indicar la afirmación incorrecta y se dan tres afirmaciones equivalentes y correctas, que se refieren a los mismos conceptos, pero con diferentes ostensivos: $u = (-14, 10)$; $u = -14i + 10j$; $u = -2w + v$. El indicador de completitud que se refuerza con estas actividades es el **OML3** - *Independencia de los ostensivos que integran las técnicas*, evitando que asocien las técnicas trabajadas con un único tipo de representación ostensiva.

Al indicador **OML4** - *Existencia de tareas inversas* lo consideramos para la elaboración del dispositivo Nº3, ya que a partir de las incorporaciones se introducen tareas donde se han intercambiado datos por incógnitas promoviendo de este modo el razonamiento inverso.

Los indicadores **OML5** - *Interpretación del resultado de aplicar las técnicas* y **OML7**- *Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica*, se fortalecen con todos los dispositivos diseñados porque los alumnos deben interpretar las respuestas de las actividades a partir de los elementos tecnológicos y éstos dan origen a nuevas técnicas que permiten ampliar los tipos de tareas.

Todos los dispositivos propuestos buscan fortalecer y potenciar la construcción de un entorno tecnológico-teórico que les permite a los estudiantes ser capaces de cuestionar técnicas, discernir cuál es más conveniente usar y generar nuevas técnicas que pueden ser más económicas o más eficientes.

A partir de las incorporaciones fundamentadas desde los momentos didácticos y los indicadores de completitud que se ponen en juego en cada dispositivo, es posible considerar que la organización matemática, OM $(v)_B$, resulta "más completa".

§4. Reflexiones Finales

La propuesta didáctica descripta en el presente trabajo, asociada a la organización matemática coordenadas de un vector respecto de una base dada, busca aumentar el grado de completitud de la misma a partir de la introducción de nuevos dispositivos didácticos. Dichos dispositivos contienen tareas que dan origen a nuevas técnicas que se utilizan de manera flexible y relacionadas entre sí, permitiendo la producción de otras técnicas y reforzando discursos tecnológicos. Tal como describe la autora Bosch (2000) y se presentó en los apartados anteriores, esto conduce a la mejora en la comprensión de la organización matemática local en cuestión.

Los dispositivos elaborados fueron diseñados para ser implementados tanto en la modalidad presencial como en la virtual, favoreciendo de este modo la disponibilidad de los recursos para todos los estudiantes en los diferentes contextos que atraviese la Educación Superior. Así mismo, en el caso del dispositivo Nº1, seleccionamos el software GeoGebra, que es un software libre de matemática dinámica de fácil acceso. Puede manipularse desde diferentes dispositivos, tales como computadoras, tablets y celulares, siendo estos últimos dispositivos los más frecuentes en el aula y en la vida de los estudiantes.

Si bien los dispositivos didácticos descriptos en este artículo aplican para el espacio vectorial R^2, también se han diseñado otros que transfieren los aprendizajes asociados a la OM $(v)_B$ al espacio tridimensional (*Geometría Analítica para ciencias e ingeniería. Actividades para el Aprendizaje*. Raichman y col. (2023)).

Al ser la evaluación un momento significativo dentro del proceso de estudio también se han elaborado, en coherencia con el contrato didáctico y los dispositivos aquí presentados, dispositivos específicos para las instancias de evaluación parcial y final de la asignatura en donde se presentan tareas del tipo "abiertas", diseñadas para que el estudiante pueda integrar el eje temático junto con los restantes del programa de la asignatura, fortaleciendo el indicador de completitud **OML6** - *Existencia de tareas matemáticas "abiertas"*.

Bibliografía

Bosch, M. (2000). Un punto de vista antropológico: la evolución de los "elementos de representación" en la actividad matemática. En N. C. Rodríguez, L. C. C. González, J. C. Yañez & M. S. Vázquez (Eds.), *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 15-28). Huelva, España: Collectanea, Universidad de Huelva.

Bosch, M., Fonseca, B. C., & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *24*, 205-250. https://www.researchgate.net/publication/285438796_Incompletitud_de_las_organizaciones_matematicas_locales_en_las_instituciones_escolares

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas educativas en la teoría antropológica de la didáctica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266. https://inscastelli-cha.infd.edu.ar/sitio/upload/Chevallard_Teoria_Antropologica_-_TAD.pdf

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. ICE-Horsori. http://hdl.handle.net/2445/174473

Fonseca, C., Bosch, M., & Gascón, J. (2010). El momento del trabajo de la técnica en la completación de Organizaciones Matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios. *Educación matemática*, *22*(2), 5-34. https://www.researchgate.net/publication/262703523_El_momento_del_trabajo_de_la_tecnica_en_la_completacion_de_Organizaciones_Matematicas_el_caso_de_la_division_sintetica_y_la_factorizacion_de_polinomios

Raichman, S., & Mirasso, A. (2018). Modelos pedagógicos para el aprendizaje complejo y la formación en competencias en carreras de ingeniería. *Revista Académica de la Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Yucatán*, *22*(3), 15-25. http://www.revista.ingenieria.uady.mx/ojs/index.php/ingenieria/article/view/127

Raichman, S., Totter, E., Videla, D., Collado, L., Codina, F., Molina, G., Cascone, A., Fitt, G., & Cuervo, F. (2023). *Geometría analítica para ciencias e ingenierías: Actividades para el aprendizaje*. Quellqasqa. https://bdigital.uncu.edu.ar/fichas.php?idobjeto=18378

Gisela P. Fitt
Facultad de Ingeniería, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Cuyo.
(✉) *gisela.fitt@ingenieria.uncuyo.edu.ar*

Silvia R. Raichman
Facultad de Ingeniería, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Cuyo.
(✉) *silvia.raichman@ingenieria.uncuyo.edu.ar*

Recibido: *6 de julio de 2022.*
Aceptado: *6 de noviembre de 2023.*
Publicado en línea: *27 de diciembre de 2023.*