Revista de Educación Matemática
Volumen 37, N° 1 (2022), páginas 7 – 30
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Aportes para la Enseñanza

EL ARRASTRE EN UN PROGRAMA DE GEOMETRÍA DINÁMICA. SU DOMINIO DE VALIDEZ COMO ASUNTO DE INTERACCIÓN ENTRE ESTUDIANTES Y DOCENTES

Daniel Arias, Verónica Grimaldi, Horacio Itzcovich, Rodolfo Murúa y Silvia Segal

Resumen. Desde hace más de dos años venimos desarrollando una investigación que se propone estudiar el proceso de producción de conocimientos geométricos y didácticos de un grupo de docentes-estudiantes[1] en interacción con sus profesores, a raíz de un trabajo de construcciones geométricas mediado por el uso del programa GeoGebra.

El uso de dicho programa introduce una variable estudiada por diferentes autores y autoras que marca una diferencia con el trabajo en lápiz y papel: la posibilidad de impregnarle movimiento a los dibujos que se construyen, es decir, “arrastrarlos”.
El análisis que realizamos del trabajo desarrollado por los y las docentes-estudiantes —en torno a las construcciones geométricas— nos permitió interrogarnos acerca de la relación entre el arrastre, las propiedades de la figura y la validez de lo construido. En este contexto, la idea de “soportar el arrastre”[2] y su relación con el uso de ciertas propiedades nos resultó insuficiente para interpretar las elaboraciones de los y las docentes-estudiantes en términos de producción de conocimiento.
En este artículo nos proponemos problematizar este asunto a partir del análisis de algunos episodios acontecidos en las clases del Seminario de Geometría de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria de la Universidad Pedagógica Nacional (Unipe).

Palabras clave: Geometría dinámica, Arrastre, Enseñanza de la geometría.

Abstract. For more than two years we have been developing an investigation that aims to study the process of production of geometric and didactic knowledge of a group of teacher-students[3] in interaction with their teachers, as a result of a work of geometric constructions mediated by the use of the program GeoGebra.

[1]Se trata de docentes de escuelas primarias en ejercicio que se encuentran estudiando una carrera.
[2]La expresión “soportar el arrastre”, refiere a la invariancia de las propiedades que definen a la figura que se representa mediante un programa de geometría dinámica, al desplazar los elementos que la constituyen.
[3]These teachers teach in elementary school and they are also studying a career.

The use of this program introduces a variable studied by different authors that makes a difference with the work in pencil and paper: the possibility of impregnating movement to the drawings that are constructed, that is, "dragging" them.
The analysis that we developed of the work carried out by the teacher-students —around geometric constructions— has allowed us to question ourselves about the relationship between dragging, the properties of the figure and the validity of the construction. In this context, "the dragging test"[4] and its relationship with the use of certain properties was insufficient for us to interpret the elaborations of the teacher-students in terms of knowledge production.
In this article we propose to problematize this issue from the analysis of some episodes that occurred in the classes of the Geometry Seminar of the Bachelor of Mathematics Teaching for Primary Education of the National Pedagogical University (Unipe).

Palabras clave: Dynamic Geometry-Drag-Teaching Geometry.

§1. Introducción. Puntos de partida

En este artículo pretendemos avanzar en una discusión sobre nuevos problemas de enseñanza de la Geometría que se nos presentan al proponer tareas que involucran el uso de un programa de geometría dinámica, en este caso, GeoGebra.

Nos situamos en un aula de formación de Licenciadas y Licenciados en Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria, en la cual la enseñanza de la Geometría tiene como punto de partida que las y los docentes-estudiantes se ubiquen en una posición de producción de conocimiento. Desde este marco queremos compartir algunos nuevos desafíos que se presentan para quienes estamos a cargo de dicha enseñanza cuando las interacciones se encuentran mediadas por el software anteriormente mencionado.

En este ámbito nos vimos sorprendidos ante situaciones de interacción con las y los docentes-estudiantes que nos llevaron a reconsiderar la validación de ciertos procedimientos que toman una impronta distintiva respecto de aquellos que ocurren habitualmente cuando se utilizan los instrumentos tradicionales de la Geometría.

En aras de ganar claridad en la exposición de las ideas que se van a ir desarrollando en el presente artículo, es que resulta necesario describir sucintamente el trabajo que realizamos en la carrera mencionada. Las consideraciones que siguen tienen como finalidad contextualizar las tareas que realizamos a la luz de un modo particular de asumir el trabajo geométrico que queremos que viva en el aula, tanto para la formación profesional como en otros niveles de enseñanza.

El trabajo de las y los docentes-estudiantes en la carrera está situado en torno a tres aspectos: uno ligado a la formación disciplinar, es decir, se trata de construir una posición de dominio de la disciplina en los maestros y maestras, ampliando su formación de grado. Otro aspecto, más cercano a la didáctica específica, propone

[4]The expression "dragging test" refers to the invariance of the properties that define the figure that is represented by a dynamic geometry program by moving its constituent elements.

el estudio analítico de proyectos de enseñanza y de producciones teóricas que alimenten las discusiones en el aula de formación. Por último, la construcción de un marco compartido con el objetivo de problematizar las prácticas de enseñanza para su estudio. Estos aspectos se entrelazan continuamente y su presentación separada solo tiene sentido a efectos de una caracterización general.

A lo largo del Seminario de Geometría, se les propone a las y los docentes-estudiantes un conjunto de problemas geométricos con el objetivo de que se involucren en una tarea de producción de argumentaciones que sustenten los conocimientos que ponen en juego en cada resolución. Hemos tomado la decisión de que el uso del programa GeoGebra aparezca desde el inicio de las actividades, más allá de la experiencia que tengan en su uso. Pretendemos que lo discutido y analizado se constituya en un punto de referencia para el trabajo en las aulas de la escuela primaria, aunque en muchos casos los problemas geométricos presentados no sean los mismos que se abordan en el nivel destino de enseñanza. En particular, nos proponemos que las situaciones y la gestión de la clase pongan de relieve aspectos del trabajo matemático-didáctico que desnaturalicen algunas prácticas que asocian la enseñanza de la geometría principalmente a un conjunto de definiciones, afirmaciones y vocabulario en relación a ciertas figuras (Fregona, 2005; Sadovsky, Parra, Itzcovich, y Broitman, 1998). El carácter descriptivo que en numerosas oportunidades se otorga a las tareas presentadas en las escuelas deja de lado un aspecto que nos interesa particularmente y que tiene relación con el potencial anticipatorio y la búsqueda de argumentaciones propias de la Geometría.

De esta forma, una propuesta de este Seminario es que el trabajo de orden matemático (en principio) permita discutir: la pertinencia de las prácticas ostensivas en Geometría, el papel de la visualización, los puntos de apoyo que pueden tener las argumentaciones en la clase, el potencial didáctico de considerar a las alumnas y a los alumnos como productores de conocimiento geométrico, los diferentes niveles de validación de una propiedad, la puesta en juego de los supuestos epistemológicos que asumen diferentes tipos de trabajo geométrico, tanto en la selección de problemas como en su tratamiento en la clases.

Los momentos de exploración de los problemas geométricos propuestos para ser resueltos con GeoGebra se encuentran atravesados tanto por la complejidad del trabajo disciplinar como por el uso del programa.

Para acotar el tipo de problemas geométricos y de tareas, es que hemos elegido, primordialmente, las construcciones geométricas a partir de ciertos datos iniciales. Entendemos que esta tarea permite poner en juego las propiedades de las figuras y al mismo tiempo dar lugar a la búsqueda y emergencia de argumentaciones[5].

Con respecto al modo de organización de la clase, contemplamos instancias de resolución individual y grupal. Ellas constituyen el punto de inicio para el

[5]En el apartado sobre aspectos metodológicos se profundiza esta idea.

intercambio de conocimientos que, a posteriori, darán lugar a diferentes escrituras, formulaciones y argumentaciones que, desde la mirada de cada docente-estudiante, sustentan el trabajo realizado.

La experiencia de las y los docentes-estudiantes en el uso de programas de geometría dinámica es muy diversa. Los primeros pasos, en general, se suceden en torno a la selección de las herramientas a utilizar, traccionados por la tarea que supone una construcción geométrica. Entendemos que esta selección, luego de las primeras exploraciones, crea un espacio fértil para asociar las decisiones tomadas en acto a una o más propiedades geométricas. En un segundo momento, se instala en la clase un espacio de argumentación con intención de conocer por qué lo realizado responde a la consigna en cuestión.

Justificar el paralelismo, la perpendicularidad o decidir si dos figuras son congruentes, son cuestiones que invitan a la elaboración de diferentes tipos de argumentaciones al trabajar en un entorno de geometría dinámica. Un diálogo entre lo perceptivo y lo argumentativo empieza a constituirse como el modo en que se desarrolla esta parte del seminario. El espacio para la validación de las construcciones permite considerar los diferentes alcances de las formulaciones matemáticas propuestas y sus relaciones con los aspectos procedimentales de la construcción.

El programa GeoGebra permite mover[6] ciertos elementos con diferentes grados de libertad, de acuerdo a la selección y orden en que se utilicen las herramientas disponibles y del objeto matemático en cuestión. De este modo, el programa va armando un protocolo de la construcción que preserva las relaciones definidas de acuerdo al orden en que estas fueron ejecutadas.

Esta lógica con la cual se ha diseñado el programa (en constante evolución) imprime algunas características que nos resultan muy interesantes a la hora de poner en relación las decisiones que toma un sujeto —al momento de construir un dibujo en GeoGebra— con las herramientas y propiedades de las figuras, asunto central del Seminario. Esta característica resulta de especial interés para quienes, como nosotros, consideran la disposición de los conocimientos de las alumnas y los alumnos como condición para ofrecer situaciones de enseñanza situadas.

Así, por ejemplo, si se construye un cuadrado, que en apariencia lo es o se tiene algún argumento para constatar su construcción, es el mismo programa —mediante el movimiento— quien nos habilita a identificar si se han tomado o no las decisiones explícitas de perpendicularidad y equidistancia que se necesitan para dicha construcción. De aquí se entiende que el programa haya sido construido relacionando propiedades geométricas con herramientas, es decir, para que un dibujo realizado en GeoGebra —que representa a cierta figura— mantenga invariante

[6]GeoGebra, en tanto recurso tecnológico, considera la misma denominación de un punto aunque se lo desplace en el plano.

las propiedades involucradas, es necesario apelar a las herramientas que se vinculan con las relaciones que definen a la figura en cuestión.

De este modo el uso de GeoGebra permite imprimirle una ventaja a las construcciones con respecto al uso del lápiz y papel: la posibilidad de que los movimientos se encuentren "atados" a las relaciones geométricas. Con esta característica, si se ha construido un cuadrado con ciertas herramientas pertinentes, al mover alguno de sus elementos seguirá siendo cuadrado. En este caso se considera que "resiste el arrastre" (Laborde y Capponi, 1994; Restrepo, 2008; Arcavi y Hadas, 2003; Acosta Gempeler, 2005; Soury-Lavergne, 2011).

Algunos estudios sobre la enseñanza, que incluyen programas de geometría dinámica, han aprovechado esta cualidad para realizar clasificaciones en torno a las construcciones en términos de su potencial didáctico[7]. De ellas parece devenir el hecho que si una figura resiste el arrastre entonces está construida mediante relaciones geométricas pertinentes; en cambio, si "se desarma" nos indica que, en algún paso de la construcción, alguna propiedad no se ha utilizado de manera explícita, es decir no se ha recurrido a ciertas herramientas pertinentes. En el presente artículo daremos cuenta de que, para el tipo de trabajo que describimos, estas clasificaciones nos resultaron insuficientes y es por esta razón que hemos necesitado considerar nuevas categorías.

Al principio decíamos que una de las cuestiones directrices de nuestro trabajo en el dictado del Seminario supone que los y las docentes-estudiantes produzcan conocimiento; es condición necesaria entonces acceder a dichos conocimientos para ofrecer tareas que permitan su evolución. Para estas condiciones, como hemos mencionado en el párrafo anterior, no nos fue suficiente que una construcción resista o no el arrastre. Muchos conocimientos que se ponían en juego en ciertas construcciones, constitutivos de sus esquemas geométricos, no se podían relevar de este modo. Intentamos realizar un aporte, no por oposición, sino con la intención de ampliar el constructo teórico y caracterizar ciertas prácticas "interesantes" desde el punto de vista geométrico que exceden el tipo de clasificación propuesta.

§2. Consideraciones metodológicas

Este artículo, como ya fue mencionado, emerge de una investigación que venimos desarrollando en la Universidad Pedagógica Nacional y que se propone estudiar el proceso de producción de conocimientos geométricos y didácticos por parte de un grupo de docentes-estudiantes, en interacción con sus profesores[8], en el marco de las condiciones que plantea el desarrollo de un seminario de Geometría que forma parte de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria. Más específicamente, el estudio focaliza en el período en que se involucra

[7] Estos aspectos se desarrollan en el Marco Teórico.
[8] Los profesores y profesoras del Seminario también son integrantes del proyecto de investigación.

a las y los participantes del Seminario en un trabajo de construcción de figuras geométricas, mediado por el uso del programa GeoGebra, así como la reflexión sobre el mismo proceso de resolución.

Las construcciones geométricas, bajo ciertas condiciones, favorecen el estudio de las propiedades de las figuras. ¿Por qué afirmamos esto? Al intentar realizar un dibujo que sea representante de una cierta figura —recurriendo a los datos con los que se cuenta y utilizando ciertos instrumentos y trazos—, la exigencia de preservar o lograr atrapar en esa representación las propiedades o características que la definen, pone en relación el dibujo —o los dibujos— con dicho referente teórico para que el trazado sea reconocido como una de las posibles representaciones del objeto que se pretende construir, incluso más allá de lo que indique "el ojo". Es decir, se trata de establecer si los elementos que se dan para representar una figura la determinan o no, y este análisis pone en juego propiedades geométricas (Sadovsky y cols., 1998).

En el desarrollo del Seminario se les solicitó a las y los docentes-estudiantes la entrega de todos los ensayos realizados al intentar resolver algunos de los problemas, sean estos erróneos, incompletos o correctos, con la finalidad de "rastrear" el recorrido, las dificultades, las transformaciones que operaron, etc. En este sentido, aprovechamos una ventaja con que cuenta GeoGebra que es la posibilidad de acceder al proceso de construcción mediante su protocolo.

Cada clase del seminario fue grabada en video así como registrados algunos diálogos o debates con audios. Se transcribieron todas las grabaciones con la finalidad de contar con diversas fuentes para el análisis del proceso de producción de ideas matemático-didácticas por parte de las y los docentes-estudiantes.

Numerosos fenómenos que ocurrieron en el aula del Seminario y que no habíamos anticipado emergieron posteriormente a la luz del análisis de las grabaciones desarrollado por el equipo. Esta diferencia en el tiempo nos impidió volver al aula para poner en debate con los y las docentes-estudiantes algunos aspectos que identificamos como nodales.

Previo al dictado de este Seminario habíamos observado que muchas prácticas de enseñanza que involucran el uso de GeoGebra se apoyaban en una clonación (Damisa, M.L., y Piedra Cueva, 2017) de actividades pensadas originalmente para ser desarrolladas en lápiz y papel, lo que nos llevó a interrogarnos acerca de las tareas que propondríamos y los recursos que podrían desplegar los y las docentes-estudiantes, íntimamente asociados con dicha práctica. Anticipábamos que el movimiento o arrastre pondría en tensión las concepciones sobre la geometría y su enseñanza que tenían los y las docentes-estudiantes, habituados al trabajo con lápiz y papel e instrumentos geométricos. El análisis posterior que realizamos —dentro del equipo de investigación— de las producciones que emergieron en el aula del Seminario nos alertó que las categorías a las que pudimos tener acceso para comprender y explicar algunas de las construcciones geométricas comenzaron a resultarnos insuficientes.

§3. Referencias teóricas

Diferentes trabajos (Laborde y Capponi, 1994; Berthelot y Salin, 1994; Sadovsky y cols., 1998; Itzcovich, 2005, etc.) dan cuenta de las dificultades que encuentran muchos y muchas docentes para lograr otorgarle sentido a la enseñanza de la Geometría. Tanto en su experiencia escolar como en su formación inicial, la perspectiva que suelen elaborar las maestras y los maestros sobre la enseñanza de esta rama de la matemática queda asociada principalmente a un conjunto de definiciones, afirmaciones y vocabulario que se aplican a ciertas figuras.

La perspectiva recientemente descripta incide en el despliegue de prácticas de enseñanza —asociadas a los objetos geométricos— que han sido identificadas en diferentes investigaciones como "un conjunto de procedimientos didácticos que caracteriza cierta forma de introducir las nociones a través de "definiciones" (Fregona, 2005). Se elude, de esta manera, cualquier tipo de interacción entre los objetos presentados y las actividades intelectuales que podrían desarrollar las y los estudiantes al enfrentarse a un problema que demande la producción de relaciones geométricas (Berthelot y Salin, 1992). Este tipo de práctica *ostensiva* (Ratsimba-Rajohn, 1977; Berthelot y Salin, 1992; Fregona, 2005) tiene como supuesto que la percepción, la manipulación de dibujos y las definiciones, por parte de los alumnos y las alumnas, les permitirían "ver" el conjunto de características que definen a las nociones presentadas.

En una primera aproximación, entendemos que los objetos geométricos están caracterizados por relaciones que justamente constituyen el propósito del estudio de la Geometría. Las relaciones que se pueden establecer entre los elementos que constituyen una figura —o entre figuras— no provienen de la experiencia sensorial, ni de las medidas, sino que son el resultado de procesos deductivos, dentro de un cierto sistema axiomático. Se trata de un tipo de trabajo que involucra la posibilidad de producir o inferir relaciones que verifican las figuras, a partir de los datos que se disponen y de propiedades conocidas, de manera independiente de la experimentación. Sin embargo, en la trayectoria de las maestras y los maestros tanto lo sensorial como lo empírico intervienen en el proceso de construcción de un vínculo con la Geometría, de un modo que nos proponemos problematizar.

Estas consideraciones ponen en el centro la complejidad de las relaciones entre dibujos y figuras, considerando, en principio, que un dibujo es una marca, un trazo, en tanto que la figura sería el objeto ideal, teórico que resulta representado por dicho dibujo. Diferentes autores y autoras (Arsac y cols., 1992; Fregona, 1995; Laborde y Capponi, 1994; Berthelot y Salin, 1994, etc.) comparten la perspectiva que sostiene que la figura es el objeto geométrico descrito por el texto que la define, una idea, en tanto que el dibujo es una representación de este objeto (Parzysz, 1988). Laborde (1997) incluye la idea de dibujo en tanto significante de un referente teórico (que anteriormente se ha designado con el término de figura). Y va un poco más allá:

> La figura geométrica consiste en el emparejamiento de un referente dado con todos sus dibujos, queda entonces definida como el conjunto de pares formados por dos elementos, siendo el primer elemento el referente, el segundo uno de los dibujos que lo representa; el segundo elemento se toma del universo de todos los dibujos posibles del referente. El término figura geométrica así entendido remite al establecimiento de una relación entre un objeto geométrico y sus posibles representaciones. (Laborde, 1997, p.67)

Al considerar desde la enseñanza de la Geometría la inclusión del desplazamiento o el movimiento de los dibujos que se construyen, se vuelve a poner en el centro la complejidad de las relaciones entre dibujos y figuras. La posibilidad de movimiento o "arrastre" genera una expectativa sobre el resultado de las decisiones tomadas: si el dibujo se deforma o no, si sigue siendo lo que se intentaba dibujar o se desarma. Hipotetizamos que esta "sorpresa" (Arcavi y Hadas, 2003) abona al análisis de las relaciones entre las propiedades de la figura, las herramientas utilizadas y las relaciones geométricas subyacentes.

A lo largo de todos estos años, la noción de arrastre se fue profundizando y resignificando. Restrepo (2008) menciona a varios autores (Arzarello, Olivero, Paola, y Robutti, 2002; Olivero, 2003) que plantearon diferentes usos y sentidos del desplazamiento por parte de las y los estudiantes, durante un proceso abierto de resolución de problemas utilizando el software de geometría dinámica llamado Cabri[9]. Posteriormente, Restrepo (2008) estudiando la génesis del desplazamiento utiliza estas caracterizaciones del movimiento en su investigación y a raíz de las mismas, identifica nuevos sentidos.

Como sostienen estos autores y autoras, al mover un dibujo realizado en un programa de geometría dinámica, a partir de sus puntos móviles, interviene una nueva variable que no está presente en lápiz y papel: el tiempo. En consecuencia, es posible considerar inicialmente el dibujo original y luego el dibujo en su posición final, lo que involucra una mirada discreta. Esta perspectiva, que Olivero (2003) denomina foto-desplazamiento, no focaliza en el proceso de cambio del dibujo original.

[9]El programa CABRI-GÉOMÉTRE II fue diseñado por Jean Marie Laborde y Franck Bellemain en la Universidad Joseph Fourier de Grenoble (Francia) a principios de los años '80. Al igual que otros programas de geometría dinámica permite la realización de dibujos que se pueden "mover" conservando las propiedades que les han sido atribuidas en la construcción.

Por otro lado, cuando sí se considera a toda la familia de dibujos resultante del movimiento, Olivero (2003) lo llama cine-desplazamiento. Esta mirada continua, creemos que potencia el análisis de los invariantes de la figura, en función de cierta intencionalidad docente.

Restrepo (2008) toma estos dos desplazamientos, pero les incorpora nuevos sentidos. En particular, nos detendremos en dos de ellos: desplazamiento para validar una construcción y desplazamiento para invalidarla. Veamos las definiciones que incorpora la investigadora:

1. Mover para validar una construcción (prueba de arrastre): mover todos los puntos móviles de una construcción para ver si conserva las propiedades aparentes en el estado inicial. Si es así, entonces se valida la construcción; en el caso contrario, se invalida, la construcción, no se construyó de acuerdo con las propiedades geométricas requeridas.

   El sujeto asume que la construcción es correcta y que, gracias al desplazamiento, ésta será validada; por lo tanto, es posible que se sorprenda al encontrar una posición en la que su construcción pueda ser invalidada. Para poder validar una construcción, el desplazamiento debe observarse continuamente y, por lo tanto, utilizar un cine-desplazamiento.
2. Desplazamiento para invalidar una construcción: mover los puntos base de una construcción para encontrar una posición que permita invalidarla. El sujeto asume que la construcción no se construyó correctamente y utiliza el desplazamiento para encontrar una posición para invalidarla. El objetivo es encontrar una configuración particular de la figura, el desplazamiento se utiliza de manera discreta, por lo que usamos un foto-desplazamiento (p. 44).

Nos resulta desafiante, en función de nuestra experiencia e investigación en la enseñanza de la Geometría incorporando el programa GeoGebra, problematizar estos conceptos teóricos. Creemos que estudiar sus alcances, sus límites, la misma idea de arrastre y sus diferentes sentidos y usos, puede resultar un insumo potente para propiciar un debate didáctico en nuestras aulas, aspecto que detallaremos a lo largo de las próximas páginas con la intención de abrir a nuevas miradas posibles.

Problematizar estos distintos usos y sentidos que podrían adquirir los desplazamientos es parte de la intención de este trabajo, en particular el referido a la idea de "soportar el arrastre".

§4. Dos episodios: se desarma, pero…

A continuación presentamos dos episodios acontecidos en nuestras aulas de la Universidad que abonaron a nuestros interrogantes. El primero refiere a la construcción de un rectángulo desarrollada por una docente-estudiante que recurre a la propiedad de cuatro ángulos rectos pero que "se desarma" al mover alguno de sus elementos. El segundo episodio también refiere a una construcción de un rectángulo a partir de dos de sus lados, que son perpendiculares, en la cual la construcción no soporta el arrastre a pesar de considerar la propiedad de lados opuestos iguales y un ángulo recto. Estas resoluciones dieron origen al estudio de nuevas condiciones y relaciones entre figuras que no habíamos anticipado y nos movilizaron a intentar problematizar la noción de "soportar el arrastre".

4.1. Episodio 1: ¿soporta o no soporta el arrastre? Una de las tareas que las y los docentes-estudiantes debían resolver en la segunda clase del Seminario, implicaba la construcción de un rectángulo con GeoGebra de manera tal que, al mover cualquiera de sus elementos, siguiera siendo rectángulo. Es decir, que la construcción "soporte el arrastre". Este problema tenía por finalidad, entre otras cuestiones, establecer relaciones entre el movimiento y las herramientas utilizadas como medio para tratar las propiedades del rectángulo, propiedades que las y los docentes-estudiantes ya conocían.

El asunto clave era el debate que se pretendía desarrollar en torno a la relación entre dichas propiedades y las herramientas a las que recurrían para su construcción, asumiendo que, en numerosas oportunidades, ciertas propiedades pueden ser expresadas o reconocidas por las y los docentes-estudiantes, pero no siempre son puestas en juego a la hora de resolver un problema geométrico. El arrastre resulta un buen recurso para tratar esta cuestión.

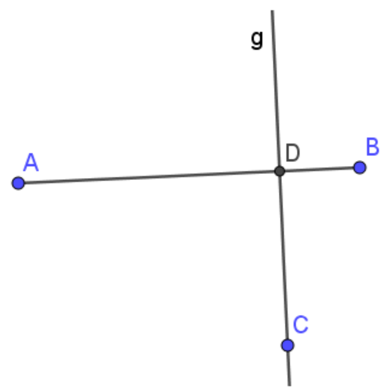

Figura 1. Segmento AB, g recta perpendicular a AB, punto C y punto de intersección D entre la recta y el segmento.

Una de las docentes-estudiantes, Ornella, desarrolló la siguiente construcción[10]: dibujó en primer lugar, con la herramienta *Segmento*, un segmento de extremos AB, ambos puntos libres, es decir, se pueden mover por cualquier lugar de la pantalla. Luego, con la herramienta *Perpendicular*, seleccionó el segmento y trazó

[10] Le recomendamos al lector o a la lectora ingresar al siguiente enlace e ir recorriendo la construcción de Ornella viendo el protocolo de construcción: https://www.geogebra.org/m/ajkvqens

una perpendicular por un punto C —libre— que, en principio, no forma parte del segmento ni de la recta en la que se encuentra dicho segmento. Así, determinó el punto de intersección D entre el segmento y la recta perpendicular, tal como se puede observar en la Figura 1:

A continuación, dibujó un punto E sobre el segmento AB y una recta perpendicular al segmento, que pasa por E, tal como se observa en la Figura 2:

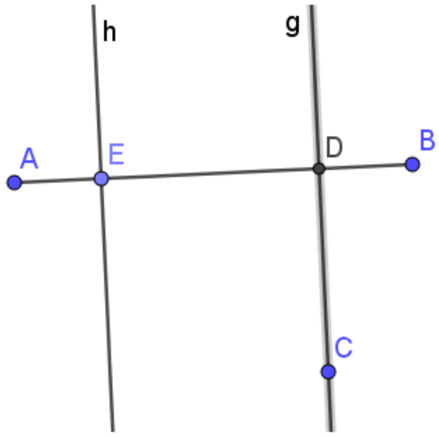

Figura 2. Punto E sobre el segmento AB y recta h perpendicular al segmento AB por el punto E.

Finalmente trazó una nueva recta perpendicular a la última dibujada (h), que pasa por C, marcó el punto F como intersección, determinando los cuatro vértices del rectángulo. Recurrió a la herramienta *Polígono* para "marcar" el rectángulo $EFCD$, tal como se identifica en la Figura 3:

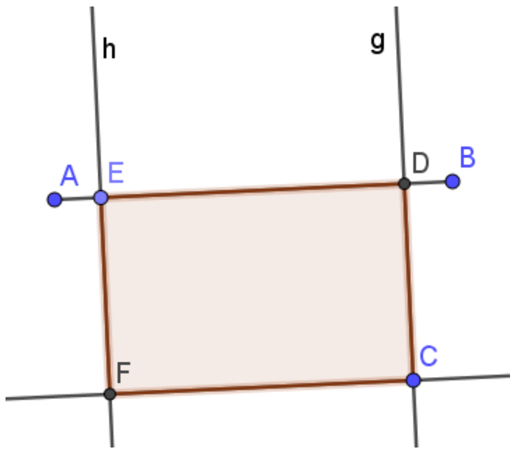

Figura 3. Recta perpendicular a h que pasa por C, punto F y polígono $EFCD$.

Ahora cabe preguntarse: esta construcción ¿soporta el arrastre? Es decir, al desplazar cualquier punto móvil, la construcción ¿se desarma o no? Notemos que, al desplazar C o E, como se muestra en la Figura 4, podemos generar otros rectángulos.

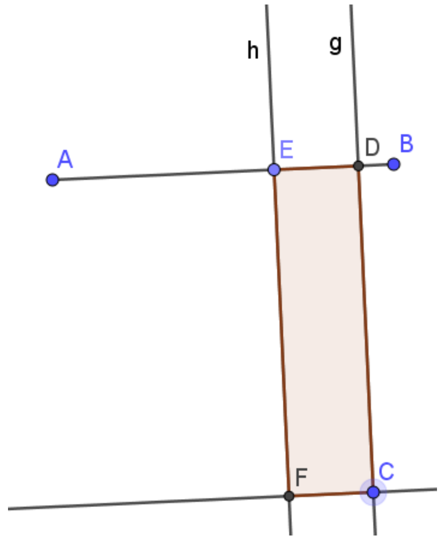

FIGURA 4. Nuevo rectángulo generado a partir del movimiento de E y C.

Más aún, podemos asegurar que este nuevo cuadrilátero es rectángulo por el proceso de construcción de Ornella, que garantiza los cuatro ángulos rectos.

Veamos ahora en la Figura 5 qué ocurre cuando movemos C —que era punto libre— "más allá"[11] de B:

[11]Al decir "más allá" de B, hacemos referencia al movimiento de la recta g hacia la derecha —a través del punto C— hasta que la misma no interseque al segmento AB, tal como se muestra en la Figura 5.

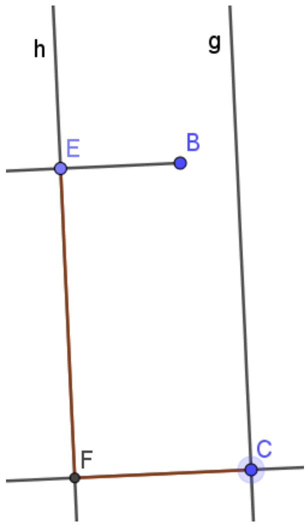

FIGURA 5. Un posible movimiento de C para que el rectángulo desaparezca.

En principio, utilizando el desplazamiento para invalidar una construcción —retomando a Restrepo (2008)—, la imagen anterior parece mostrar que la construcción de Ornella no soporta el arrastre ya que se encontró una configuración particular donde no es posible determinar un rectángulo. Sin embargo, como hemos mencionado anteriormente, en este artículo nos proponemos problematizar esta idea.

Veamos dos cuestiones. En primer lugar, la docente-estudiante consideró una de las relaciones que caracterizan a un rectángulo: cuatro ángulos rectos. En segundo lugar, a pesar de que AB es un segmento, es posible identificar que al mover el punto A, el B, y el C, se obtiene toda la "familia" de rectángulos[12]. Cabe preguntarse entonces, ¿soporta o no soporta el arrastre?

Analicemos el primer asunto. En la Figura 5 vimos un caso donde al mover *C hacia la derecha de B*[13], el dibujo deja de representar un rectángulo. Pero esto también ocurre cuando *C está a la izquierda de A*, como se muestra en la Figura 6.

[12]Más adelante volveremos sobre esta cuestión.

[13]Si bien apelamos a expresiones que no forman parte del vocabulario geométrico, las consideramos en función de haber sido las que emergieron en el aula.

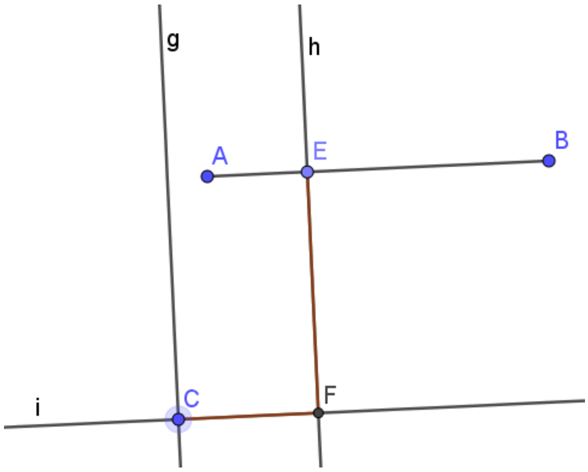

FIGURA 6. Al mover C *hacia la izquierda* de A el rectángulo también desaparece.

Pensemos ahora en las condiciones geométricas que se deben verificar para que la construcción soporte el arrastre. Si se trazan dos rectas $(j$ y $k)$ perpendiculares al segmento AB y que pasan por A y B respectivamente y luego se definen los puntos de intersección entre dichas rectas y la recta i —trazada anteriormente por Ornella— (ver Figura 7), la condición para que el rectángulo siga siéndolo es que C pertenezca al segmento GH; donde G y H fueron previamente definidos con el trazado de las nuevas rectas perpendiculares.

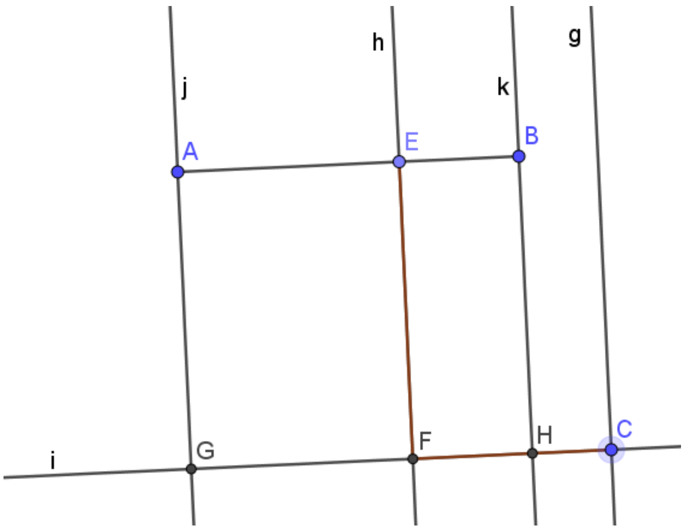

FIGURA 7. Trazado de j y k y definición de los puntos G y H como intersección.

Esta es una de las condiciones que se le puede solicitar a la construcción para que soporte el arrastre.

Pasemos ahora a la segunda cuestión. Ya hemos mencionado que es posible generar todos los rectángulos al desplazar ciertos puntos móviles de la construcción de Ornella. Entendemos que fijados A y B, para que haya rectángulo, C tiene que pertenecer al segmento GH. Pero como A y B son libres, el segmento puede ser "tan grande" como se quiera, es decir, se puede alargar "infinitamente". Por lo tanto, más allá de no poder hacerse empíricamente, podemos suponer que es posible construir cualquier rectángulo que se quiera —a partir de la construcción de Ornella—, ya que puede variarse la longitud de sus lados, manteniendo siempre los cuatro ángulos rectos.

Iniciamos este episodio mencionando el sentido que nosotros le habíamos otorgado anticipadamente a esta tarea: establecer relaciones entre las herramientas utilizadas para la construcción, el movimiento y las propiedades del rectángulo que se pondrían en juego. Desde esta intencionalidad nos resultó insuficiente considerar la construcción en términos de "soporta el arrastre" o "no soporta el arrastre". Entendemos que esta dicotomía limita las interacciones que se podrían desarrollar dentro del aula.

Ornella, en el momento de la discusión colectiva, sostuvo que hizo su construcción "a partir del segmento (AB), perpendicular, perpendicular, perpendicular…". Es decir, la docente-estudiante recurre a relaciones que caracterizan a los rectángulos y sin embargo el mismo deja de serlo para ciertos movimientos. En cambio, para "otros arrastres", a partir de ciertos elementos, se preservan todas las relaciones y es posible generar toda la familia de rectángulos. En este sentido, se puede identificar que la familia que genera la construcción de Ornella incluye otras figuras (poligonales abiertas con tres ángulos rectos) y la de los rectángulos es una subfamilia de las figuras mencionadas anteriormente. Esto nos resulta diferente a lo acontecido en otras experiencias de nuestra práctica docente. Por ejemplo, cuando frente a la tarea de construir un rectángulo que soporte el arrastre algunos alumnos construyen la familia de los cuadrados. En este último caso, la familia que se construye está incluida en la que se buscaba dibujar; en cambio, en el caso de Ornella, la familia que construyó incluye a la que se pretendía dibujar.

En consecuencia, nuevas relaciones son requeridas y que no habían sido anticipadas. Por ejemplo, la idea de polígono abierto o polígono cerrado para poder interpretar los movimientos y sus consecuencias en términos de relaciones geométricas. En este juego, no se trata entonces sólo de analizar si soporta el arrastre o no, sino la incidencia también del procedimiento de construcción como condicionante de la invariancia frente al arrastre. Es decir, hay relaciones geométricas que pueden ser explicitadas en las construcciones realizadas bajo las cuales se preserva el arrastre y otras condiciones bajo las cuales el arrastre no se preserva. Este debate, entendemos, también abona a la producción de propiedades o conjeturas en torno a ellas.

4.2. Episodio 2: El dibujo se desarma pero... Otra tarea que se les propuso a los y las docentes-estudiantes fue completar el dibujo de un rectángulo a partir de dos segmentos AB y BC perpendiculares ya dibujados en la pantalla, tal como se muestra en la Figura 8[14]. La construcción debía llevarse a cabo sin usar las herramientas *Paralela* y *Perpendicular* de manera que, al mover cualquiera de sus elementos, siga siendo rectángulo.

FIGURA 8. Dibujo que aparece en la pantalla al abrir el archivo.

En el dibujo original, A y B son puntos libres y el punto C se mueve sobre una recta (oculta) perpendicular al segmento AB y que pasa por B. ¿Por qué inhabilitamos las herramientas de paralelismo y perpendicularidad? Así planteado, esperábamos que los y las docentes-estudiantes apelen a otras propiedades que permitan asegurar que la construcción sea un rectángulo, desarrollando al menos tres procedimientos diferentes: garantizando ángulos rectos a través del uso de la herramienta *Ángulo de amplitud dada*, trasladando lados opuestos iguales, mediante el uso de la herramienta *Compás*, o bien apoyarse en las propiedades de las diagonales. Una vez realizada la construcción, se pondría el foco en la validación de la construcción, tomando como referencia las propiedades del rectángulo asociadas a las herramientas utilizadas.

La situación habilita a problematizar cuáles son las condiciones mínimas que garantizan que la construcción sea rectángulo y, en ese sentido, tratar con la relación entre definición y propiedades de las figuras. Se da lugar, así, al estudio de definiciones alternativas del rectángulo.

Algunas y algunos docentes-estudiantes apelaron al uso de la herramienta *Compás* para trasladar las medidas de los lados que se ofrecían como dato y generar lados opuestos iguales. De esta manera, los conocimientos disponibles acerca de las propiedades de las circunferencias, construidos mayoritariamente a partir de experiencias en lápiz y papel, fueron movilizados para resolver esta situación[15].

[14]En el siguiente link se encuentra la consigna del problema tal como fue presentada en el seminario. https://www.geogebra.org/m/fatxnagm

[15]Le recomendamos al lector o lectora que ingrese al siguiente link para explorar el comportamiento de la construcción: https://www.geogebra.org/m/rvsugeq7

La Figura 9 muestra algunas de las configuraciones que se obtienen al mover los puntos A, B y C de esta construcción, la cual permite obtener la "familia" de rectángulos.

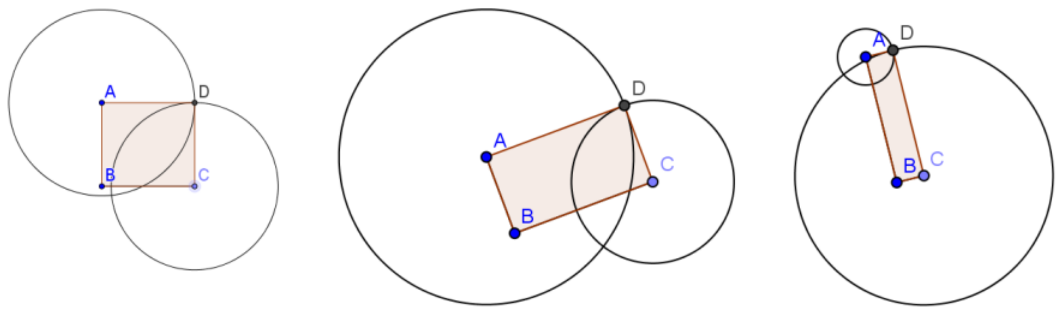

FIGURA 9. Rectángulos obtenidos a partir del arrastre de los puntos A, B y C.

En la puesta en común, se discutió sobre cómo se puede asegurar que se trata de una familia de rectángulos si sólo se sabe que los lados opuestos son iguales y que el ángulo B es recto. Es decir, cómo se puede demostrar que ese cuadrilátero tiene, efectivamente, los cuatro ángulos rectos. Trazando la diagonal AC, como muestra la Figura 10 (a) se puede inferir que los dos triángulos obtenidos son congruentes y como B es recto entonces el ángulo D también. Del mismo modo se infiere que los ángulos A y C son iguales a partir del trazado de la otra diagonal, como muestra la Figura 10 (b): dado que se trata de ángulos interiores de un cuadrilátero convexo, se puede asegurar que son ángulos rectos.

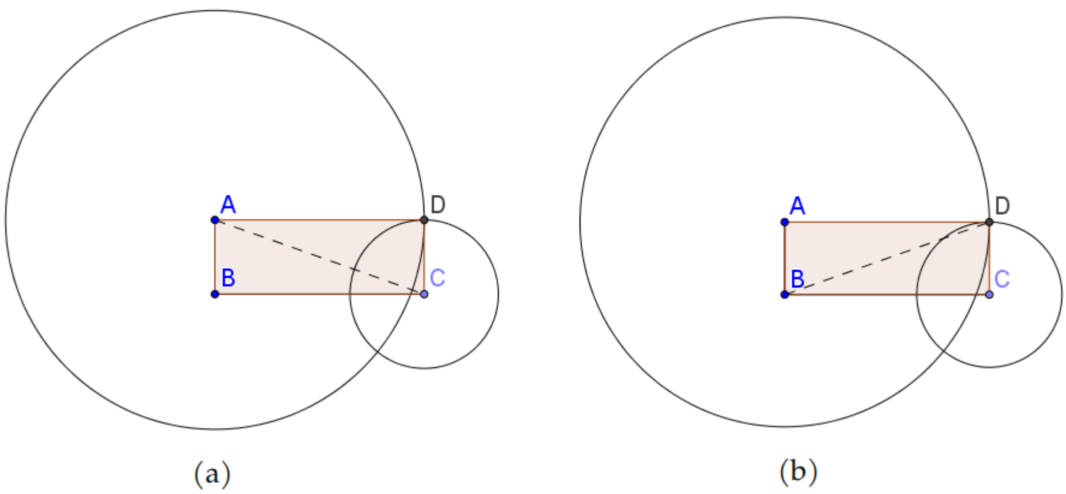

FIGURA 10. Figuras de análisis para plantear una demostración.

Configuraciones como las que analizamos en la Figura 9, que por el modo en que se lleva adelante la construcción garantiza lados opuestos iguales y un ángulo recto, aseguran en efecto, cuatro ángulos rectos. Ubicar las características iniciales de la construcción en tanto condiciones mínimas que garantizan que la figura sea un rectángulo permite elaborar una definición diferente a la que circula usualmente. Así, esta construcción nos sugirió en ese momento la siguiente definición alternativa: un rectángulo es un cuadrilátero que tiene un ángulo recto y lados opuestos iguales. Veremos a continuación que estas características definen un universo más amplio de figuras, una de las cuales es el rectángulo.

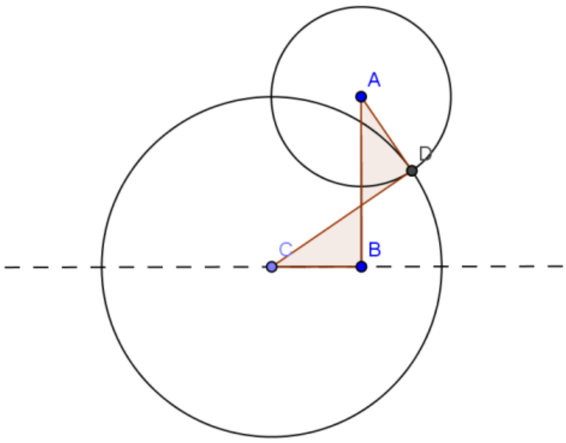

FIGURA 11. Al mover el punto C sobre la recta que contiene a BC, el rectángulo se desarma.

El episodio sobre el cual nos queremos detener tuvo lugar fuera del aula de formación, cuando en una de nuestras reuniones de investigación volvimos sobre estas construcciones. En este contexto, comenzamos a mover los puntos A, B y C y advertimos que al mover el punto C sobre la recta BC, el rectángulo "se desarma" como se muestra en la Figura 11.

4.3. Explorando el arrastre del punto C. Cuando trazamos las circunferencias, quedan determinados dos puntos de intersección D y E, tal como se muestra en la Figura 12.

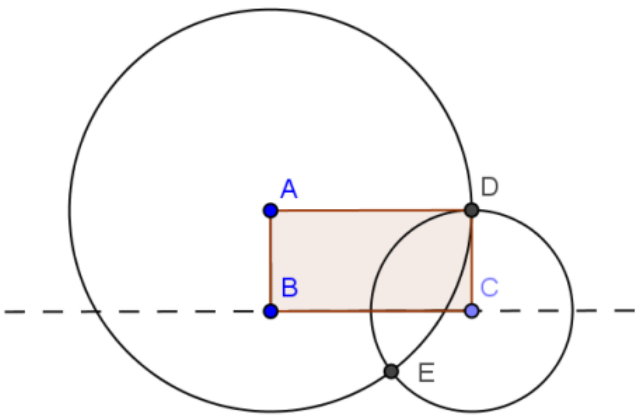

FIGURA 12. Puntos de intersección de las dos circunferencias que garantizan lados iguales.

En nuestro caso, para dibujar el rectángulo solicitado usamos el punto D, sin considerar el segundo punto de intersección. Esto podría explicarse por el hecho de que buscábamos una figura en particular: dado que queríamos construir un rectángulo, sabíamos que el punto D estaría "a la misma altura" de A. Así, desestimamos de manera implícita el punto E. Analizaremos más adelante cómo el movimiento de C colaboró en que nos resulte necesario considerar el punto E.

Es interesante señalar, asimismo, que cuando se hace la construcción en lápiz y papel, este segundo punto E de intersección de las circunferencias puede resultar "invisible" ya que habitualmente se dibujan arcos y no circunferencias. En la construcción del rectángulo en GeoGebra, este punto se "ve" en el dibujo y el hecho de elegir el punto D y no usar este otro punto E pasa inadvertido. En este sentido, podríamos afirmar que el segundo punto, también en este ámbito, parece resultar "invisible". Una primera conjetura que formulamos fue que el punto C debía moverse sólo sobre una de las semirrectas para que la figura siga siendo rectángulo. Pero además, identificar este segundo punto de intersección de las circunferencias nos llevó a profundizar el estudio de las dos figuras y sus relaciones.

Si tomamos en cuenta los dos puntos de intersección y usamos la herramienta *Polígono* podemos dibujar simultáneamente dos figuras: el rectángulo buscado $ABCD$ y los "dos triángulos". Moviendo el punto C sobre la recta, el rectángulo se transforma en un cuadrilátero cruzado y viceversa, como se muestra en la Figura 13[16].

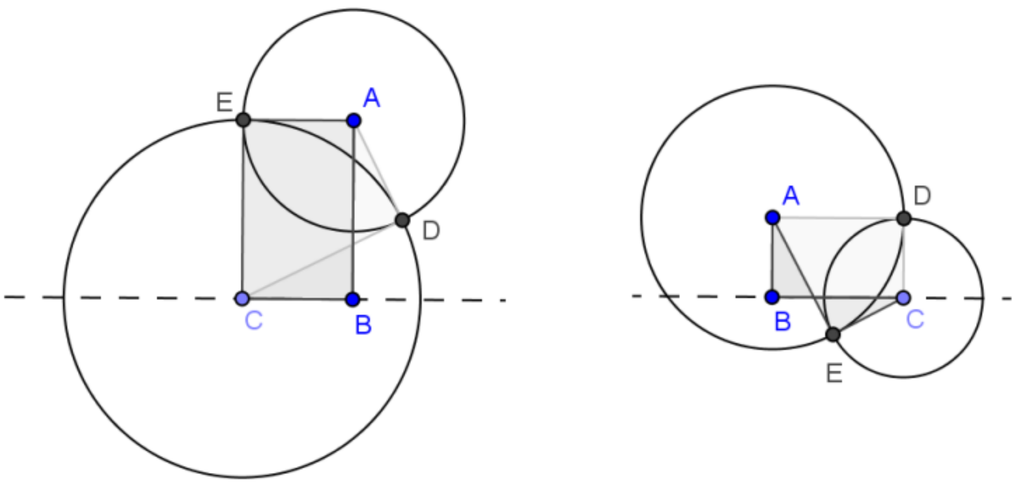

Figura 13. Figuras resultantes a partir del arrastre del punto C.

Resulta relevante destacar que si bien el programa nos habilita a mover el punto C por toda la recta, nunca antes habíamos llevado el arrastre de este punto "a la izquierda" de B. Hasta el momento en que emergió este episodio, el movimiento

[16] El lector o la lectora puede explorar el comportamiento de esta construcción en el siguiente link: https://www.geogebra.org/m/gnv9dccx

que le imprimíamos a C quedaba reducido a una semirrecta, y no por condicionamientos del entorno. Nos preguntamos entonces por qué habremos limitado el arrastre de este modo.

Entendemos que la seguridad que teníamos de que la construcción era válida se combinaba con nuestra experiencia de lápiz y papel, en la que este procedimiento produce efectivamente un rectángulo. Esa seguridad nos llevaba a mover los puntos "sólo un poco", sin considerar la exhaustividad del movimiento. Advertimos, a partir de esta situación, que el arrastre de los puntos en las construcciones de GeoGebra no es "ingenuo", tampoco para quienes, como nosotros y nosotras, tenemos cierto recorrido en el estudio de la Geometría y en el uso de este programa.

4.4. Las relaciones entre la nueva figura y el rectángulo. La construcción geométrica que se obtiene utilizando el segundo punto de intersección de las circunferencias nos generó nuevas preguntas: ¿Cuáles son las propiedades del rectángulo que se mantienen en esta nueva figura? ¿Cómo caracterizarla? Los segmentos que se cruzan, ¿se cortan en su punto medio?

En un primer momento nuestra exploración fue puramente empírica: apelamos al arrastre de los puntos A, B y C, y usamos la herramienta *Distancia o longitud* para elaborar nuestras primeras conjeturas sobre las propiedades de esta figura. Si bien no nos ayudó a demostrarlas, nos permitió precisar las relaciones que la caracterizan y cuáles de ellas era necesario demostrar.

El arrastre de los puntos nos permitió hipotetizar, más aún, afirmar que los dos triángulos que componen la nueva figura son congruentes. Pero… ¿por qué?

Apelando a la congruencia de los triángulos ABC, ADC y AEC de la Figura 14 podemos demostrar que los dos triángulos ADF y CBF son congruentes entre sí.

Esta nueva figura es un rectángulo cruzado, tiene cuatro lados, dos de los cuales se intersecan en un punto que no es un vértice y tiene dos pares de lados iguales pero sólo dos ángulos rectos.

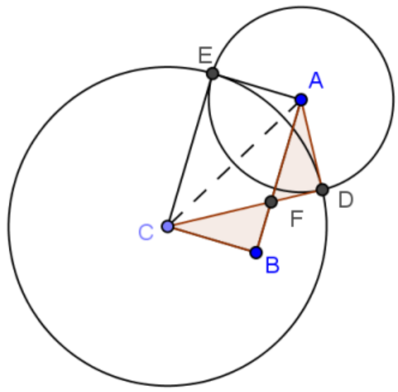

FIGURA 14. Rectángulo cruzado.

Una propiedad interesante que relaciona a las dos figuras que se obtienen a partir de la construcción que hemos discutido (rectángulo y rectángulo cruzado) es que ambas están inscriptas en una misma circunferencia cuyo centro es la intersección de las diagonales del rectángulo, como se muestra en la Figura 15. Dejamos a cargo del lector o de la lectora la demostración de esta propiedad.

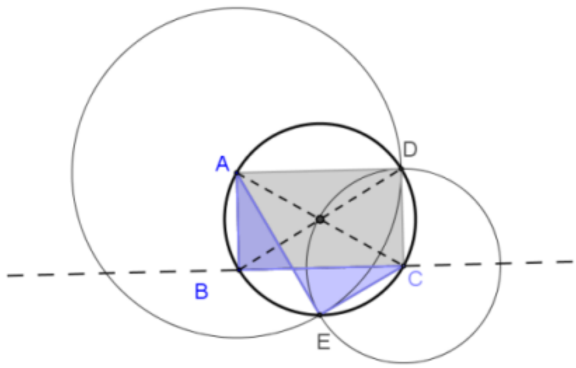

Figura 15. Rectángulo y rectángulo cruzado inscriptos en la misma circunferencia.

Queremos resaltar que este debate surge de problematizar la construcción cuando arrastramos el punto C sobre la recta. Es el movimiento el que puso en cuestión nuestras certezas y nos indujo a estudiar las condiciones para que la construcción se ajuste a la consigna, así como a la elaboración de nuevas propiedades y relaciones geométricas que no habíamos anticipado.

Volvamos al origen de la construcción. Si el punto C que se ofreció originalmente como vértice del rectángulo hubiera estado sobre una semirrecta, nada de esto hubiera sucedido. Por lo tanto, tal como propusimos en el episodio 1, queremos analizar la incidencia que tiene el procedimiento de construcción como condicionante de la invariancia frente al arrastre además de considerar si la construcción soporta el arrastre o no.

Una vez validada la construcción y analizadas las condiciones bajo las cuales preserva el arrastre, puede resultar interesante promover el debate acerca de las propiedades en juego cuando la figura original ya no soporta el movimiento. En nuestro caso, nos llevó a revisar la validez de la construcción para inferir que los ángulos EAB y ECB son rectos sólo porque la figura construida (el rectángulo) es un cuadrilátero convexo, característica que no habíamos tenido en cuenta antes de todo este recorrido.

§5. Reflexiones finales

Nos propusimos en este artículo problematizar la idea de "soportar el arrastre", intentando abonar a un proceso de ampliación de su sentido.

Los y las docentes-estudiantes que llevaron a cabo las construcciones en los episodios analizados tienen disponibles propiedades que verifican las figuras que son objeto de estudio; saben que el rectángulo tiene cuatro ángulos rectos y lados opuestos iguales y paralelos. Con estos conocimientos y algunos otros menos disponibles en relación al uso de GeoGebra, comunican al programa una cierta construcción, a partir de las herramientas que el mismo ofrece y que ellos y ellas hipotetizan que atraparán las propiedades que intentan poner en juego. Podemos afirmar que cuando los y las docentes-estudiantes deciden recurrir a las herramientas *rectas paralelas*, *rectas perpendiculares* o *circunferencias*, anticipan que su uso les garantizará la presencia de los ángulos rectos y la igualdad en las longitudes de los lados opuestos. En este caso se conjugan conocimientos geométricos y herramientas de GeoGebra que las sostienen.

Una construcción usual en la escolaridad de un rectángulo en lápiz y papel, se inicia con un segmento y luego se recurre a una escuadra que se desplaza para obtener una perpendicular (semirrecta) que pase por uno de los extremos de dicho segmento. En cambio, como analizamos en el episodio 1, la construcción con GeoGebra de la recta perpendicular al segmento no exige considerar alguno de sus extremos ya que el arrastre permite ubicarla en cualquier lugar del plano y luego moverla para que pase (al menos visualmente) por alguno de los extremos del segmento, a partir de un punto C arbitrario que define a dicha perpendicular.

En el episodio 2, el proceso de selección de un único punto de intersección entre las dos circunferencias interpretamos que remite a la tarea que implica la construcción de un rectángulo. Al mismo tiempo, la experiencia en lápiz y papel puede influir en las decisiones que se toman, ya que no siempre se dibujan las dos circunferencias completas (se suelen dibujar "arcos"), en consecuencia, no "aparecen" los dos puntos de intersección.

En ambos episodios, creemos que el arrastre que se le puede imprimir a las construcciones, además de involucrar conocimientos geométricos, está condicionado por la tarea que se solicita (en nuestro caso, construir un rectángulo). En consecuencia, en ciertas oportunidades, quien realizó la construcción limita el arrastre de los puntos móviles a los lugares del plano donde se cumplen las condiciones requeridas.

En este marco, el análisis de la pertinencia de las construcciones geométricas involucra no solo al movimiento sino también a la determinación del conjunto de puntos —o los lugares de la pantalla— en los cuales dicho movimiento o arrastre preserva las relaciones que se le intentó impregnar al dibujo. Es decir, existiría un *dominio de validez del arrastre*, que definimos como *el conjunto de restricciones que tienen los puntos móviles de la construcción para que soporte el arrastre*.

Consideramos que esta idea podría abonar, en principio, a tratar con diferentes cuestiones vinculadas a la enseñanza. Por un lado, a la interpretación de las construcciones geométricas realizadas por las y los docentes-estudiantes en términos de propiedades que pudieron ser consideradas dentro del dominio de validez del arrastre en contraposición de aquellas otras que no fueron consideradas al realizar la construcción y que generan, en algún lugar del plano, que el dibujo se deforme.

Por otro lado, analizar el dominio de validez del arrastre podría colaborar en la tarea de elaboración de argumentos que expliquen los motivos por los cuales esa construcción no soporta el arrastre en todo el plano.

Además, este análisis podría favorecer la identificación de otros objetos geométricos que surgen a partir del arrastre de algunos puntos móviles de la construcción, habilitando un espacio de exploración y búsqueda de propiedades con el fin de caracterizarlos.

Todas estas consideraciones —y otras que podrían surgir— se conjugan con el tipo de tarea que se propone, las propiedades involucradas de manera explícita o implícita, los procedimientos de construcción y las decisiones que se fueron tomando. Decimos entonces que el dominio de validez del arrastre depende de todas estas variables y que es propio de cada proceso de construcción.

Bibliografía

Acosta Gempeler, M. (2005). Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática. *Educación Matemática*, *17*(3), 121-140.

Arcavi, A., y Hadas, N. (2003). Computer mediated learning: An example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *5*(1), 25-45.

Arsac, G., Chapiron, G., Colonna, A., Germain, G., Gichard, Y., y Mante, M. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège*. Lyon, Francia: Presses Universitaires de Lyon. Collection IREM.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik/International Reviews on Mathematical Education*, *34*(3), 66-72.

Berthelot, R., y Salin, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* (Tesis Doctoral no publicada). Université Sciences et Technologies-Bordeaux I, Bordeaux, Francia.

Berthelot, R., y Salin, M.-H. (1994). L'enseignement de la géométrie 'a l'ècole primaire. *Grand N*(53), 39-56.

Damisa, C., M.L., D., y Piedra Cueva, M. (2017). *Geometría en el aula con GeoGebra. Una experiencia de trabajo colaborativo en la escuela.* Montevideo, Uruguay: Grupo Macro Editores.

Fregona, D. (1995). *Diferentes dominios de declaración sobre las figuras. Ponencia de la IX CIA EM.*

Fregona, D. (2005). *Prácticas ostensivas en la enseñanza de la matemática.* (Vol. 18). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría.* Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Laborde, C. (1997). Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría. En L. Puig (Ed.), *Investigar y enseñar. Variedades en educación matemática* (p. 33-48). Grupo Editorial Iberoamericano.

Laborde, C., y Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *14*(1.2), 165-210.

Olivero, F. (2003). *The proving process within a dynamic geometry environment.* (Tesis Doctoral no publicada). University of Bristol, Bristol, Inglaterra.

Parzysz, B. (1988). Knowing vs Seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, *19*(1), 79-92.

Ratsimba-Rajohn, H. (1977). *Etude didactique de l'introduction ostensive des objets mathématiques* [*Memoire de Diplôme d'études Approfondies no publicada*].

Restrepo, A. M. (2008). *Genese Instrumentale du deplacement en Geometrie Dynamique chez des eleves de 6 eme* (Tesis Doctoral no publicada). Université Joseph-Fourier-Grenoble I, Grenoble, Francia.

Sadovsky, P., Parra, C., Itzcovich, H., y Broitman, C. (1998). *Matemática. Documento de trabajo Nº 5. La enseñanza de la Geometría en el 2º Ciclo. GCBA* (Inf. Téc.).

Soury-Lavergne, S. (2011). De l'intérêt des constructions molles en géométrie dynamique. *MathémaTICE*, *25*(1), 1-17.

Arias, Daniel
Universidad Pedagógica Nacional-Argentina
(✉) *daniel.arias@unipe.edu.ar*

Grimaldi, Verónica
Universidad Pedagógica Nacional-Argentina
(✉) *veronica.grimaldi@unipe.edu.ar*

Itzcovich, Horacio
Universidad Pedagógica Nacional-Argentina
(✉) *horacio.itzcovich@unipe.edu.ar*

Murúa, Rodolfo
Universidad Pedagógica Nacional-Argentina
(✉) *rodolfo.murua@unipe.edu.ar*

Segal, Silvia
Universidad Pedagógica Nacional-Argentina
(✉) *silvia.segal@unipe.edu.ar*

Recibido: *12 de julio de 2021*.
Aceptado: *9 de marzo de 2022*.
Publicado en línea: *25 de abril de 2022*.