
TESELANDO EL PLANO CON POLÍGONOS CONVEXOS

Ricardo A. Podestá

RESUMEN. En este artículo damos un panorama sobre la clasificación de los embaldosados del plano euclídeo por copias de un único polígono convexo (teselados monoedrales convexos). Primero mostramos que el teselado con polígonos regulares sólo es posible con triángulos, cuadrados y hexágonos, hecho ya conocido por los antiguos griegos, y que si el polígono es no-convexo entonces hay infinitos teselados posibles. Así, nos enfocamos en teselados convexos con polígonos no-regulares. Primero mostramos que cualquier triángulo o cuadrilátero tesela el plano. Después mostramos que un polígono que tesela el plano debe tener 6 lados o menos. A continuación, nos ocupamos de los hexágonos y mostramos que sólo hay 3 familias distintas de hexágonos convexos que teselan el plano. Finalmente consideramos el caso de los pentágonos que es más delicado, cuya clasificación completa pudo terminarse muy recientemente en 2017. Mostramos que hay sólo 15 familias distintas de pentágonos que teselan el plano.

ABSTRACT. In this article we give a panoramic view over the classification of tilings of the euclidean plane by using copies of a single convex polygon (convex monohedral tilings). First, we show that a tiling with regular polygons is only possible by using triangles, squares and regular hexagons, a fact wellknown by the ancient greeks, and that if the polygon is not convex then there are infinite possible tilings. In this way, we focus on convex tilings with non-regular polygons. First, we show that any triangle or quadrilateral tiles the plane. Then, we show that a polygon that tiles the plane must have at most 6 edges. Next, we consider the case of hexagons and show that there are only 3 different families of convex hexagons tiling the plane. Finally, we deal with pentagons, whose classification is more involved, and could be completed recently in 2017. We will show that there are 15 different families of pentagons tiling the plane.

Palabras clave: Embaldosados, polígonos convexos, polígonos regulares.

Keywords: Tilings, plane, convex polygons, regular polygons.

§1. Introducción

Teselar un plano (o embaldosar un piso en lenguaje coloquial) es un tema tan fascinante, tanto desde el punto de vista matemático como artístico, que ha cautivado a la humanidad desde siempre. Estos embaldosados han sido usados como ornamentación de templos, palacios y edificios importantes en diferentes épocas y culturas (¡de ahí el nombre!), llegando a un pico de maestría en la famosa fortaleza medieval *La Alhambra* situada en Granada, España.

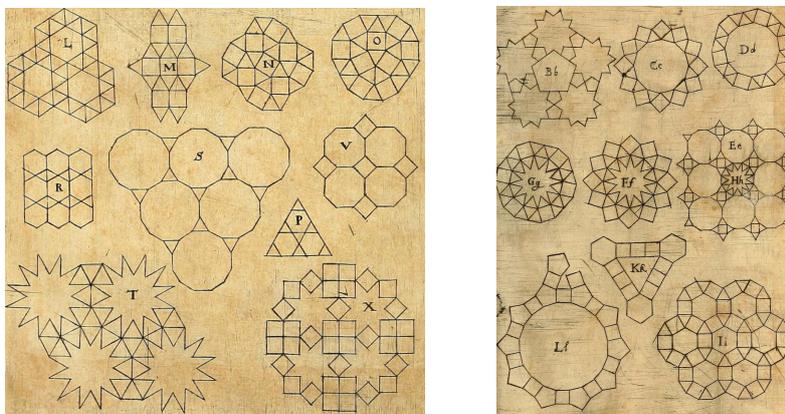
De hecho, en los innumerables mosaicos que adornan los pisos, paredes y techos de sus palacios, se pueden encontrar muchas variantes representando los 7 grupos de frisos y los 17 grupos de simetría del plano. Recordemos que un friso es una figura plana con grupo discreto de simetrías que contiene traslaciones en una sola dirección (no entraremos en



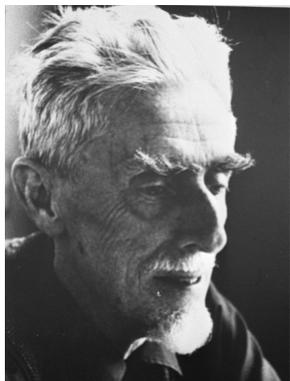
detalle sobre esto, que de por sí ya sería un tema para otro artículo). En la Figura 2 se pueden ver apenas 3 mosaicos, pero invito al lector a buscar por su cuenta en la red imágenes de mosaicos de La Alhambra para deleitarse.

El famoso astrónomo y matemático alemán Johannes Kepler (Weil der Stadt, 27/12/1571 – Ratibona, 15/11/1630) se interesó por numerosos temas relacionados entre sí como los poliedros regulares, la forma de los copos de nieve, los empaquetamientos de esferas y los teselados del plano. Él fue el primero que intentó realizar un estudio sistemático de dichos temas. En la Figura 1 vemos algunos de sus experimentos y teselados del plano que aparecen en su libro *Harmonices Mundi* (La armonía de los mundos, 1619).

FIGURA 1. Estudios de Kepler sobre teselados del plano



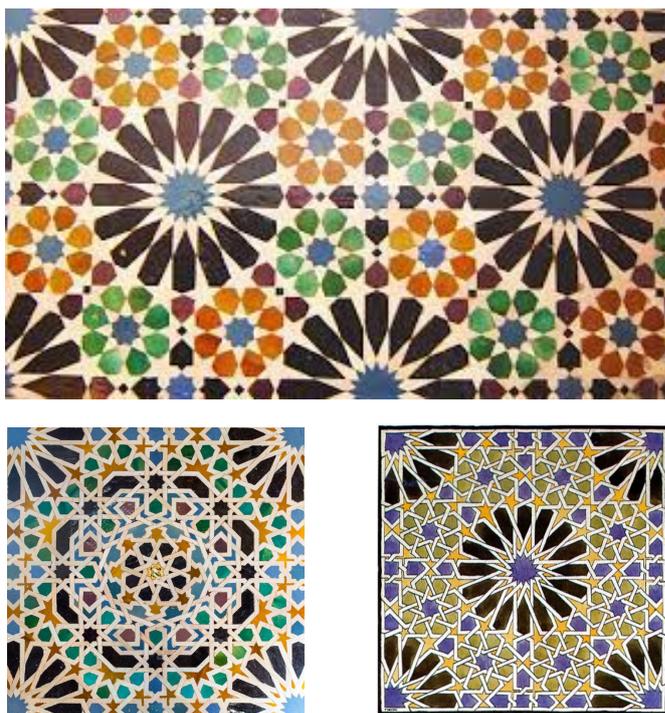
También son dignas de mención las obras del genial artista holandés Maurits Cornelius Escher (Leeuwarden, 17/6/1898 – Hilversum, 27/3/1972), quien usó teselados del plano con figuras de animales (ver por ejemplo las series *metamorfosis*) e incluso utilizó teselaciones del plano hiperbólico.



Hay tanto por decir sobre este tema que resulta imposible de abarcar en un artículo corto. En esta nota, que de todas formas pretendía ser más breve, ahondaremos en algunos detalles de la clasificación –y su historia– de los embaldosados del plano (euclídeo) con un sólo polígono convexo (y sus copias) que presentamos en la nota *¿Sabías qué..?* en el Número 2 del Volúmen 36 de la Revista de Educación Matemática

del año 2021.

FIGURA 2. Ejemplos de embaldosados en La Alhambra



§2. Embaldosados

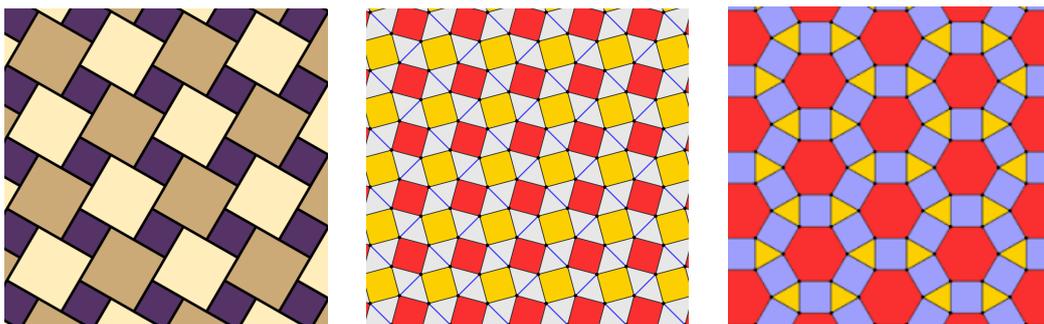
Comencemos por las definiciones básicas. Matemáticamente hablando, un embaldosado del plano es cualquier partición del plano con un número finito de formas geométricas distintas de área finita, las llamadas (proto)baldosas, que se

repiten sin solapamientos (salvo por los lados de las baldosas) ni huecos. En este artículo estamos interesados en embaldosados del plano euclídeo con polígonos, y más precisamente, con polígonos de una sola clase, es decir, todos congruentes entre sí.

Un polígono P de n -lados es una sucesión de n segmentos $a_1a_2, a_2a_3, \dots, a_{n-1}a_n, a_na_1$ del plano sin más intersecciones que los vértices a_1, a_2, \dots, a_n . En esta nota, como es usual en este contexto, por polígono P nos referimos tanto a la línea poligonal cerrada formada por los lados junto a la región interior de P . Los polígonos a su vez pueden ser convexos o no-convexos. Recordamos que un polígono es convexo si todos los ángulos interiores son menores que π .

Cuando las baldosas de un teselado son todas figuras congruentes (misma forma y tamaño) se dice que el teselado es *monoedra*. Cuando se usan 2 tipos distintos de baldosas el teselado se dice *diedra* y cuando se usan 3 tipos distintos se llama *triedra*. En la siguiente figura damos ejemplos de teselados no-monoedrales.

FIGURA 3. Ejemplos de teselados no-monoedrales



El primero es conocido como teselado *pitagórico* y usa cuadrados de 2 tamaños distintos, el segundo es conocido en inglés como el *snub tiling* (teselado del desaire) y utiliza cuadrados y triángulos equiláteros y el tercero es conocido como el teselado *rombitrihexagonal* y usa triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares. El mundo de los teselados semi-regulares (se usan como baldosas polígonos regulares de al menos dos tipos distintos) es fascinante y ¡también sería tema para otro artículo! Pero ya se sabe, quien mucho abarca... Así que, de ahora en adelante, nos interesaremos principalmente por los *embaldosados monoedrales del plano euclídeo por polígonos*, al que nos referiremos simplemente por *teselado* (salvo mención explícita de lo contrario), por ser los protagonistas de la historia que queremos contar.

Sea \mathcal{T}_P un teselado del plano dado por un polígono P . Se dice que P *embaldosa* o *tesela* el plano. Por definición, esto quiere decir que es posible cubrir completamente el plano con copias simétricas de P sin más solapamientos que en

los vértices o lados de los polígonos. Más precisamente, tenemos que

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{S \in \mathcal{G}} S(P)$$

donde \mathcal{G} es un subgrupo de simetrías (traslaciones, rotaciones, reflexiones o reflexiones deslizantes) del plano y para toda $S \in \mathcal{G}$ se cumple que

$$S(P) \cap P \subseteq L$$

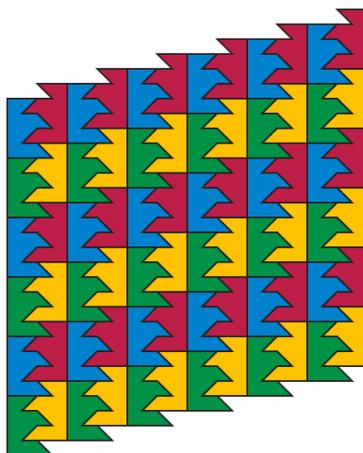
donde L es un lado de P . Luego, tenemos

$$\mathcal{T}_P = \{S(P) : S \in \mathcal{G}\}.$$

Si $S(P) \cap P = L$ para toda $S \in \mathcal{G}$ tal que $S(P) \cap P \neq \emptyset$ se dice que el teselado es *lado-a-lado*. Si P es un polígono regular (resp. no-regular), se dice que \mathcal{T} es un *teselado regular* (resp. *no-regular*). Notar que por la definición dada las baldosas del embaldosado son todas congruentes entre sí, aunque uno podría plantearse teselaciones con polígonos similares (misma forma, pero distinto tamaño, como el teselado pitagórico de la Figura 3).

Por último, definimos teselados k -isoedrales. Un teselado \mathcal{T} es *isoedral*, si para cualquier par de baldosas $P, P' \in \mathcal{T}$, y cualquier simetría S que lleva P en P' entonces S deja invariante a todo el teselado \mathcal{T} , es decir $S(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$. Se dice que \mathcal{T} es k -*isoedral* si k es el número de protobaldosas distintas que no pueden ser llevadas unas a otras mediante una simetría global. Un teselado k -isoedral tiene k pedazos disjuntos (las k -órbitas bajo la acción del grupo de simetrías que preservan el teselado). Notar que 1-isoedral es lo mismo que isoedral. Por ejemplo, los teselados regulares, que veremos en la sección siguiente son todos isoedrales (ver Figura 5). A continuación en la Figura 4 damos un ejemplo de teselado que no es isoedral, pero que es 2-isoedral. Notar que por definición, isoedral implica monoedral, pero no a la inversa como lo muestra dicho el ejemplo.

FIGURA 4. Un teselado 2-isoedral del plano.



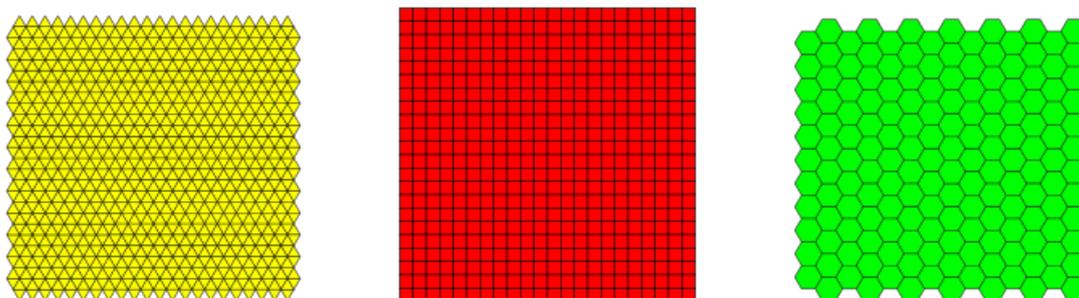
Las figuras azules y verdes forman una clase \mathcal{C}_1 y las rojas y amarillas otra clase \mathcal{C}_2 . Notar que cualquier simetría (por ejemplo una traslación) que lleve figuras de clase \mathcal{C}_1 en clase \mathcal{C}_1 también llevará figuras de clase \mathcal{C}_2 en clase \mathcal{C}_2 . Sin embargo, cualquier simetría que lleve una figura azul que comparta el lado largo con una figura roja en esa misma figura roja (por ejemplo una reflexión), no preserva las baldosas de otras franjas. Luego el teselado no es isoedrales. En general, representaremos a los teselados k -isoedrales con las teselas pintadas de k colores, uno por cada órbita.

Este teselado se conoce como teselado de Heesch y fue encontrado por éste en 1935. Podríamos decir que resuelve una pregunta de la lista de 23 problemas de Hilbert. Durante el Congreso Internacional de Matemáticos de 1900, Hilbert presentó una lista con 10 problemas (el resto fue agregado luego en la versión escrita) que según él eran centrales en la matemática y guiarían las investigaciones venideras. Sólo 8 de ellos han sido completamente resueltos y hay muchos con soluciones parciales o casi completas. La famosa hipótesis de Riemann es el problema número 8 y sigue completamente abierto (de hecho es uno de los problemas del milenio del Instituto Clay de Matemáticas, por el cual hay 1 millón de dólares de premio). El problema 18 consta de 3 preguntas y en una de ellas Hilbert pregunta: ¿existe un teselado poliedral del espacio cuyo grupo de simetría no actúe transitivamente? Algunos creen que lo enunció para el espacio pues el suponía que no existía un teselado así del plano, es decir un teselado no monoedrales. El teselado de Heesch responde la pregunta para el plano por la afirmativa.

§3. Polígonos regulares

Lo primero que uno se pregunta es si el plano puede ser teselado con polígonos regulares (por lo tanto convexos). Cualquiera que haya jugado de chico con figuras geométricas sabe o intuye que es posible hacerlo con triángulos equiláteros, con cuadrados y con hexágonos regulares. De hecho esto es así, lo saben perfectamente los colocadores de pisos, y basta con ver la Figura 5.

FIGURA 5. Los 3 teselados regulares del plano.



Notar que estas teselaciones son lado-a-lado. ¿Hay otras posibilidades? Ya los antiguos griegos sabían que no es posible teselar el plano con otros polígonos regulares que los ya mencionados. En efecto, dado P_n un polígono regular de n lados, el ángulo interior $\alpha_{int}(P_n)$ de P_n es π menos el ángulo exterior de P_n , de donde tenemos que

$$\alpha_{int}(P_n) = \pi - \frac{2\pi}{n} = \left(\frac{n-2}{n}\right)\pi.$$

Ahora, si k es el número de polígonos congruentes a P_n coincidentes en un vértice, entonces debemos tener

$$(1) \quad k\left(\frac{n-2}{n}\right)\pi = 2\pi,$$

es decir $k = \frac{2n}{n-2}$, para no dejar huecos sin cubrir. Es fácil ver que esta ecuación sólo tiene 3 soluciones enteras (¡chequear!):

$$(k, n) = (6, 3), \quad (k, n) = (4, 4) \quad \text{y} \quad (k, n) = (3, 6),$$

representando los 6 triángulos, los 4 cuadrados y los 3 hexágonos por vértice de la Figura 5 respectivamente. Estas soluciones era conocidas por Pappus según citas directas en el libro *History of Greek Mathematics* de Thomas Heath. Notablemente, la tercera solución ¡fue conocida por las abejas mucho antes que por los griegos!



Curiosamente, el mismo argumento usado para obtener los teselados regulares del plano, sirvió a los griegos para obtener todos los sólidos regulares (poliedros cuyas caras son polígonos regulares iguales) del espacio, que hoy conocemos como *sólidos platónicos*. De hecho, si la suma de los ángulos en un vértice llegara a ser 2π el sólido sería plano en ese vértice, y como debe haber al menos 3 caras por vértice, la ecuación (1) en este caso toma la forma de las desigualdades

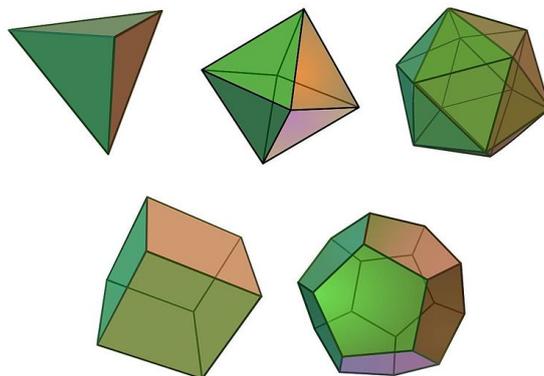
$$(2) \quad 3 \leq k < \frac{2n}{n-2}.$$

Éstas sólo tienen 5 soluciones enteras posibles, que son (¡chequear!)

$$(k, n) = (3, 3), \quad (3, 4), \quad (3, 5), \quad (4, 3), \quad (5, 3),$$

que corresponden a los 5 sólidos perfectos ya conocidos: el tetraedro, el cubo, el dodecaedro, el octaedro y el icosaedro respectivamente (ver Figura 6).

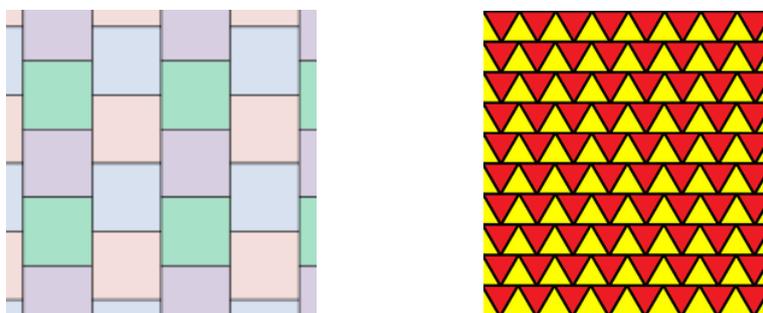
FIGURA 6. Los 5 sólidos platónicos.



Retornando a los teselados planos, con respecto a las simetrías, es claro que para los embaldosados con cuadrados y hexágonos sólo hacen falta dos traslaciones (aunque otras simetrías son posibles) para cubrir el plano a partir de una baldosa, mientras que para el caso con triángulos necesitaremos traslaciones y otra simetría, sí o sí, como reflexiones o rotaciones. Notar que, a partir de un único triángulo, usando traslaciones sólo obtenemos medio embaldosado. Más precisamente, dado un triángulo T y m el punto medio de uno de sus lados, podemos tomar S_m la simetría central respecto de m (o la rotación de $\frac{\pi}{3}$ con centro en uno de los vértices).

Hasta ahora hemos considerado el caso de teselados regulares lado-a-lado. ¿Existen teselados regulares que no sean lado-a-lado? Notemos que el plano es unión de franjas paralelas del mismo ancho (disjuntas salvo por los bordes), por lo que si con un polígono regular podemos cubrir una franja, copiando esta franja (con una traslación) tenemos un teselado regular. Pero al copiar las franjas de forma contigua de modo de cubrir sin huecos, no estamos obligados a hacer coincidir vértices con vértices. Este es el caso de los triángulos equiláteros y de los cuadrados como se puede ver en la siguiente Figura 7.

FIGURA 7. Los 2 teselados regulares, no lado-a-lado, del plano.



Intuitivamente, no podemos hacer lo mismo con hexágonos. En efecto, en esta situación de teselados no lado-a-lado, tenemos $k - 1$ polígonos coincidentes en un vértice v y uno más cuyo lado, pero no su vértice, llena el plano localmente alrededor de v . La ecuación correspondiente a (1) en este caso es

$$(3) \quad (k - 1) \binom{n-2}{n} \pi = \pi,$$

que equivale a $k - 1 = \frac{n}{n-2}$, la cual tiene solución entera sólo para $n = 3$ y 4 por lo tanto obteniendo las únicas soluciones

$$(k, n) = (4, 3) \quad \text{y} \quad (k, n) = (3, 4)$$

que son las dadas en la Figura 7.

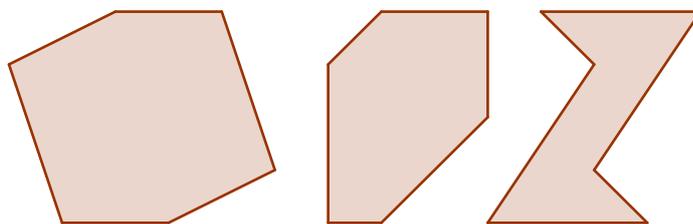
Luego, hemos clasificado todos los polígonos regulares que teselan el plano y hemos descubierto que estos teselados regulares son todos isoedrales, sean lado-a-lado o no. A continuación nos disponemos a estudiar los teselados con polígonos no-regulares.

§4. Triángulos y cuadriláteros

Ahora consideramos polígonos que no son regulares. Por la observación sobre las franjas hechas antes, es claro que es posible embaldosar el plano (como bien lo saben los albañiles) con rectángulos y con paralelogramos. Para esto sólo se necesitan dos traslaciones distintas (una a lo ancho para llenar una franja, y otra a lo largo para llenar el plano con franjas).

Un hexágono puede tener k pares de lados paralelos, con $0 \leq k \leq 3$. Nos van a interesar los hexágonos que tienen 3 pares de lados paralelos. Los hexágonos con 3 pares de lados *opuestos* paralelos se suelen llamar *hexaparelogramos* (ver Figura 8).

FIGURA 8. Diferentes hexaparelogramos

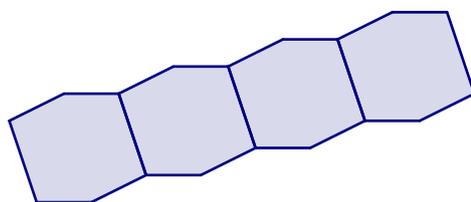


Notar que el primero y el segundo son hexaparelogramos convexos pero el primero tiene pares de lados opuestos congruentes y el segundo no. Por otra parte, el primero y el tercero tienen pares de lados opuestos congruentes, pero el primero es convexo y el tercero no. En particular, los hexágonos regulares son hexaparelogramos con todos sus lados congruentes.

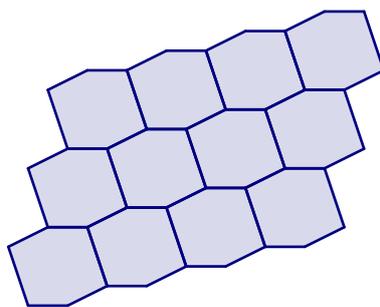
Un hecho sencillo pero muy importante sobre hexaparalelogramos que usaremos en breve es el siguiente.

Teorema 4.1. *El plano puede embaldosarse con cualquier hexaparalelogramo con lados opuestos congruentes (sin importar si es convexo o no).*

Demostración. En efecto, supongamos que tenemos un hexaparalelogramo H con lados consecutivos $abca'b'c'$, donde los pares $\{a, a'\}$, $\{b, b'\}$ y $\{c, c'\}$ son respectivamente lados paralelos y congruentes entre sí. Primero hacemos una fila de hexágonos (una “franja”) formada por copias de H “apilados”, digamos con lados a y a' en común (ver la figura siguiente donde usamos el primer hexaparalelogramo de la Figura 8 para ilustrar, se supone que continua indefinidamente hacia la izquierda y derecha).



Luego, pegamos copias de estas filas haciendo coincidir los lados b y c de una con los b' y c' de la otra (igual que en el caso de hexágonos regulares). En la siguiente figura se ven 2 iteraciones de este proceso.



Es claro que este proceso embaldosa el plano. □

Si queremos escribir formalmente el teselado, sean T_a y T_b las traslaciones que llevan el punto medio de a en el punto medio de a' y el punto medio de b en el punto medio de b' , respectivamente. Una “franja vertical” es $F_0 = \{T_a^k(P) : k \in \mathbb{Z}\}$. Las franjas verticales contiguas a F_0 son

$$F_1 = T_b(F_0) = \{T_b^k(T_a(P)) : k \in \mathbb{Z}\} = \{T_a(T_b^k(P)) : k \in \mathbb{Z}\}$$

y $F_{-1} = T_b^{-1}(F_0) = \{T_b^k(T_a(P)) : k \in \mathbb{Z}\} = \{T_a(T_b^k(P)) : k \in \mathbb{Z}\}$. O sea, el teselado está dado por

$$\mathcal{T}_P = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T_b^k(F_0) = \bigcup_{j, k \in \mathbb{Z}} T_a^j(T_b^k(P)).$$

Ahora usaremos esta observación para el caso que nos interesa de triángulos y cuadriláteros generales.

Teorema 4.2. *Cualquier triángulo o cuadrilátero tesela el plano.*

Demostración. Primero notemos que el plano puede embaldosarse usando cualquier cuadrilátero (convexo o no). De hecho, sea P el cuadrilátero. Si P no es un paralelogramo, sea m es el punto medio de uno de los lados de P . Aplicando la simetría central S_m a P tenemos el hexágono

$$H = P \cup S_m(P),$$

que por construcción tiene 3 pares de lados congruentes y paralelos. Por el Teorema 4.1, sabemos que H embaldosa el plano y por lo tanto se puede embaldosar el plano con P .

Si P es un paralelogramo (esto incluye rectángulos y rombos) la construcción anterior nos devuelve otro paralelogramo, que podemos pensarlo como un hexágono degenerado (hacer el dibujo) con lados opuestos paralelos y congruentes y por lo tanto sabemos que teselan el plano. De todas formas, estos casos pueden probarse como el caso de los hexágonos con 3 lados paralelos (y para el caso de los rectángulos usando alternativamente, si se quiere, el argumento de los ángulos visto en §3).

Ahora, usando el mismo truco, podemos ver que cualquier triángulo T embaldosa el plano. En efecto, si m es el punto medio de uno de los lados de T , el cuadrilátero $P = T \cup S_m(P)$ embaldosa el plano, por lo tanto T también lo hace. □

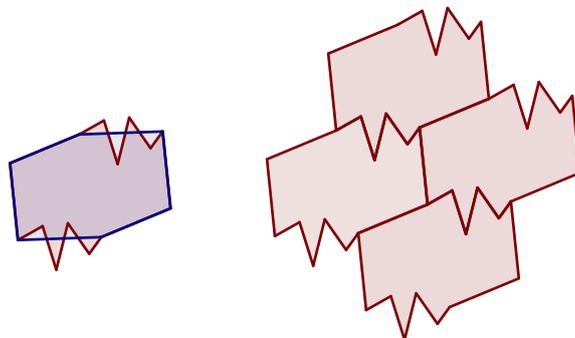
Notar que por construcción, todos los teselados con triángulos y cuadriláteros de la prueba anterior resultan isoedrales (haga el lector algunos dibujos para convencerse).

Por otra parte, veamos que el Teorema 4.1 implica que si no nos restringimos a polígonos convexos, el plano puede ser embaldosado por ciertos polígonos de n lados para cualquier $n \geq 4$. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.3. *Dado un número natural $n \geq 4$, existen polígonos no-convexos de n lados que teselan el plano.*

Demostración. En efecto, si tenemos un embaldosado del plano dado por un hexaparalelogramo H con pares de lados opuestos congruentes, digamos $abca'b'c'$, podemos reemplazar los lados a , b y c por 3 líneas poligonales no-convexas

(basta con una, ver dibujo abajo), y los lados congruentes a' , b' y c' por las correspondientes líneas poligonales congruentes (trasladadas de las primeras).



Usando un hexaparalelogramo H , podemos probar que pentágonos con un par de lados paralelos teselan el plano. En efecto, basta tomar el centro de simetría o de H y los puntos medios m y m' de 2 lados opuestos paralelos. Así, el segmento $\overline{mm'}$ que une dichos puntos medios divide a H en 2 pentágonos P y P' simétricos por o que comparten el lado $\overline{mm'}$. Luego, como H tesela el plano, entonces P tesela el plano también. El caso $n = 4$ ya lo sabemos de antes.

Luego, usando este truco de las líneas poligonales no-convexas comenzando con hexágonos (resp. pentágonos) obtenemos teselados no-convexos con un número n par (resp. impar) de lados para cualquier $n \geq 4$. \square

Por ejemplo si queremos un teselado con polígonos no-convexos de 17 lados, tomamos un pentágono teselador como el de la prueba de arriba (o sea uno tal que junto al simétrico por el punto medio de uno de sus lados forma un hexaparalelogramo con lados)y cambiamos uno de sus lados por una poligonal no-convexa de 13 segmentos.

Este hecho y similares fueron muy usados por el genial artista holandés Maurits Escher para producir una gran cantidad de cuadros y grabados usando teselados con figuras no convexas. Por ejemplo la que se puede ver en la Figura 9.

Obviamente que se trata de figuras en vez de polígonos por tratarse de dibujos artísticos, pero pueden considerarse como polígonos con lados curvos en vez de segmentos. Pueden visitar la página oficial de Escher www.mcescher.com. En particular, ver las series *regular division of the plane* y *metamorfosis* por ejemplo en las páginas <https://mcescher.com/gallery/symmetry/> o <https://mcescher.com/gallery/transformation-prints/> en el sitio web oficial de Escher o bien https://mathstat.slu.edu/escher/index.php/Regular_Division_of_the_Plane_Drawings.

FIGURA 9. Teselados del plano con figuras no-convexas (Escher).



§5. Polígonos convexos no-regulares de 7 o más lados

Ya vimos que el plano puede ser embaldosado con polígonos no-convexos de cualquier cantidad de lados, por lo que nos restringimos de ahora en más a los *polígonos convexos*. También vimos el caso de embaldosados con polígonos regulares y con triángulos y cuadriláteros en general. Ahora mostraremos, siguiendo la idea de [Kershner \(1969\)](#), que no es posible dar un teselado del plano con un polígono convexo de 7 o más lados.

Para esto, necesitaremos la fórmula de Euler. Ésta, es una fórmula que sirve para cualquier poliedro convexo en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 . La fórmula descubierta por [Euler \(1758\)](#) dice que en cualquier poliedro convexo con un número F de caras, E de lados y V de vértices se cumple

$$(4) \quad V - E + F = 2.$$

Esto es sorprendente. Por ejemplo, podemos controlar con los sólidos platónicos de la Figura 6: tetraedro (T), cubo (C), octaedro (O), icosaedro (I) y dodecaedro (D):

TABLA 1. Valores de $V - E + F$ para los sólidos platónicos.

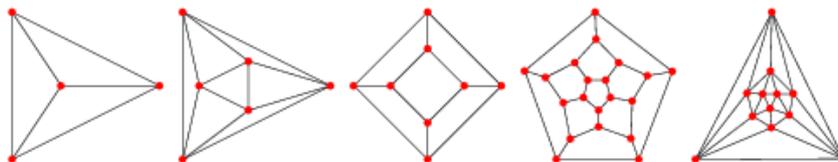
sólido	V	E	F	$V - E + F$
tetraedro	4	6	4	2
cubo	8	12	6	2
octaedro	6	12	8	2
dodecaedro	20	30	12	2
icosaedro	12	30	20	2

Lo bueno es que la fórmula también se aplica a grafos planares, es decir grafos que pueden ser dibujados en el plano sin cruces de aristas. La fórmula en este caso

toma la forma

$$(5) \quad V - E + F = 1$$

(ó $V - E + F = 2$ si contamos la cara infinita (no acotada) que queda determinada). Por ejemplo, todos los sólidos platónicos se pueden representar como grafos planares así (T , O , C , D y I):



A continuación utilizaremos la fórmula de Euler para grafos planares aplicándola a regiones acotadas de un embaledado por polígonos convexos. Consideramos un embaledado del plano por un polígono convexo y sea \mathcal{C}_R la colección (finita) de aquellos polígonos del embaledado que tienen al menos un punto dentro de $B(0, R)$, la bola abierta de radio R con centro en el origen del plano. Además, sean V , E y F el número de vértices, lados y caras del grafo planar formado por los polígonos en \mathcal{C}_R . Distinguiremos entre vértices interiores y de borde y lados interiores y de borde. Llamaremos E_i al número de lados interiores (lados de polígonos en \mathcal{C}_R con al menos un vértice en $B(0, R)$, o que separan dos caras) y sea E_b el número de lados restantes que llamamos de borde (o sea lados de polígonos en \mathcal{C}_R totalmente fuera de $B(0, R)$). Luego,

$$(6) \quad E = E_i + E_b.$$

Similarmente, denotaremos por V_b al número de vértices en el que exactamente dos lados del borde se tocan (sin lados interiores) y por V_i al número de vértices restantes (interiores), de modo que

$$(7) \quad V = V_i + V_b.$$

Como los polígonos son convexos, en cada vértice interior hay por lo menos 3 polígonos incidentes. En teselados con polígonos no-regulares, puede haber vértices con distintos números de lados incidentes (ver por ejemplo el teselado 15 en la Figura 13 donde hay vértices con 3 y 4 lados incidentes respectivamente). Luego, si k es el número medio de vértices de lados incidentes en un vértice interior tenemos $k \geq 3$. Como el número medio de lados en el borde es 2, entonces el número total de lados es $kV_i + 2V_b$, pero como cada lado es contado dos veces (uno por cada extremo), tenemos que

$$(8) \quad kV_i + 2V_b = 2E.$$

Supongamos que los polígonos tienen n lados. Queremos ver que $n \geq 7$ es imposible. El número nF daría el número total de lados del grafo, pero con los

lados interiores son contados dos veces y los lados de borde son contados una vez. De este modo tenemos

$$(9) \quad nF = 2E_i + E_b = 2E - E_b.$$

Usando las ecuaciones (7) – (9) en la fórmula de Euler (4), pues no consideramos la cara no acotada del grafo, luego de cuentas de rutina se llega a la siguiente ecuación

$$(10) \quad 2(n + k) - kn = \frac{2n}{V_i} - \frac{2(2V_b - E_b)}{V_i}.$$

Ahora, la ecuación (10) vale para el número de vértices interiores, vértices de borde y lados de borde de cualquier colección \mathcal{C}_R de polígonos que cubren la bola $B(0, R)$. Como el radio R es arbitrario y lo podemos tomar tan grande como queramos, el lado derecho de la ecuación (10) tiende a 0 cuando R tiende a infinito, pues V_b y E_b aumentan linealmente con R mientras que V_i aumenta cuadráticamente. Este es un resultado profundo cuya prueba escapa a la intención de este artículo (esto está relacionado con retículos y conteo de puntos reticulares interiores en bolas. El lector puede intentar convencerse estudiando por ejemplo el número de puntos interiores a bolas de radio entero centradas en el origen del plano y contando puntos del retículo \mathbb{Z}^2 que están dentro del círculo y contando los puntos fuera del círculo más cercano). Luego,

$$2(n + k) - kn = 0,$$

donde k es ahora el valor límite del número medio de lados por vértice en el embaldosado. En otras palabras, tenemos

$$n = \frac{2k}{k - 2}.$$

Notemos que la ecuación de arriba es la (1), aunque apareció en forma distinta. Luego, ya sabemos que tiene 3 soluciones con $n \leq 6$. Esto muestra que el polígono convexo que embaldosa el plano debe tener a lo sumo 6 lados.

Dos muy buenos artículos sobre la imposibilidad de usar polígonos de 7 o más lados para teselar el plano con condiciones más generales que las que nos interesan son los de [Grünbaum y Shephard \(1977\)](#) y [Niven \(1978\)](#).

§6. Hexágonos convexos

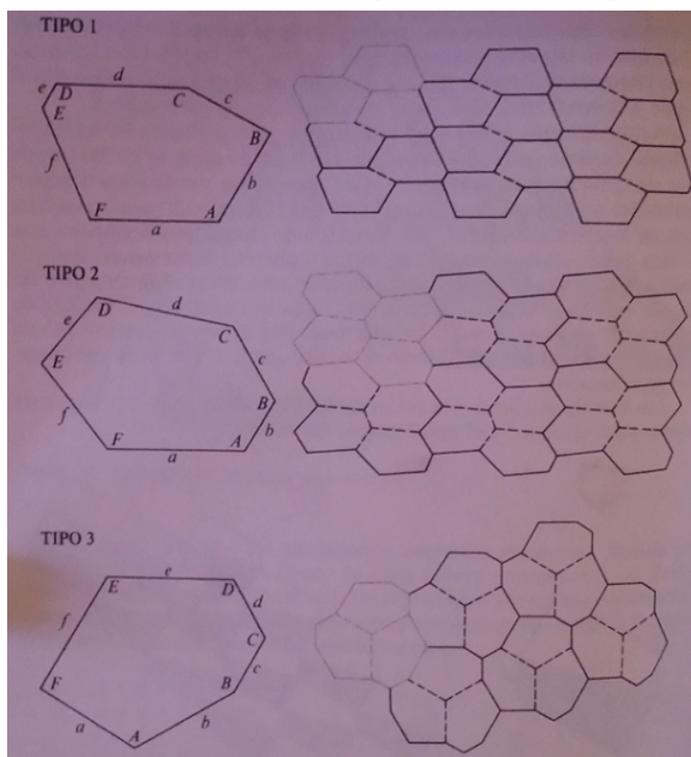
Por lo visto hasta ahora, sólo nos quedan cubrir los casos para $n = 5$ y 6 , es decir, estudiar embaldosados del plano con pentágonos y hexágonos convexos no-regulares. En esta sección nos ocuparemos de los hexágonos y en la siguiente de los pentágonos. Las demostraciones de estas clasificaciones están más allá del alcance de este artículo, tanto por complejidad como por extensión.

Karl Reinhardt en su tesis de 1918 (Reinhardt, 1918) por la Universidad de Frankfurt se ocupó del problema de los pentágonos y hexágonos, haciendo avances sustanciales. En lo que respecta a hexágonos el probó que sólo hay 3 familias de hexágonos convexos (no-regulares) que teselan el plano. En efecto, si llamamos a los lados del hexágono convexo de forma consecutiva $abcdef$ y a los ángulos $ABCDEF$, donde A es el ángulo que forman a y b , etc, las familias están dadas por:

- **Tipo 1.** $A + B + C = 2\pi$ y $a = d$.
- **Tipo 2.** $A + B + D = 2\pi$ con $a = d$ y $c = e$.
- **Tipo 3.** $A = C = E = \frac{2\pi}{3}$ on $a = b, c = d$ y $e = f$.

Ejemplos de hexágonos de cada una de estas familias y el correspondiente teselado se puede ver en la Figura 10.

FIGURA 10. Las 3 familias de hexágonos convexos que teselan \mathbb{R}^2 .



Cabe mencionar que algunos hexágonos pueden pertenecer a dos o más familias. Por ejemplo en el caso de hexágonos regulares tenemos que

$$A = B = C = D = E = F = \frac{2\pi}{3} \quad \text{y} \quad a = b = c = d = e = f$$

y por lo tanto es el caso límite de las 3 familias.

§7. Pentágonos convexos: una historia de 100 años

Dejamos los pentágonos para el final, pues son los que protagonizan la historia más interesante de la clasificación.

Reinhardt, 1918. Las primeras 5 familias de pentágonos convexos que teselan el plano fueron halladas por Reinhardt (1918) en su tesis. Más precisamente, el dió 5 familias (tipos 1 al 5) paramétricas de condiciones para los lados y ángulos de pentágonos de modo que cada tipo de condición asegura:

- (I) la existencia de un pentágono P satisfaciendo esas condiciones y,
- (II) la existencia de por lo menos un teselado del plano por medio de P .

Este esquema fue seguido por todos los autores que le sucedieron.

Kerschner, 1968. Medio siglo después, y usando otros métodos, Richard Brandon Kershner en 1968 encontró 8 familias, las cinco de Reinhardt más otras tres (tipos 6, 7 y 8). Richard anunció sus hallazgos en dos artículos (Kershner, 1968, 1969) aunque no dió una prueba de ellos aduciendo que eran muy largas y que ello necesitaría un libro. En dicho trabajo, Kerschner afirma sobre el trabajo de Reinhardt, y sobre el propio, sobre pentágonos (la traducción es mía):

“... hizo un noble comienzo al tratamiento de los pentágonos y estableció la existencia de cinco tipos, a los que llamaré pentágonos de tipos 1, 2, 3, 4 y 5. En este punto la técnica o la fortaleza le fallaron y cierra la tesis afirmando que, en principio, debería ser posible completar la consideración de pentágonos en la línea de sus consideraciones hasta ese punto, pero sería muy tedioso y siempre existiría la posibilidad de que no emergieran más tipos. De hecho, es bastante claro que Reinhardt y todos los demás en el campo de trabajo pensaron que la lista de Reinhardt era probablemente completa. Por razones que me resultaría difícil explicar, he estado intrigado por este problema durante unos 35 años. Cada 5 o 10 años he hecho algún tipo de intento por resolver el problema. Hace unos dos años atrás finalmente descubrí un método de clasificación de las posibilidades de los pentágonos, de una manera más conveniente que la de Reinhardt, para producir un enfoque que era humanamente posible llevar a cabo (aunque apenas). El resultado de esta investigación fue el descubrimiento de que había tres tipos adicionales de pentágonos, los tipos 6, 7 y 8, por sobre los encontrados por Reinhardt, que pueden teselar el plano. Estos teselados son totalmente sorprendentes. El descubrimiento de su existencia es una fuente de considerable gratificación.”

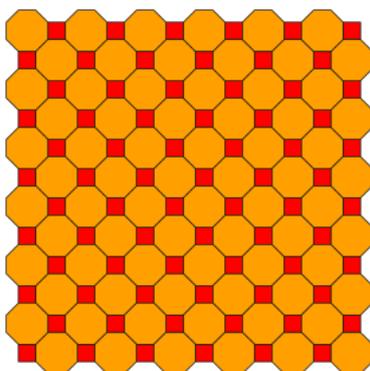
Kerschner también creyó haber encontrado todos los tipos posibles de pentágonos teseladores, pero...

Gardner y aficionados, 1975–1977. Basado en el trabajo mencionado de Kerschner, el famoso matemático y divulgador Martin Gardner publicó en su columna fija *Mathematical Games* de la revista *American Scientific* un artículo (Gardner, 1975)

sobre los teselados pentagonales del plano. Este artículo fue muy importante para el problema en cuestión ya que llamó la atención de numerosos matemáticos, muchos de ellos aficionados. Cinco nuevos tipos de pentágonos teseladores fueron descubiertos gracias al interés suscitado por este artículo por los matemáticos aficionados Richard James III y Marjorie Rice entre los años 1975 y 1977. ¡Esto muestra una vez más la importancia de la divulgación de la ciencia!

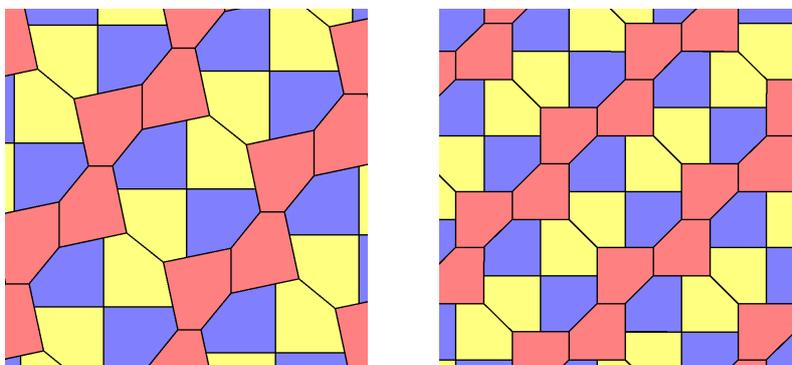
Un nuevo tipo de teselado (hoy catalogado como de tipo 10) fue encontrado por el ingeniero de software Richar James III en 1975. El no quiso ver la lista de Kerschner y trató de buscar teselados por su cuenta. Siendo él muy familiar con el teselado semi-regular de octágonos y cuadrados (ver Figura 11)

FIGURA 11. Teselado semi-regular con octógonos y cuadrados



y dado que un octógono regular se puede partir simétricamente en 4 pentágonos convexos congruentes por dos líneas perpendiculares que pasen por el centro de simetría (pero no por los vértices), Richard intentó adaptar este hecho para obtener un teselado pentagonal. Tuvo éxito con esto y le envió su hallazgo a Martin Gardner. Dos teselados distintos usando pentágonos de James se pueden ver en la Figura 12. Notar que estos teselados no son ni isoedrales ni lado-a-lado, algo que parece ser que Kerschner había asumido implícitamente.

FIGURA 12. Dos teselados con pentágonos de James



Por la misma época, Marjorie Rice (una ama de casa de San Diego sin más preparación en matemática que la del colegio secundario, pero a quien a la luz de los hechos podemos considerar como matemática aficionada de fuste) halló 4 nuevas familias entre 1976 y 1977 (tipos 9, 11, 12 y 13) luego de leer sobre el problema en el artículo de Gardner, desarrollando sus propios métodos y su propia notación. Su primer acercamiento fue considerar las diferentes formas en que los vértices de un pentágono pueden asociarse con otros pentágonos congruentes para producir un teselado. Esto impuso condiciones en los ángulos y lados de los pentágonos. De esta manera combinatoria, Marjorie halló más de 40 teselados, incluyendo uno lado-a-lado que pertenecía a un tipo no hallado por Kerschner. Es decir, Marjorie mostró que Kerschner (ambos habían usado métodos bastante parecidos) había omitido uno de los tipos de teselados pentagonales lado-a-lado. Teniendo en cuenta este resultado y el ya mencionado de James, el mismo Kerschner comentó:

“he cometido al menos dos errores, uno por comisión y otro por omisión”.

En una búsqueda sistemática posterior, Rice consideró 12 clases distintas de teselados pentagonales, cada una de las cuales correspondía a la descripción de qué lados del pentágono eran iguales. Para cada una de las 12 clases Marjorie halló un teselado posible. Una linda nota sobre ella con motivo de su muerte en 2017, *“Marjorie Rice’s Secret Pentagons”*, se puede encontrar en Quanta Magazine <https://www.quantamagazine.org/marjorie-rices-secret-pentagons-20170711/>.

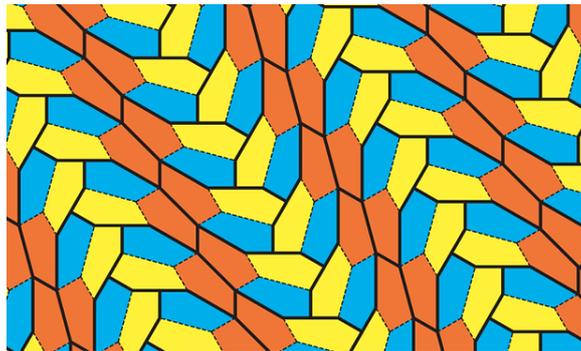
Los últimos hallazgos, 2015–2017. En un excelente artículo de Doris Schattschneider (1978) sobre el tema, la autora repasa la historia de la clasificación de los teselados pentagonales convexos hasta el momento y se pregunta y responde:

“¿Es la lista de 13 teselados completa? Lo dudo”.

Pasaron 10 años del artículo de Gardner hasta que Rolf Stein halló la familia número 14 de pentágonos teseladores del plano (Stein, 1985). La última familia fue descubierta 30 años después por Jennifer McLoud-Mann junto a Casey Mann y el estudiante David Von Derau (Mann, McLoud-Mann, y Von Derau, 2015). Dicho logro lo obtuvieron realizando una búsqueda exhaustiva por computadora de pentágonos que admiten teselados k -isoedrales del plano para $k \leq 3$. El resultado es un único pentágono, no una familia (ver los ángulos y lados en la lista mas abajo). El teselado 3-isoedral que produce se ve en la Figura 13.

Clasificación completa, Rao, 2017. El problema de saber si las 15 tipos conocidos de teselados pentagonales del plano eran todos los tipos posibles seguía abierto hasta que en 2017 Michaël Rao, un matemático de la Escuela Normal Superior de Lyon, ayudado por computadoras, pudo dar una demostración de que estos

FIGURA 13. El último teselado pentagonal encontrado



eran todos los tipos posibles de teselados pentagonales convexos del plano (Rao, 2017). El hecho fundamental es que hay un número finito, exactamente 371, de configuraciones posibles de ángulos. A partir de ahí fue descartando casos hasta obtener que las 15 familias conocidas son todas las posibles. Luego de esto, Thomas Hales, un profesor de matemáticas de la Universidad de Pittsburgh y experto en el uso de la programación para resolver problemas de geometría, ha reproducido independientemente las partes más importantes de la prueba de Rao indicando que no ha encontrado fallas. Sin embargo, el artículo no se encuentra publicado aún. Sobre el la conclusión de la clasificación hecha por Rao hay una muy buena nota en Quanta Magazine <https://www.quantamagazine.org/pentagon-tiling-proof-solves-century-old-math-problem-20170711/>

¡Una historia de intriga y búsqueda del conocimiento que ha durado casi 100 años! Como dijo David Hilbert alguna vez “*Wir müssen wissen, wir werden wissen*”, es decir “*debemos saber, sabremos*”.

Los 15 tipos de teselados pentagonales. A continuación damos la lista de los teselados y la descripción de cada uno de los pentágonos convexos que los definen. Como antes, denotamos por $abcde$ y por $ABCDE$ los lados y ángulos consecutivos respectivamente, donde A es el ángulo formado por a y b , etc.

Lista de los 15 tipos de teselados pentagonales

- **Tipo 1.** $D + E = 180^\circ$.
- **Tipo 2.** $C + E = 180^\circ$ con $a = d$.
- **Tipo 3.** $A = C = D = 120^\circ$ con $a = b$ y $d = c + e$.
- **Tipo 4.** $A = C = 90^\circ$ con $a = b$ y $c = d$.
- **Tipo 5.** $C = 2A = 120^\circ$ con $a = b$ y $c = d$.
- **Tipo 6.** $C + E = 180^\circ$, $A = 2C$ con $a = b = e$ y $c = d$.
- **Tipo 7.** $2B + C = 360^\circ$, $2D + A = 360^\circ$ con $a = b = c = d$.
- **Tipo 8.** $2A + B = 360^\circ$, $2D + C = 360^\circ$ con $a = b = c = d$.
- **Tipo 9.** $2E + B = 360^\circ$, $2D + C = 360^\circ$ con $a = b = c = d$.

- **Tipo 10.** $E = 90^\circ$, $A + D = 180^\circ$, $2B - D = 180^\circ$, $2C + D = 360^\circ$ con $a = e = b + d$.
- **Tipo 11.** $A = 90^\circ$, $C + E = 180^\circ$, $2B + C = 360^\circ$ con $d = e = 2a + c$.
- **Tipo 12.** $A = 90^\circ$, $C + E = 180^\circ$, $2B + C = 360^\circ$ con $2a = c + e = d$.
- **Tipo 13.** $A = C = 90^\circ$, $2B = 2E = 360^\circ - D$ con $c = d$ y $2c = e$.
- **Tipo 14.** $D = 90^\circ$, $2E + A = 360^\circ$, $C + A = 180^\circ$, $B + D + E = 360^\circ$ con $2e = 2c = a$.
- **Tipo 15.** $A = 60^\circ$, $B = 135^\circ$, $C = 105^\circ$, $D = 90^\circ$, $E = 150^\circ$ con $a = 1$, $b = d = e = \frac{1}{2}$ y $c = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$.

Notar que las familias 14 y 15 son especiales, en el hecho de que no admiten deformaciones, sólo están formadas por un único pentágono (salvo escala) cuyos ángulos están completamente determinados. Quizás por esto hayan sido tan esquivos. El caso del tipo 15 es obvio, aunque el tipo 14 no lo parece. Sin embargo, de las condiciones se puede deducir que los lados cumplen

$$b = a\sqrt{\frac{11\sqrt{57}-25}{8}}$$

y los ángulos satisfacen

$$\sin(B) = \frac{\sqrt{57}-3}{8}, \quad \cos(B) = -\sqrt{\frac{3\sqrt{57}-1}{32}} \quad \text{y} \quad \tan(B) = -\frac{1}{4}\sqrt{3\sqrt{57}-15}.$$

O sea, $A = 90^\circ$, $B \simeq 145,34^\circ$, $C \simeq 69,32^\circ$, $D \simeq 124,66^\circ$ y $E \simeq 110,68^\circ$.

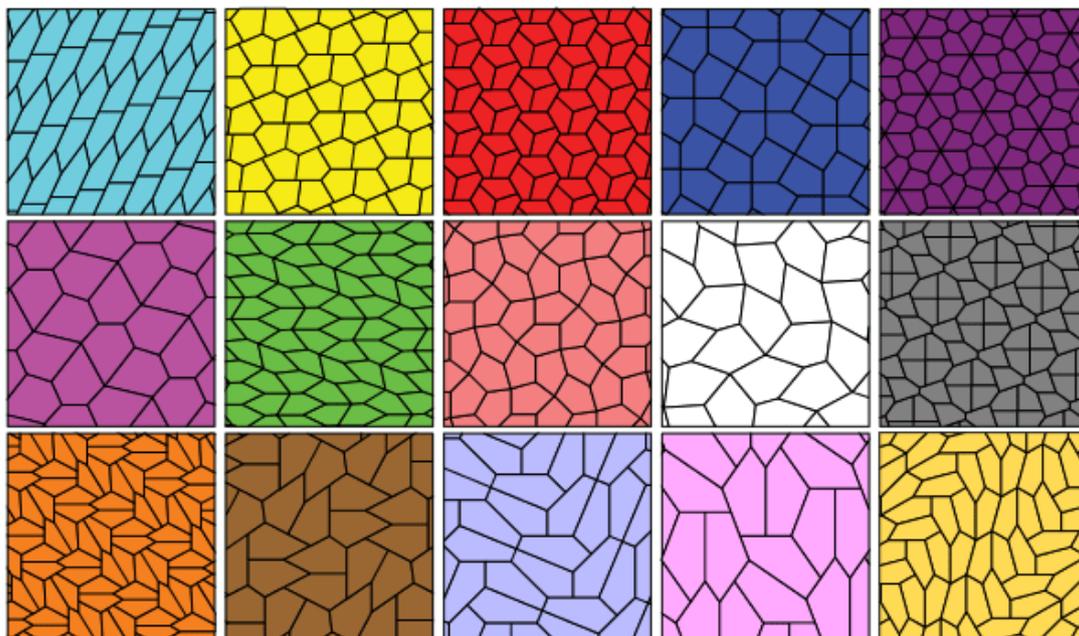
Ejemplos de cada uno de los 15 tipos de pentágonos convexos y teselados correspondientes pueden verse en la Figura 14.

Estudiemos brevemente los teselados encontrados. En su disertación Reinhardt hizo la siguiente clasificación de los tipos de mosaicos, que llamaremos *R*-clases, con respecto a las relaciones de aspecto de sus cinco lados:

- **R1.** Los cinco lados son diferentes.
- **R2.** Entre los cinco lados hay dos iguales; los otros son diferentes de estos y de los demás.
- **R3₁.** Entre los cinco lados, tres son iguales; los otros son diferentes de estos y de los demás.
- **R3₂.** Entre los cinco lados hay dos pares de iguales pero diferentes entre sí; el último es diferente de estos.
- **R4₁.** Entre los cinco lados, cuatro son iguales; el último es diferente de estos.
- **R4₂.** Entre los cinco lados, tres son iguales y, los dos diferentes son iguales entre sí.
- **R5.** Los cinco lados son iguales entre sí.

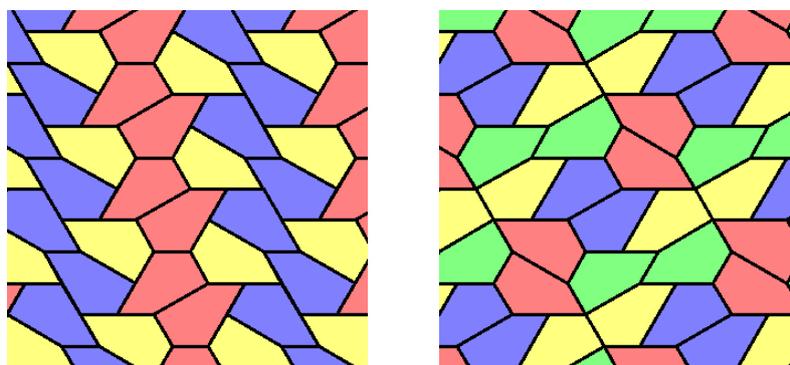
Aquí, cuando Reinhardt dice ‘diferente’ debemos entender ‘posiblemente diferente’.

FIGURA 14. Teselados de cada una de los 15 tipos que teselan el plano (tipos 1 al 15 de izquierda a derecha y de arriba a abajo).



Por otra parte, usando la Figura 14, podemos ver que los teselados 1 al 5 son isoedrales mientras que el resto son 2-isoedrales o 3-isoedrales. Como dice Schattschneider en su artículo, “es natural tener esperanza de que el siguiente teorema sea cierto: Un pentágono tesela el plano sólo si existe un teselado k -isoedral con dicho pentágono para $k \leq 3$.” Sin embargo, Jaap Scherphuis halló un teselado 4-isoedral lado-a-lado del plano con pentágonos de tipo 8. En la Figura 15 se pueden ver dos teselados pentagonales hallados por Scherphuis usando la misma baldosa (un pentágono de tipo 8), donde uno 3-isoedral mientras que el otro 4-isoedral.

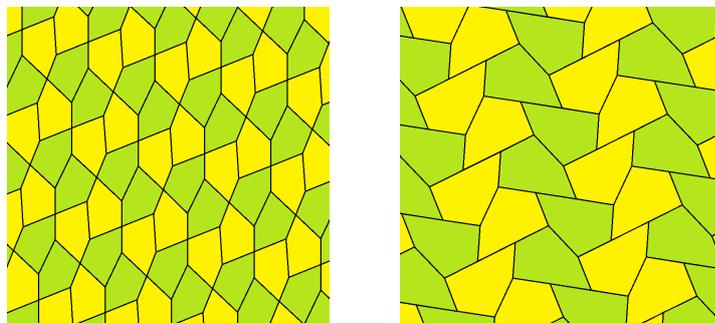
FIGURA 15. Teselados pentagonales 3- y 4-isoedrales de tipo 8.



De la misma Figura 14 se ve que de los pentágonos que representan a cada una de las 15 familias, las de tipos 1, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 son lado-a-lado mientras que las

restantes no. Sin embargo, como son familias paramétricas no podemos deducir que sea siempre así. De hecho las familias de tipos 1 y 2 admiten teselados tanto lado-a-lado como no lado-a-lado. Por ejemplo, en la Figura 16 se observan dos teselados distintos del tipo 2, uno lado-a-lado y el otro no.

FIGURA 16. Dos teselados del tipo 2, uno lado-a-lado y el otro no.



En la Tabla 2 resumimos toda esta información previa. Los grados de libertad se refieren a cuántos lados o ángulos quedan libres. Notar que los 5 primeros tipos hallados por Reinhardt tienen al menos dos grados de libertad, los hallados por Kerschner, Rice y James alrededor de la década del '70 tienen 1 sólo grado de libertad, y los últimos dos tipos hallados por Stein y Mann et al. no tienen ningún grado de libertad, es decir las familias están formadas por un único pentágono con lados y ángulos determinados. Esto explica de algún modo la forma en que se sucedieron los hechos. Finalmente, en la última columna de la tabla, no-convexo se refiere a que en estas familias es posible tener pentágonos que teselan no-convexos.

§8. Más sobre teselados pentagonales

En esta sección final nos ocuparemos de algunas llamativas curiosidades de los teselados pentagonales. Veremos que algunos de ellos se pueden obtener como teselados duales de ciertos teselados arquimedianos, veremos que se pueden clasificar los teselados por pentágonos equiláteros y por último que es posible dar teselados monoedrales no-periódicos, es decir que sólo poseen simetrías rotacionales.

Teselados duales. En geometría, el dual de una figura plana (o de un poliedro en el espacio), es la figura (resp. poliedro) que se obtiene cambiando vértices por caras y caras por vértices. Se toma el centro de las caras como vértice y se unen dichos vértices con segmentos si las caras son adyacentes. Por ejemplo, volviendo a los sólidos platónicos, el cubo y el octaedro son duales, el icosaedro y el dodecaedro son duales y el tetraedro es autodual (esto puede comprobarse fácilmente, con las figuras o con la Tabla 1). Dada esta definición, tiene sentido pensar en el teselado dual de un teselado dado. Por ejemplo, si nos centramos en los teselados regulares

TABLA 2. Resumen de los pentágonos teseladores del plano.

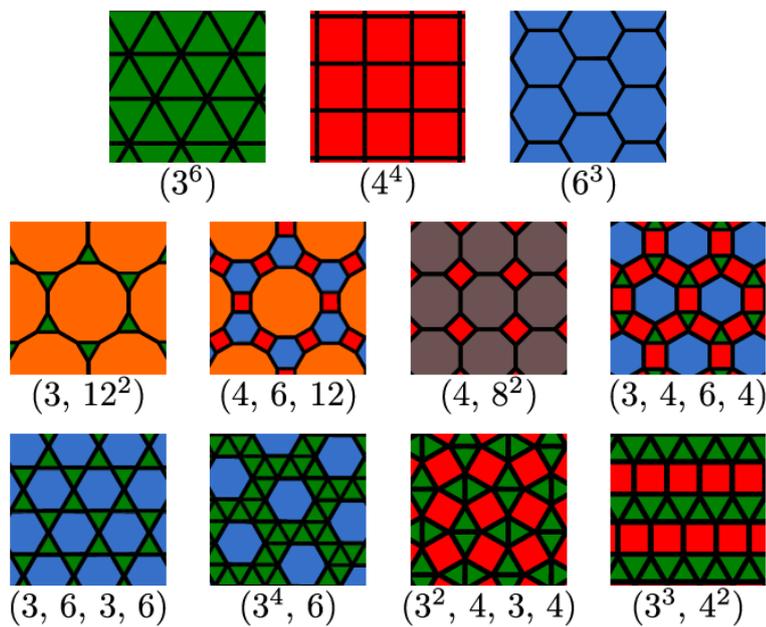
Tipo	Año	Autores	libertad	lado-a-lado	k -isoedral	R-clase	no-convexo
1	1918	Reinhardt	5	ambos	1	1	✓
2	1918	Reinhardt	4	ambos	1	2	✓
3	1918	Reinhardt	1	✗	1	2	✗
4	1918	Reinhardt	2	✓	1	3_2	✓
5	1918	Reinhardt	2	✓	1	3_2	✓
6	1968	Kerschner	1	✓	2	4_2	✓
7	1968	Kerschner	1	✓	2	4_1	✓
8	1968	Kerschner	1	✓	4	4_1	✓
9	1976	Rice	1	✓	2	2	✓
10	1975	James	1	✗	3	4_1	✗
11	1977	Rice	1	✗	2	2	✗
12	1977	Rice	1	✗	2	1	✗
13	1977	Rice	1	✗	2	2	✓
14	1985	Stein	0	✗	3	3_2	✗
15	2015	Mann et al	0	✗	3	3_1	✗

(ver Figura 5), el teselado triangular y el teselado hexagonal son duales entre sí mientras que el teselado por cuadrados resulta autodual.

Resulta que de los 15 tipos de teselados pentagonales, hay 3 que exhiben una simetría mayor, asombrosa. Tanto es así que resultan teselados duales de otros teselados llamados arquimedianos o uniformes. Un teselado es regular si usa polígonos regulares y es *arquimediano* o *uniforme* si es lado-a-lado y los vértices son de un sólo tipo, pero permitimos polígonos regulares de dos o más tipos. Necesariamente, los distintos polígonos regulares tienen que tener sus lados congruentes entre sí. Además de los 3 teselados regulares, que obviamente son arquimedianos, hay 8 teselados uniformes más (ver Figura 17). Los números debajo de los teselados indican en un vértice cualquiera dado, cuántos polígonos de cada tipo son coincidentes en dicho vértice y con qué multiplicidad aparecen (y en qué orden). Los duales de los teselados arquimedianos no-regulares no son arquimedianos ¿Puede el lector encontrar estos duales?

En su artículo de 1975, Martin Gardner llamó la atención sobre la simetría extra que tienen los pentágonos de tipo 3, 4 y 5 (ver Figura 17). En realidad esto es así pues los teselados de tipo 1, 4 y 5 son duales de tres teselados arquimedianos como notó Schattschneider (1978), los tres teselados arquimedianos con vértices de valencia 5. En efecto, usando las notaciones de la Figura 17, el teselado de tipo 3 es dual con el $(3^3, 4^2)$ llamado *prisma*, el de tipo 4 es dual con el $(3^4, 6)$ llamado *El Cairo* y el de tipo 5 es dual con el $(3^2, 4, 3, 4)$ llamado *florete*. El lector puede

FIGURA 17. Los 11 teselados arquimedianos



comprobar esto fácilmente dibujando los duales de los teselados arquimedianos mencionados y comparando los dibujos obtenidos con la Figura 14. En la Figura 18 ilustramos el caso del teselado conocido como El Cairo, que es de tipo 4, y su dual.

Pentágonos equiláteros. Ahora, consideremos brevemente el problema de teselar el plano con pentágonos convexos equiláteros. Recordemos que para polígonos de 4 o más lados ser equilátero y ser equiángulo no es lo mismo (sólo para triángulos equilátero y equiángulo resultan ser conceptos equivalentes). Ejemplos de pentágonos equiláteros que no son equiángulos y de pentágonos equiángulos que no son equiláteros se pueden ver a continuación

FIGURA 19. Pentágonos equiláteros y equiángulos no-regulares

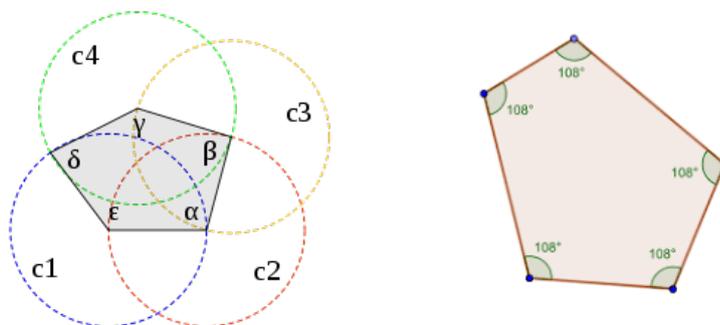
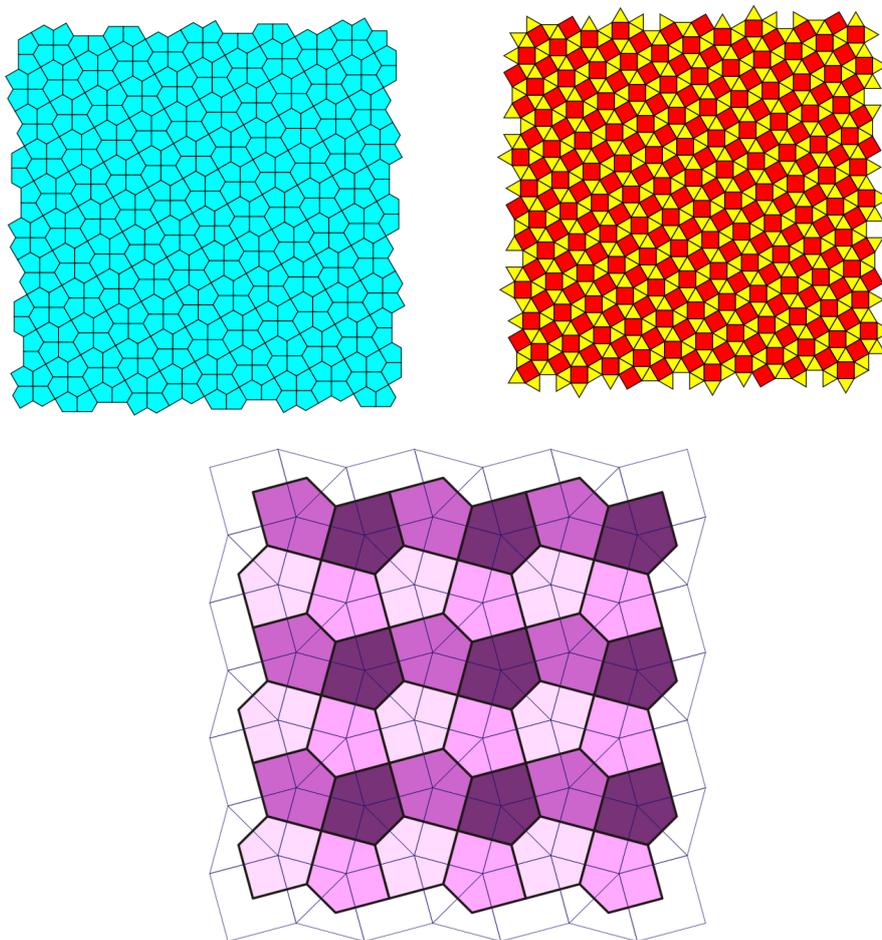


FIGURA 18. Teselado 'El Cairo' de tipo 4 y su dual arquimediano



Sabemos que no se puede teselar el plano con pentágonos regulares, pero ¿qué sucede con pentágonos semi-regulares (equiláteros o equiángulos)? Este tema fue estudiado primeramente por Doris [Schattschneider \(1978\)](#). Dicha autora encontró todos los pentágonos equiláteros convexos que teselan el plano de entre los 13 tipos conocidos en ese momento (tipo 1 al 13). El autor afirma que es inmediato que las familias de tipo 3, 10, 11, 12 y 13 no contienen pentágonos regulares y luego prueba que las de tipo 5, 6 y 9 tampoco. De las restantes, las familias de tipo 1 y 2 dan familias paramétricas de pentágonos equiláteros convexos mientras que en cada una de las familias de tipo 4, 7 y 8 hay un único (salvo escala) pentágono equilátero convexo que tesela el plano. Es muy instructivo consultar los detalles de cómo construir estos pentágonos en ese trabajo. Aquí sólo daremos los parámetros.

- **Tipo 1:** familia con $D + E = \pi$ con $\frac{\pi}{3} < E < \frac{2\pi}{3}$ donde

$$A + E = \frac{4\pi}{3}, \quad B = \frac{\pi}{3}, \quad C - E = \frac{\pi}{3}, \quad D + E = \pi.$$

- **Tipo 2:** familia con $C + E = \pi$ con $\frac{\pi}{3} < E < \frac{2\pi}{3}$ donde

$$A = \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2}E - \theta - \gamma, \quad B = \frac{1}{2}E + \theta, \quad C + E = \frac{\pi}{3}, \quad D = \frac{\pi}{2} + \gamma,$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1+4\cos(E)}{4\cos(\frac{E}{2})}\right), \quad \gamma = \arccos\left(\frac{3}{4\sin(E)}\right).$$

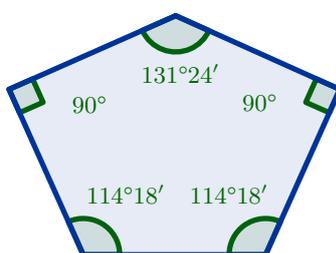
- **Tipo 4:** único pentágono, con

$$B = 2\pi - 2D \sim 131^{\circ}24'$$

y dos pares de ángulos congruentes

$$A = C = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad D = E = \frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \sim 114^{\circ}18'.$$

En la figura mostramos un tal pentágono:



- **Tipo 7:** único pentágono, con ángulos

$$A \sim 89^{\circ}16', \quad B \sim 144^{\circ}32'30'', \quad C \sim 70^{\circ}55', \quad D \sim 135^{\circ}22', \quad E \sim 99^{\circ}54'30''.$$

- **Tipo 8:** único pentágono con

$$E = \arccos\left(\frac{\sqrt{13}-3}{4}\right) \sim 81^{\circ}18'$$

y dos pares de ángulos congruentes:

$$A = D = \frac{\pi}{2} + \frac{E}{2} \sim 130^{\circ}39' \quad \text{y} \quad B = C = \pi - E \sim 98^{\circ}42'.$$

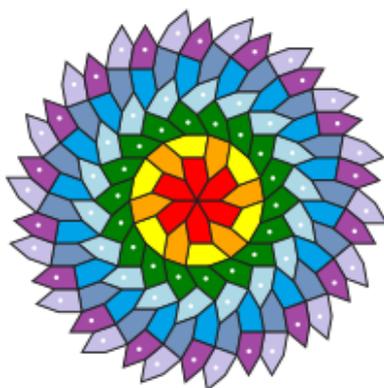
Fueron [Hirschhorn y Hunt \(1985\)](#) quienes más tarde probaron que éstos son efectivamente todos los tipos posibles de pentágonos equiláteros convexos que teselan el plano, mostrando que la lista de Schattschneider era en realidad completa (o sea, no hay pentágonos equiláteros en las familias 14 y 15). Y lo notable de esto es que se pudo hacer aún antes de tener la clasificación completa de los pentágonos convexos que teselan el plano. En efecto, ellos mostraron que un pentágono equilátero convexo tesela el plano si y sólo si tiene dos ángulos que suman π (consecutivos o no) o bien es el único pentágono equilátero convexo cuyos ángulos consecutivos A, B, C, D, E satisfacen el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} A + 2B = 2\pi, \\ C + 2E = 2\pi, \\ A + C + 2D = 2\pi, \end{cases}$$

donde cualquiera de las ecuaciones es consecuencia de las otras dos. Posteriormente, [Bagina \(2004\)](#) obtuvo el mismo resultado por otras vías.

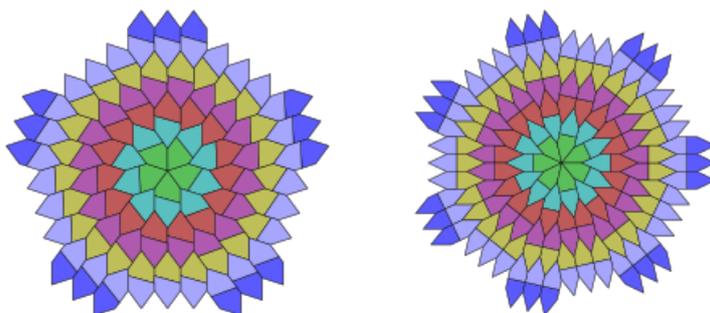
Teselados pentagonales no-periódicos. En 1976, Marjorie Rice e independientemente Szkeres y Hirschhorn (junto a un grupo de alumnos) hallaron un pentágono de tipo 1 con propiedades peculiares. Este tiene ángulos $A = 140^\circ$, $B = 60^\circ$, $C = 160^\circ$, $D = 80^\circ$ y $E = 100^\circ$. Hay 11 formas en que los vértices de este pentágono pueden ser unidos para teselar el plano. Sin embargo, [Hirschhorn \(1976, 1977\)](#) encontró un teselado pentagonal con simetría rotacional solamente.

FIGURA 20. Teselado pentagonal de Hirschhorn con simetría 6-rotacional



Dicho teselado tiene simetría rotacional de orden 6. Sorprendentemente, Bernhard [Klaassen \(2016\)](#) probó que toda simetría rotacional discreta puede ser representada por un teselado pentagonal monoedro de la misma clase de pentágonos. Es decir, generalizó el teselado 6-rotacional de Hirschhorn a teselados n -rotacionales para cualquier $n \geq 3$. Ejemplos de simetrías 5-rotacionales y 7-rotacionales se muestran en la siguiente figura.

FIGURA 21. Teselados pentagonales con simetría 5- y 7-rotacionales

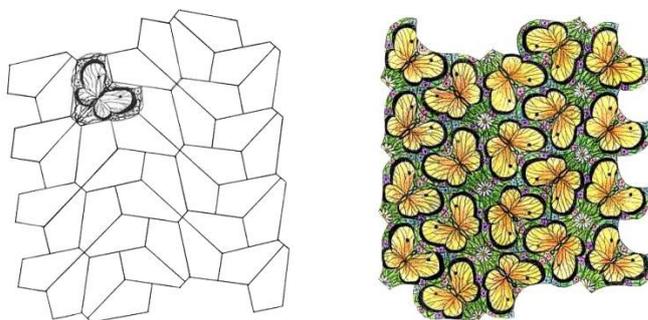


Aquí termina nuestra versión de la historia, pero sin dudas hay muchos temas que quedaron por cubrir y muchos de los que vimos que bien vale la pena profundizar. Espero que el lector se haya interesado por el tema y pueda seguir aprendiendo e investigando por su cuenta.

Comentarios finales.

Las imágenes de este artículo son (casi) todas tomadas de páginas de internet y muchas veces es difícil citar la fuente original. La mayoría son de páginas de Wikipedia, de algunos blogs como Gaussianos o de imágenes de Google. En algunos casos, se puede identificar al autor, como es el caso de Tom Ruen.

Por ser un tema tan bonito existen muchos artículos y libros y una gran cantidad de páginas de internet para consultar sobre el tema. Sin embargo, quiero llamar la atención del lector sobre 4 páginas que tienen muchísima información sobre el tema con datos y figuras, que sin dudas le ayudarán a entender mejor lo tratado en este artículo, además de profundizar y aprender mas sobre el tema. Tres de éstas son páginas de wikipedia: *Euclidean tilings by convex regular polygons* https://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_tilings_by_convex_regular_polygons, *Pentagonal tilings* https://en.wikipedia.org/wiki/Pentagonal_tiling y *Uniform tilings* https://en.wikipedia.org/wiki/Uniform_tiling. Por último la página interactiva de Jaap Scherphuis <https://www.jaapsch.net/tilings/> es muy completa y contiene applets para producir teselados y ver las familias paramétricas de teselados moverse en tiempo real. Además tiene otra página similar de teselados no-convexos con triángulos, cuadriláteros, pentágonos y hexágonos, <https://www.jaapsch.net/tilings/nonconvex.htm>. Finalmente quiero mencionar la página de Marjorie Rice <https://sites.google.com/site/intriguingtessellations/home/tessellations> donde además de los tipos de teselados encontrados por ella hay hermosas ilustraciones basadas en dichos teselados al estilo de las de Escher, como por ejemplo



Por último, quiero agradecer a Leandro Cagliero por comentarios que mejoraron la claridad de algunas partes del trabajo y por su ayuda con gráficos en GeoGebra.

Bibliografía

- Bagina, O. (2004). Tiling the plane with congruent equilateral convex pentagons. *J. Combin. Theory. Ser. A*, 105, 221-232.
- Euler, L. (1758). Elementa doctrinae solidorum. *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 109-140.
- Gardner, M. (1975). Mathematical Games. *Scientific American*, 233(1), 112-119.
- Grünbaum, B., y Shephard, G. C. (1977). The eighty-one types of isohedral tilings in the plane. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 82(2), 177-196.
- Hirschhorn, M. (1976). The 1976 Summer Science School. Tessellations with convex equilateral pentagons. *Parabola*, 13, 2-5.
- Hirschhorn, M. (1977). More tessellations with convex equilateral pentagons. *Parabola*, 13, 20-22.
- Hirschhorn, M., y Hunt, D. (1985). Equilateral Convex Pentagons Which Tile the Plane. *J. Combin. Theory Ser. A*, 39, 1-18.
- Kershner, R. B. (1968). On paving the plane. *American Mathematical Monthly*, 75, 839-844.
- Kershner, R. B. (1969). On paving the plane. *APL Technical Digest*, 75(8), 4-10.
- Klaassen, B. (2016). Rotationally symmetric tilings with convex pentagons and hexagons. *Elemente der Mathematik*, 71(4), 137-144.
- Mann, C., McCloud-Mann, J., y Von Derau, D. (2015). Convex pentagons that admit *i*-block transitive tilings. *Geometriae Dedicata*, 194, 141-167.
- Niven, I. (1978). Convex polygons that cannot tile the plane. *Amer. Math. Monthly*, 85(4), 785-792.
- Rao, M. (2017). Exhaustive search of convex pentagons which tile the plane. *arXiv:1708.00274*.
- Reinhardt, K. (1918). Über die Zerlegung der Ebene in Polygone. *Dissertation, Universität Frankfurt*.
- Schattschneider, D. (1978). Tiling the plane with congruent pentagons. *Mathematics Magazine*, 51, 29-44.
- Stein, R. (1985). A new pentagon tiler. *Mathematics Magazine*, 58, 308.

RICARDO A. PODESTÁ
FaMAF - CIEM (UNC-CONICET)
(✉) podesta@famaf.unc.edu.ar

Recibido: 27 de diciembre de 2021.

Aceptado: 19 de marzo de 2022.

Publicado en línea: 25 de abril de 2022.
