la suma de los primeros n cubos es igual
al cuadrado de la suma de los primeros n números?

Es decir, en símbolos $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ o, si se quiere, más sucintamente vale la fórmula

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big)^2 \tag{1}$$

para todo natural n. Este resultado es conocido como el teorema de Nicómaco.

Por supuesto que esta identidad puede demostrarse por inducción en n, aunque para ello tal vez convenga asumir que conocemos la suma de los primeros n números, es decir, $1+2+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$. Dejamos esta demostración algebraica como ejercicio para el lector.

Sin embargo, aquí queremos mostrar una prueba geométrica de la identidad (1). La siguiente figura es una prueba gráfica muy sencilla y bonita de este hecho.

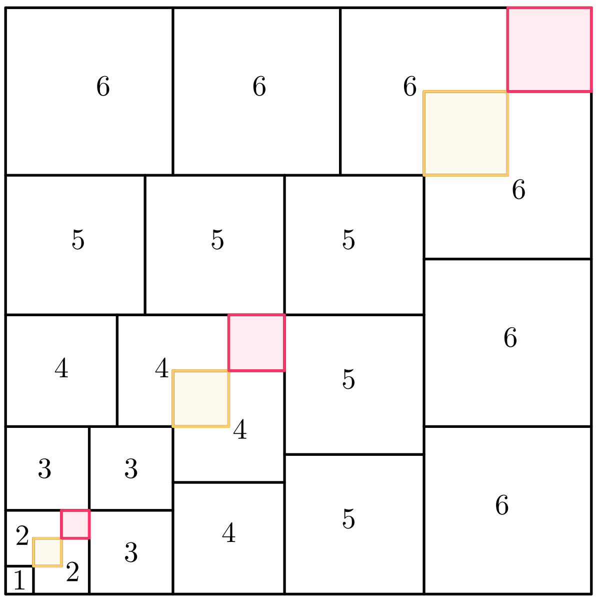


FIGURA 1. Hemos tomado $n = 6$ para concretar, pero el argumento es completamente general.

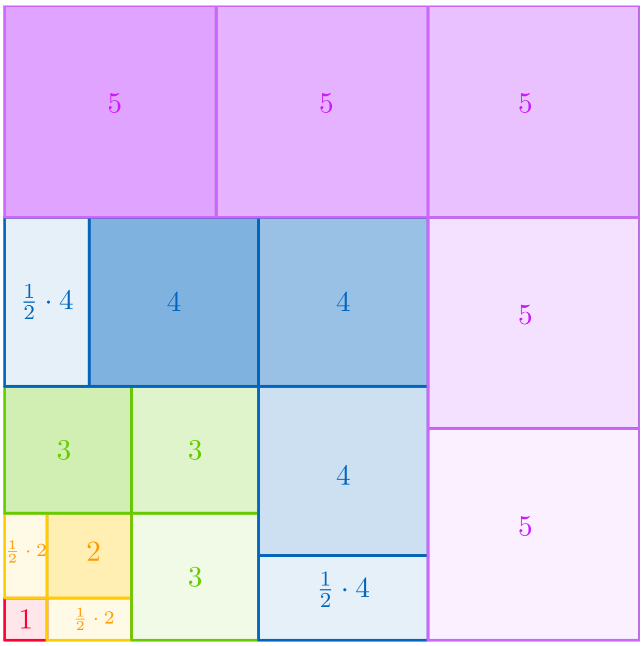
Para entender por qué funciona, lo que haremos es calcular el área del cuadrado de dos formas distintas. Es claro que por un parte, que el lado del cuadrado mide $1+2+3+4+5+6$, por lo tanto el área del cuadrado es $(1+2+3+4+5+6)^2$.

Por otra parte, el área del cuadrado grande es igual a la suma de todos los cuadraditos interiores. Aquí, hay un cuadrado de lado 1, que aporta $1 \cdot 1^2 = 1^3$ al área total, dos cuadrados de lado 2, que aportan $2 \cdot 2^2 = 2^3$ al área total, 3 cuadrados de lado 3 que aportan $3 \cdot 3^2 = 3^3$ al área total, 4 cuadrados de lado 4 que aportan $4 \cdot 4^2 = 4^3$ al área total, 5 cuadrados de lado 5 que aportan $5 \cdot 5^2 = 5^3$ al área total y 6 cuadrados de lado 6 que aportan $6 \cdot 6^2 = 6^3$ al área total. Aquí observamos que los cuadrados de lado par se solapan en los cuadraditos amarillos, por lo que contaríamos dos veces esa área), pero estos tienen la misma área que los cuadraditos rojos que quedan sin cubrir. De esta forma hemos visto que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)^2.$$

Lo hecho para $n = 6$ vale en realidad para cualquier n.

Otra representación gráfica de la misma demostración pueden verse en las siguiente figura, para $n = 5$ en este caso:



Para los más curiosos, en el libro *Proofs without words* (pruebas sin palabras, se puede bajar gratis de la red) de Roger Nelsen de 1993 hay 7 demostraciones geométricas diferentes de este hecho y en el artículo *Proof without Words: The Sum of Cubes: An Extension of Archimedes' Sum of Squares* en el Mathematics Magazine, Vol. 77, No. 4 (2004), pp. 298-299, hay dos pruebas gráficas más dadas por Katherine Kanim.

Nicómaco de Gerasa (Grecia, ca. 60 – ca. 120 dC) fue un importante matemático y teórico de la música, más conocido por sus trabajos *Introducción a la Aritmética* y *Manual de Armónicos*. Nació en Gerasa, en la provincia romana de Siria (actualmente Jerash, Jordania). Fué un neopitagórico, que escribió sobre las propiedades (místicas) de los números.