Revista de Educación Matemática
Volumen 38, N° 2 (2023), páginas 3 – 15
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Artículo de Matemática

CÁLCULO DE RADIOS GEOCÉNTRICOS POR GRADOS DE LATITUD

Rodrigo Tovar Cabañas, Shany Arely Vázquez Espinosa e Hipólito Villanueva Hernández

Resumen. El objetivo del presente ejercicio es hacer frente a la pérdida de cognición y por ende pericia para realizar transformaciones geométricas de modelos esféricos a modelos elipsoidales dentro de la enseñanza de la geografía a nivel licenciatura. Se postula que los sistemas satelitales de navegación global basados en elipsoides de referencia aún son concebidos como sistemas esféricos por muchos alumnos debido a la ausencia de ejemplos prácticos que ayuden a su comprensión pedagógica. Para cubrir dicha laguna en este trabajo se calcularon la excentricidad, la latitud geocéntrica y el radio geocéntrico de los 90 principales paralelos del elipsoide de referencia WGS84. Metodológicamente se trabajó sobre un universo de estudio superior a los 324 mil segundos de latitud. De los cuales sólo se muestran los 90 casos principales. Con un criterio analógico se determinó el radio geocéntrico para los puertos de Salina Cruz, Oaxaca, Tampico, Tamaulipas y Ensenada, Baja California. Como resultados se exhibe que la distancia al centro de la Tierra entre Salina Cruz, y Ensenada hay una diferencia de 4 kilómetros.

Abstract. The objective of this exercise is to face the loss of cognition and therefore the ability to perform geometric transformations from spherical models to ellipsoidal models within the teaching of geography at the undergraduate level. It is postulated that global navigation satellite systems based on reference ellipsoids are still conceived as spherical systems by many students due to the absence of practical examples that help their pedagogical understanding. To cover this gap in this work, the eccentricity, geocentric latitude and geocentric radius of the 90 main parallels of the reference ellipsoid WGS84 were calculated. Methodologically, we worked on a study universe greater than 324 thousand seconds of latitude. Of which only the top 90 cases are shown. Using an analog criterion, the geocentric radius was determined for the ports of Salina Cruz, Oaxaca, Tampico, Tamaulipas and Ensenada, Baja California. As results it is exhibited that the distance to the center of the Earth between Salina Cruz and Ensenada there is a difference of 4 kilometers.

Palabras clave: Latitud geocéntrica, radio geocéntrico, elipsoide WGS84.
Keywords: Geocentric latitude, geocentric radius, WGS84 ellipsoid.

§1. Introducción

Los sistemas satelitales de navegación global, tales como: Beidou de la República Popular de China; Galileo de la Unión Europea; GLONASS de Rusia; NavIC de India y Michibiki utilizado en Japón, más el crecimiento exponencial de usuarios de tecnología basada en el Sistema de Posicionamiento Global (GPS, por sus siglas en inglés), dentro de los cuales destacan los investigadores de ciencias como: arqueología, antropología, ecología, botánica, hidrología, y por supuesto la geodesia, quienes necesitan otorgar la máxima precisión posible a sus geolocalizaciones, lecturas de sus receptores GPS que, por ciertas cuestiones y condiciones atmosféricas, en ocasiones otorgan lecturas discordantes.

Por ejemplo, en lugares cercanos a la línea de costa se han dado casos de lecturas inferiores al nivel del mar, por lo tanto, para usuarios no familiarizados con el campo de la geometría satelital, es útil tener a la mano una serie de tablas que contribuyan a calcular y calibrar de forma práctica tales discordancias, o usar algún elipsoide, es decir, una superficie de revolución derivada de la rotación de una elipse, que genere menos errores en la altura elipsóidica, dígase elevación por encima o por debajo de una superficie idealizada que se aproxima a la forma de la Tierra. De modo que el objetivo de este breve ensayo pedagógico es calcular radios geocéntricos para distintas latitudes del elipsoide de referencia del Sistema Geodésico Mundial de 1984, World Geodetic System 84, o simplemente WGS84 y de paso ampliar la escasa literatura, en español, que existe en torno al procesamiento y cálculo matemático de latitudes y radios geocéntricos. La figura geométrica de la Tierra es una categoría trascendental en geodesia, la cual se refiere al tamaño y la forma utilizados para modelar al planeta Tierra. Tanto el tamaño como la forma a los que se refiere dependen del contexto y objetivos buscados, incluidas la precisión tanto en espacio como en tiempo requeridas por el modelado buscado. Es útil señalar que la forma esférica es una aproximación de la figura geométrica de la Tierra bastante satisfactoria para diversos propósitos, con ella se han desarrollado varios modelos de considerable precisión, por ejemplo, para cálculos astronómicos. Sin embargo, la superficie topográfica de la Tierra, con su accidentado relieve y fosas oceánicas, en general, es la preocupación central de topógrafos, hidrógrafos y geofísicos, puesto que su modelado matemáticamente, teniendo en cuenta las irregularidades citadas, es una labor en extremo compleja.

En otras palabras, la concepción pitagórica de una Tierra esférica ofrece una superficie adecuada para un fácil tratamiento geométrico, loable para muchos cálculos astronómicos y de navegación que utilizan ese modelo esférico para estudiar la Tierra. Empero, para otras tareas, a escala regional, se requieren mediciones más precisas de la forma de la Tierra, es allí donde entra el modelado de la superficie representado como un esferoide achatado u oblato.

En efecto, para levantamientos topográficos de áreas pequeñas, como fraccionamientos urbanos o proyectos arquitectónicos, un modelo plano (plano catastral) de la superficie de la Tierra es suficiente, porque la precisión de la topografía local supera los errores derivados de la curvatura de la Tierra, pero para mapear áreas más grandes, como regiones, países o continentes se requiere conocer el tamaño y la forma de la Tierra con mayor precisión, puesto que en esos casos los traspiés derivados de la curvatura de la Tierra superan al método de trigonometría plana.

En esa línea de pensamiento, en términos históricos, milenios después de Eratóstenes, y siglos después de las fórmulas geométricas de Johannes de Sacrobosco (1195-1256), de Francesco Maurolico (1494-1575) y de Francesco Barozzi (1537-1604), para comprobar la distancia de un grado de latitud (De Andrade, 2008), las primeras medidas modernas que contribuyeron a conocer la forma geométrica de la Tierra fueron: las de 1528 de Jean François Fernel, quien a partir del conteo de las revoluciones de las ruedas de su carruaje se conoció la distancia entre lugares separados cientos de kilómetros; y las de Willebrord van Roijen Snell, latinizado como Snellius del año 1615, este último calculó por primera vez, distancias en la superficie terrestre, basándose en el método de la triangulación topográfica (Veloso, 2016). No hay que olvidar la reimpresión que se dio en el siglo XVII de la *Cosmographia* de Maurolico, obra en la que se perfeccionó una metodología para medir la Tierra, la cual fue empleada hacia 1670 por Jean Picard para medir la longitud de un arco meridiano (Gómez, 2007).

Por tal motivo se considera a Picard, como la primera persona moderna en medir el tamaño de la Tierra con un grado razonable de precisión. Picard logró esto al oponer la distancia en línea recta (110 km) que hay de la ciudad de Amiens (ubicada a los $49^\circ\, 51'$ de latitud norte) a la ciudad de Paris (ubicada a los $48^\circ\, 51'$ de latitud norte) mediante el método de triangulación aplicado a trece polígonos que necesitó para tal hazaña. Sus mediciones arrojaron un resultado de $110{,}4$ km para un grado de latitud, lo que da un radio terrestre correspondiente de $6328{,}9$ km. Años más tarde, cuando se reconoció que el valor del radio polar era más corto que el del radio ecuatorial, comenzaron a surgir las interrogantes que llevaron a la creación de modelos de elipsoide para la representación de la forma geométrica de la Tierra. El elipsoide que representa la Tierra es un elipsoide particular pues es una superficie de revolución: se obtiene por una rotación de una elipse, siendo su ecuación:

$$\frac{(x^2+y^2)}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$

Donde x, y y z son las coordenadas cartesianas de un punto en la superficie del esferoide, y a y b son los semiejes mayores y menores, respectivamente. En el caso del modelo WGS84, se tiene que:

- Semieje mayor $a = 6.378.137{,}000$ metros,
- Semieje menor $b = 6.356.752{,}314$ metros.

Ahora bien, el primer elipsoide de la Tierra fue propuesto por Maupertuis, Clairaut, Camus, Le Monnier, M. Abbé Outhier, y M. Celsius, quienes determinaron la forma elipsoidal de la Tierra en 1738 (Veloso, 2016). Otros elipsoides que han sido elaborados a lo largo de la historia se muestran en la Tabla 1.

Ahora bien, dado que el planeta Tierra, aunque está ligeramente achatado en los polos y abultado en el Ecuador, tiene una forma relativamente amorfa, sin embargo, la figura geométrica utilizada en geodesia que más se aproxima a su forma es un esferoide oblato. Un esferoide oblato (o elipsoide oblato) es un elipsoide de revolución obtenido por rotación de una elipse alrededor de su eje más corto. Cuando un esferoide representa la forma de la Tierra u otro cuerpo celeste recibe el nombre de elipsoide de referencia (Kopeikin, 2019).

El uso de esferoides resuelve el problema de la forma del planeta Tierra, sin embargo, complican el cálculo de medidas y áreas debido a que como se sabe, las elipses (elipsoides) presentan dos focos y las circunferencias (esferas) uno, De modo que, en términos pedagógicos, para conocer el radio geocéntrico (o la distancia que hay entre el centro de la Tierra y un punto cercano a la superficie de ésta) de una latitud determinada de la Tierra, tomando en consideración un modelo elipsoidal, se requiere conocer la latitud geocéntrica del elipsoide de referencia (la latitud geocéntrica es una latitud elíptica, la cual se mide usando un sistema de coordenadas basado en un elipsoide), para esta última cifra es importante determinar la excentricidad ε del elipsoide de referencia, en otras palabras, para estipular la latitud geocéntrica primero hay que establecer cuál es la excentricidad del elipsoide de referencia.

§2. Metodología

Un elipsoide de referencia puede describirse mediante una serie de parámetros que definen su forma y que incluyen un semieje mayor a, un semieje menor b, de cuya relación se determina su razón de aplanamiento f, dada por

$$f = \frac{a-b}{a}.$$

Además, su distancia focal c, que se define como la distancia entre el centro del elipsoide y uno de sus focos. Su fórmula es:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Así como su excentricidad, también denominada primera excentricidad ε que mide la relación entre la distancia focal y la longitud del semieje mayor, en este caso a; y su segunda excentricidad ε' que mide la relación entre la distancia focal y

Elipsoide de referencia	**Radio ecuatorial (m)**	**Radio polar (m)**	**Razón de aplanamiento**	**Lugar donde se calculó**
Maupertuis (1738)	6.397.300	6.363.806,283	191	Francia
Plessis (1817)	6.376.523,0	6.355.862,9333	308,64	Francia
Everest (1830)	6.377.299,365	6.356.098,359	300,80172554	India
Everest 1830 modificado (1967)	6.377.304,063	6.356.103,0390	300,8017	Singapur
Everest 1830 (definición 1967)	6.377.298,556	6.356.097,550	300,8017	Brunéi
Airy (1830)	6.377.563,396	6.356.256,909	299,3249646	Bretaña
Bessel (1841)	6.377.397,155	6.356.078,963	299,1528128	Japón
Clarke (1866)	6.378.206,4	6.356.583,8	294,9786982	Norteamérica
Clarke (1878)	6.378.190	6.356.456	293,4659980	Norteamérica
Clarke (1880)	6.378.249,145	6.356.514,870	293,465	África
Helmert (1906)	6.378.200	6.356.818,17	298,3	EUA
Hayford (1910)	6.378.388	6.356.911,946	297	EUA
Internacional (1924)	6.378.388	6.356.911,946	297	Europa
NAD 27 (1927)	6.378.206,4	6.356.583,800	294,978698208	Norteamérica
Krassovsky (1940)	6.378.245	6.356.863,019	298,3	USSR
WGS66 (1966)	6.378.145	6.356.759,769	298,25	EUA
Nacional de Australia (1966)	6.378.160	6.356.774,719	298,25	Australia
Nuevo Internacional (1967)	6.378.157,5	6.356.772,2	298,24961539	
GRS-67 (1967)	6.378.160	6.356.774,516	298,247167427	
Sudamericano (1969)	6.378.160	6.356.774,719	298,25	Sudamérica
WGS-72 (1972)	6.378.135	6.356.750,52	298,26	EUA
GRS-80 (1979)	6.378.137	6.356.752,3141	298,257222101	Global
WGS-84 (1984)	6.378.137	6.356.752,3142	298,257223563	Global
IERS (1989)	6.378.136	6.356.751,302	298,257	Global
IERS (2003)	6.378.136,6	6.356.751,9	298,25642	Global

TABLA 1. Principales parámetros geométricos de algunos de los principales elipsoides. Fuente: Elaboración personal con base en (Franco, 1999).

la longitud del semieje menor, en este caso b. Se denotan: primera excentricidad

$$\varepsilon = \frac{c}{a},$$

segunda excentricidad

$$\varepsilon' = \frac{c}{b}.$$

Toda excentricidad ε de una elipse, es una medida de la desviación de la elipse respecto a la circularidad. Donde si $\varepsilon = 0$, significa que la elipse es en realidad un círculo; si $\varepsilon = \frac{4}{5}$, la elipse es bastante elíptica; si la relación entre el semieje-menor y el semieje-mayor es $\frac{1}{10}$, la $\varepsilon = 0{,}995$ aproximadamente. Si $\varepsilon = 1$, entonces en realidad la elipse está aplanada, dígase compactada. En efecto, el alargamiento de una elipse se mide por su excentricidad, a través de un rango que va desde 0 en el caso límite de un círculo a 1 en el caso límite de elongación que hace que la elipse aparente tener forma lineal. Analíticamente, la ecuación de una elipse estándar centrada en el origen con ancho a y altura b es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Asumiendo que $a \geq b$, los focos son $(\pm c, 0)$, mientras que si c se asume como $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, se tiene que:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

La primera excentricidad, también puede expresarse geométricamente como

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}};$$

en tanto que la segunda excentricidad puede enunciarse como

$$\varepsilon' = \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}.$$

De tal modo que para determinar la primera excentricidad ε del planeta Tierra (de utilidad para calcular cualquier latitud geográfica o geodésica), se empleará dicha fórmula, la cual es la forma estandarizada para practicar la conversión de coordenadas geodésicas (Jo, Lee, y Sunwoo, 2015).

Ahora bien, existen muchos elipsoides de referencia, como el GDA94 que utilizan en Australia; el KGD2002 que emplea Corea del Sur, el SAD69 que usan varios países en América del Sur, o el popularmente conocido *International Terrestrial Reference Frames* o ITRF y sus más de 12 versiones. Sin embargo, en este trabajo vamos a ocupar los valores del elipsoide de referencia Sistema Geodésico Mundial, WGS84, que ha sido por más de 35 años, el de mayor refinamiento y uso en las aulas, su uso es importante, tanto para cálculos orbitales de alta precisión para satélites, como usos geofísicos relacionados con las anomalías gravimétricas del geoide. Al emplear sus parámetros: (a) radio ecuatorial: $6.378.137{,}000$m; (b) radio polar: $6.356.752{,}314$m (Ulziisaikhan y Oyuntsetseg, 2020), para obtener la excentricidad

ε resulta en:

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{6.356.752{,}314}{6.378.137{,}000}\right)^2} = 8{,}181919131086976 \times 10^{-2}.$$

Dicho dato ε es perfectamente aproximado al que arroja (Meza, 2011), de $8{,}18191908426 \times 10^{-2}$, por lo que ahora se está en la posibilidad de estimar cualquier latitud geocéntrica mediante el uso de la fórmula propuesta por (Snyder, 1987):

$$\psi = \arctan[(1 - \varepsilon^2) \tan \phi'], \tag{2.1}$$

donde ψ se refiere a la latitud geocéntrica; ϕ' representa a la latitud geográfica geodésica[1], ambas operadas en radianes, y ε, como se ha visto, es la excentricidad.

Entonces, dada la latitud ϕ', por (2.1) se obtiene la latitud geocéntrica ψ. Observemos que si $\varepsilon = 0$, como en el caso de la esfera, ϕ' y ψ coinciden. Ahora bien,

$$1 - \varepsilon^2 = 1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2;$$

lo que quiere decir que:

$$\psi = \arctan\left((1 - \varepsilon^2) \tan \phi'\right) = \psi = \arctan\left(\left(\frac{b}{a}\right)^2 \tan \phi'\right).$$

De esa forma, es posible demostrar la relación entre ϕ' y ψ. Aplicando la función tangente a ambos lados de la ecuación obtenemos:

$$\tan \psi = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \tan \phi'$$

o, equivalentemente,

$$\tan \phi' = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \tan \psi.$$

Veamos como se deduce esta última fórmula. Sea (x_0, y_0, z_0) un punto del elipsoide con $y_0 = 0$, entonces la ecuación normal de la recta en el punto, en el plano $y_0 = 0$, viene dada por

$$z - z_0 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(\frac{z_0}{x_0}\right) (x - x_0)\,.$$

Por lo tanto, cuando $z = 0$ obtenemos

$$-z_0 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(\frac{z_0}{x_0}\right)(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad -z_0 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(\frac{x_0}{z_0}\right) = x - x_0,$$

[1]La latitud geodésica de un punto en el elipsoide se define como el ángulo que forma la normal que pasa por ese punto y el plano ecuatorial, mientras que la latitud geocéntrica se define como el ángulo entre el plano ecuatorial y la recta que conecta el centro del elipsoide con un punto de la superficie. Obviamente, en una esfera la latitud y la latitud geocéntrica coinciden, pero ese no es el caso del elipsoide que representa la superficie de la Tierra.

lo cual implica que,

$$x = -z_0\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{x_0}{z_0}\right) + x_0 = x_0 - x_0\left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

Con esto se concluye que la normal a la elipse en el punto $(x_0, 0, z_0)$ corta al plano $z = 0$ en el punto $(x_0 - x_0(\frac{b}{a})^2, 0, 0)$ y, por tanto,

$$\tan\phi' = \frac{z_0}{x_0 - \left(x_0 - x_0\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)} = \left(\frac{a}{b}\right)^2\frac{z_0}{x_0} = \left(\frac{a}{b}\right)^2\tan\psi,$$

que es la fórmula que se quiere probar. El caso de $y_0 \neq 0$ es similar debido a que el elipsoide se obtiene como superficie de revolución alrededor del eje z a partir de una elipse.

ϕ'	ψ	ϕ'	ψ	ϕ'	ψ	ϕ'	ψ
$1°$	$0° 59' 35{,}91''$	$26°$	$25° 50' 55{,}26''$	$51°$	$50° 48' 41{,}95''$	$76°$	$75° 54' 33{,}82''$
$2°$	$1° 59' 11{,}84''$	$27°$	$26° 50' 40{,}69''$	$52°$	$51° 48' 47{,}32''$	$77°$	$76° 54' 55{,}42''$
$3°$	$2° 58' 47{,}83''$	$28°$	$27° 50' 26{,}79''$	$53°$	$52° 48' 53{,}51''$	$78°$	$77° 55' 17{,}38''$
$4°$	$3° 58' 23{,}91''$	$29°$	$28° 50' 13{,}59''$	$54°$	$53° 49' 0{,}51''$	$79°$	$78° 55' 39{,}69''$
$5°$	$4° 58' 0{,}11''$	$30°$	$29° 50' 1{,}10''$	$55°$	$54° 49' 8{,}32''$	$80°$	$79° 56' 2{,}33''$
$6°$	$5° 57' 36{,}45''$	$31°$	$30° 49' 49{,}33''$	$56°$	$55° 49' 16{,}92''$	$81°$	$80° 56' 25{,}25''$
$7°$	$6° 57' 12{,}96''$	$32°$	$31° 49' 38{,}31''$	$57°$	$56° 49' 26{,}31''$	$82°$	$81° 56' 48{,}44''$
$8°$	$7° 56' 49{,}68''$	$33°$	$32° 49' 28{,}04''$	$58°$	$57° 49' 36{,}48''$	$83°$	$82° 57' 11{,}87''$
$9°$	$8° 56' 26{,}62''$	$34°$	$33° 49' 18{,}54''$	$59°$	$58° 49' 47{,}41''$	$84°$	$83° 57' 35{,}50''$
$10°$	$9° 56' 3{,}82''$	$35°$	$34° 49' 9{,}81''$	$60°$	$59° 49' 59{,}08''$	$85°$	$84° 57' 59{,}31''$
$11°$	$10° 55' 41{,}31''$	$36°$	$35° 49' 1{,}88''$	$61°$	$60° 50' 11{,}50''$	$86°$	$85° 58' 23{,}27''$
$12°$	$11° 55' 19{,}11''$	$37°$	$36° 48' 54{,}74''$	$62°$	$61° 50' 24{,}64''$	$87°$	$86° 58' 47{,}35''$
$13°$	$12° 54' 57{,}25''$	$38°$	$37° 48' 48{,}41''$	$63°$	$62° 50' 38{,}48''$	$88°$	$87° 59' 11{,}52''$
$14°$	$13° 54' 35{,}75''$	$39°$	$38° 48' 42{,}90''$	$64°$	$63° 50' 53{,}00''$	$89°$	$88° 59' 35{,}74''$
$15°$	$14° 54' 14{,}65''$	$40°$	$39° 48' 38{,}21''$	$65°$	$64° 51' 8{,}20''$	$90°$	$90°$
$16°$	$15° 53' 53{,}96''$	$41°$	$40° 48' 34{,}35''$	$66°$	$65° 51' 24{,}06''$		
$17°$	$16° 53' 33{,}72''$	$42°$	$41° 48' 31{,}33''$	$67°$	$66° 51' 40{,}54''$		
$18°$	$17° 53' 13{,}94''$	$43°$	$42° 48' 29{,}14''$	$68°$	$67° 51' 57{,}64''$		
$19°$	$18° 52' 54{,}65''$	$44°$	$43° 48' 27{,}79''$	$69°$	$68° 52' 15{,}33''$		
$20°$	$19° 52' 35{,}88''$	$45°$	$44° 48' 27{,}29''$	$70°$	$69° 52' 33{,}58''$		
$21°$	$20° 52' 17{,}64''$	$46°$	$45° 48' 27{,}63''$	$71°$	$70° 52' 52{,}39''$		
$22°$	$21° 51' 59{,}96''$	$47°$	$46° 48' 28{,}81''$	$72°$	$71° 53' 11{,}72''$		
$23°$	$22° 51' 42{,}86''$	$48°$	$47° 48' 30{,}84''$	$73°$	$72° 53' 31{,}56''$		
$24°$	$23° 51' 26{,}37''$	$49°$	$48° 48' 33{,}71''$	$74°$	$73° 53' 51{,}87''$		
$25°$	$24° 51' 10{,}49''$	$50°$	$49° 48' 37{,}41''$	$75°$	$74° 54' 12{,}63''$		

TABLA 2. Latitud geocéntrica para latitud geodésica del elipsoide WGS84, grados seleccionados. Fuente: elaboración personal

Ahora bien, como se cuenta con el valor de la primera excentricidad, al sustituir valores para el caso de la latitud geográfica de $30°$ $(0{,}523598776$ radianes$)$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\psi &= \arctan\big((1-0{,}08181919131086976^2)\cdot\tan(0{,}523598776)\big)\\ &= \arctan\big((1-0{,}00669438006676470)\cdot 0{,}577350269\big)\\ &= \arctan(0{,}5734852668676651).\end{aligned}$$

Luego,

$$\psi = 0{,}520695172 \text{ radianes},$$

lo cual resulta en $29{,}8336358$ grados decimales de latitud geocéntrica, o sea $29°\,50'\,01{,}088''$. Al iterar el proceso se obtienen las cifras de la Tabla 2. Nótese que la mayor diferencia entre latitudes geográficas y latitudes geocéntricas ocurre al centro de la distancia angular, a los $45°$ de latitud geográfica.

Ahora bien, toda vez que se conoce la latitud geocéntrica de un elipsoide y si son conocidos el semieje mayor a y la razón de aplanamiento f, se pueden obtener los valores del semieje menor b y de la excentricidad ε (o primera excentricidad), además de estar en la posibilidad de calcular el radio geocéntrico de cualquier latitud, puesto que:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \quad\Rightarrow\quad r^2b^2+z^2z^2=a^2b^2 \quad\Rightarrow\quad (p\cos\psi)^2\,b^2+(p\,\mathrm{sen}\,\psi)^2\,a^2=a^2b^2,$$

luego,

$$p^2=\frac{a^2b^2}{(a\,\mathrm{sen}\,\psi)^2+(b\cos\psi)^2} \quad\Rightarrow\quad p=\frac{ab}{\sqrt{(a\,\mathrm{sen}\,\psi)^2+(b\cos\psi)^2}}.$$

Por tanto, habida cuenta de que $b^2=a^2(1-\varepsilon^2)$, se llega a la fórmula propuesta por (Corchete, 2009):

$$p=\frac{a\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\psi}}.$$

Con la cual se puede deducir la fórmula para calcular el radio geocéntrico de cualquier latitud geocéntrica:

$$p=\frac{a\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\mathrm{sen}^2\,\psi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\psi}},$$

donde el radio geocéntrico es p, a el semieje mayor (radio ecuatorial), ε se refiere a la primera excentricidad y ψ, en este caso representa a la latitud geocéntrica. Siendo sus valores para la sustitución: $a = 6.378.137{,}000$ m; $\varepsilon = 0{,}08181919092890633$; y en este caso se va a calcular p radio geocéntrico para la latitud geográfica ϕ' de $23°\,26'\,47''$, la cual corresponde a una latitud geocéntrica ψ de $23°\,18'\,22{,}42''$, cuyo valor decimal es: $23{,}3062292369669$, y en radianes es $0{,}406770436409638$, de modo que:

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{6378137{,}000\sqrt{1-0{,}0818191909289063 3^2}\cdot \operatorname{sen}^2(0{,}406770436409638)}{\sqrt{1-0{,}08181919092890633^2}\cdot \cos^2(0{,}406770436409638)}\\
&= \frac{6378137{,}000\sqrt{1-0{,}00669438\cdot 0.156531739}}{\sqrt{1-0{,}00669438\cdot 0.843468261}}\\
&= \frac{6378137{,}000\sqrt{1-0{,}001047883}}{\sqrt{(1-0{,}005646497)}}\\
&= \frac{6378137{,}000\sqrt{0{,}998952117}}{\sqrt{0{,}994353503}}\\
&= \frac{6378137{,}000\cdot 0{,}99947592}{0{,}996895802} = \frac{6354993{,}954}{0{,}996895802} = 6374782{,}54 \text{ m.}
\end{aligned}
$$

Al iterar el proceso se obtienen las cifras de la Tabla 3, a partir de las cuales se puede conocer y comparar las magnitudes de cada radio geocéntrico, según la latitud del mismo, y observar desde otro punto las concepciones en torno a estos conceptos medulares de la geografía.

Para hacer inteligible dichos cálculos, en lo particular para usuarios no familiarizados con el campo de la geometría satelital ni con la geodesia, pero que usan de forma tangencial información de esta última ciencia, se cita el siguiente ejemplo, sean las latitudes de los puertos de Salina Cruz, Oaxaca, Tampico, Tamaulipas y Ensenada, Baja California: $16^\circ\,09'\,37''$ N; $22^\circ\,15'\,52''$ N y $31^\circ\,51'\,36''$ N, respectivamente, sus radios geocéntricos son: $6.376.497{,}90$; $6.375.096{,}63$ y $6.372.224{,}61$ m, respectivamente. Lo cual, teóricamente, significa que, aunque los tres se encuentran a 0 msnm, entre el nivel del mar de Salina Cruz, Oaxaca (aproximadamente paralelo 16° de la tabla 3) y el de Ensenada, Baja California (aproximadamente paralelo 32° de la tabla 3) hay $4.273{,}29$ m de diferencia, respecto al centro del planeta Tierra, en otras palabras, así como el nivel del mar del Océano Ártico se encuentra 21 mil metros más cerca del centro de la Tierra respecto al nivel medio de los mares ecuatoriales, el nivel del mar del puerto de Ensenada, Baja California se encuentra $4.273{,}29$ m, más cerca del centro de la Tierra que el puerto de Salina Cruz, Oaxaca.

Esta perspectiva es importante, debido a que recientemente se está comprendiendo qué las anomalías del relieve, así como las anomalías en los distintos niveles del mar están también asociados al campo gravitatorio del planeta Tierra según su región geofísica, ergo, latitud, por lo que es importante conocer esta perspectiva que arroja el conocimiento del radio geocéntrico de los distintos grados de latitud de un elipsoide y su relación con la geodesia relativista (Kopeikin, 2019).

ϕ'	ψ	**R Geocéntrico**	ϕ'	ψ	**R Geocéntrico**	ϕ'	ψ	**R Geocéntrico**
1°	0,993	6378130,563	31°	30,830	6372509,079	61°	60,836	6361813,434
2°	1,986	6378111,258	32°	31,827	6372177,878	62°	61,840	6361499,312
3°	2,979	6378079,108	33°	32,824	6371840,852	63°	62,844	6361192,545
4°	3,973	6378034,151	34°	33,821	6371498,408	64°	63,848	6360893,517
5°	4,966	6377976,439	35°	34,819	6371150,957	65°	64,852	6360602,604
6°	5,960	6377906,039	36°	35,817	6370798,921	66°	65,856	6360320,172
7°	6,953	6377823,033	37°	36,815	6370442,724	67°	66,861	6360046,574
8°	7,947	6377727,518	38°	37,813	6370082,799	68°	67,866	6359782,154
9°	8,940	6377619,605	39°	38,811	6369719,584	69°	68,870	6359527,242
10°	9,934	6377499,42	40°	39,810	6369353,52	70°	69,875	6359282,157
11°	10,928	6377367,103	41°	40,809	6368985,055	71°	70,881	6359047,204
12°	11,921	6377222,809	42°	41,808	6368614,638	72°	71,886	6358822,676
13°	12,915	6377066,707	43°	42,808	6368242,723	73°	72,892	6358608,85
14°	13,909	6376898,979	44°	43,807	6367869,766	74°	73,897	6358405,993
15°	14,904	6376719,822	45°	44,807	6367496,226	75°	74,903	6358214,353
16°	15,898	6376529,445	46°	45,807	6367122,562	76°	75,909	6358034,166
17°	16,892	6376328,073	47°	46,808	6366749,236	77°	76,915	6357865,651
18°	17,887	6376115,941	48°	47,808	6366376,709	78°	77,921	6357709,013
19°	18,881	6375893,299	49°	48,809	6366005,442	79°	78,927	6357564,44
20°	19,876	6375660,41	50°	49,810	6365635,895	80°	79,933	6357432,105
21°	20,871	6375417,547	51°	50,811	6365268,527	81°	80,940	6357312,165
22°	21,866	6375164,997	52°	51,813	6364903,795	82°	81,946	6357204,76
23°	22,861	6374903,06	53°	52,814	6364542,153	83°	82,953	6357110,013
24°	23,857	6374632,045	54°	53,816	6364184,053	84°	83,959	6357028,031
25°	24,852	6374352,274	55°	54,818	6363829,941	85°	84,966	6356958,905
26°	25,848	6374064,078	56°	55,821	6363480,261	86°	85,973	6356902,709
27°	26,844	6373767,8	57°	56,823	6363135,449	87°	86,979	6356859,499
28°	27,840	6373463,794	58°	57,826	6362795,939	88°	87,986	6356829,316
29°	28,837	6373152,422	59°	58,829	6362462,155	89°	88,993	6356812,183
30°	29,833	6372834,057	60°	59,833	6362134,516	90°	90	6356808,107

Tabla 3. Radio geocéntrico en metros para latitud geográfica y latitud geocéntrica del elipsoide WGS84, grados seleccionados. Fuente: elaboración personal.

§3. Consideraciones finales

Actualmente el modelado de la superficie terrestre atraviesa por el debate entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica, es decir, para comprender los fenómenos físico geográficos, a escala regional y continental, además de la física newtoniana, se requiere la consideración de las mediciones más precisas de la forma de la Tierra que arrojan los nuevos elipsoides de referencia basados en nuevos procesos. Para ello es importante familiarizarse con la precisión de los distintos elipsoides de referencia geodésica mundial, con la intención de apreciar las considerables variaciones en magnitud que presentan, en el radio, paralelos con tan solo un grado angular de diferencia.

Esta medida proporciona una nueva interpretación de las concepciones en torno a conceptos geográficos, por ejemplo, se puede reinterpretar el tamaño de cimas y valles, midiendo no su altura, sino su distancia al centro de la Tierra, por ejemplo, entre el nivel del mar de Salina Cruz, Oaxaca y el de Ensenada, Baja California hay $4,2$ km de diferencia, respecto al centro del planeta Tierra, en otras palabras, el nivel del mar del puerto de Ensenada, Baja California se encuentra 4 km más cerca del centro de la Tierra que el puerto de Salina Cruz, Oaxaca.

Esta perspectiva es de utilidad, debido a que últimamente se está comprendiendo qué, las anomalías del relieve y las anomalías de los distintos niveles del mar están asociados a las variaciones que experimenta el campo gravitatorio del planeta Tierra, por lo que es importante divulgar y ampliar ésta perspectiva que arroja el conocimiento del radio geocéntrico de los distintos paralelos o grados de latitud de cualquier elipsoide de referencia.

Bibliografía

Corchete, V. (2009). *Elipsoide de revolución: superficie de referencia y superficie equipotencial*. Almería, España: Universidad de Almería. doi: http://doi/10.13140/RG.2.2.10394.88003

De Andrade, R. (2008). A herança de Sacrobosco e seus comentadores: desenvolvimentos e erros na astronomia geocêntrica do século XVI. En R. De Andrade, C. Silva, J. Hidalgo, y L. Al-Chueyr (Eds.), *Filosofia e Historia da Ciência no Cone Sul: Seleção de trabalhos do 5o. encontro* (p. 373-382). Associação de Filosofia e História da Ciência do Cone Sul.

Franco, R. (1999). *Nociones de topografía geodesia y cartografía*. Cáceres, España: Universidad de Extremadura.

Gómez, C. (2007). La forma de la tierra: expedición para medir un grado del arco de meridiano en el virreinato del Perú (1735-1744). *EGA. Revista de Expresión Gráfica Arquitectónica*, *1*(12), 128-139.

Jo, K., Lee, M., y Sunwoo, M. (2015). Fast GPS-DR sensor fusion framework: removing the geodetic coordinate conversion process. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, *17*(7), 2008-2013.

Kopeikin, S. (2019). Reference-Ellipsoid and Normal Gravity Field in Post-Newtonian Geodesy. En D. Puetzfeld y C. Lämmerzahl (Eds.), *Relativistic Geodesy: Foundations and Applications", Fundamental Theories of Physics* (p. 159-228). Springer.

Meza, P. (2011). *El datum en navegación*. Valdivia, Chile: Universidad Austral de Chile, Facultad de Ciencias de la Ingeniería.

Snyder, J. (1987). *Map projections-A working manual* (*Vol. 1395*). Washington D. C, Estados Unidos de América: United States Geological Survey.

Ulziisaikhan, G., y Oyuntsetseg, D. (2020). UAV and terrestrial laser scanner data processing for large scale topographic mapping. *Mongolian Geoscientist*, *50*, 63-73.

Veloso, F. (2016). A elaboração de uma nova descrição geral da Terra nos primeiros séculos da época moderna (1522–1780). *Revista Equador*, *5*(2), 159-189.

Rodrigo Tovar Cabañas
El Colegio de Veracruz, México
(⌧) *rod_ geo77@hotmail.com*

Hipólito Villanueva Hernández
Universidad Autónoma de Nuevo León, México
(⌧) *polo_ arase@hotmail.com*

Shany Arely Vázquez Espinosa
Universidad Veracruzana, México
(⌧) *shanyvaz@gmail.com*

Recibido: *8 de abril de 2022.*
Aceptado: *12 de abril de 2023.*
Publicado en línea: *3 de agosto de 2023.*