Sección de Problemas

☞ *por Juan Pablo Rossetti*

Los siguientes problemas están pensados para un público amplio. Las soluciones se encuentran en la página 91.

Problema 1. *Obtener 1 litro con dos baldes.*

¿Cómo se puede obtener 1 litro exacto de agua teniendo una provisión inagotable de agua y dos baldes, uno de 5 litros y el otro de 7 litros?

En general, si los baldes en lugar de ser de 5 y 7 litros, fueran de k y m litros, con k y m enteros positivos, ¿cómo deben ser k y m para poder obtener 1 litro exacto?

Problema 2. *Intensidad de los parlantes.*

Se colocan dos grupos de parlantes en una plaza: en una esquina, 2 parlantes juntos, y en la esquina opuesta, 3 parlantes juntos. Todos apuntan hacia el centro de la plaza. Ahora queremos ubicar nuestra silla entre los dos grupos de parlantes, de modo de oír los dos con la misma intensidad. ¿Dónde debe colocarse nuestra silla?

Problema 3. *Pesar todos los pesos.*

En una balanza de dos platillos, queremos ser capaces de pesar en kilogramos la mayor cantidad de pesos enteros a partir de 1 kg. y sin saltear ningún valor entero, es decir, pesar 1 kg, 2kg, 3kg, hasta algún valor entero. Se pueden poner pesas en ambos platillos de la balanza.

Si usamos solo 4 pesas ¿cuántos pesos enteros se pueden lograr y cuánto deben pesar las 4 pesas?

En general, si usamos n pesas, $n \in \mathbb{N}$, ¿cuántos pesos enteros se pueden lograr con n pesas y cuánto deben pesar las n pesas?

¡Sucesiones al toque!

¿Cuál creés que es el próximo número en las siguientes sucesiones y por qué? ¿Te animás a encontrar más términos de estas sucesiones? ¿Y una fórmula general?

- $\{a_n\}$: 1, 9, 36, 100, 225, 441, 784, 1296, 2025, 3025 , . . .

- $\{b_n\}$: 1, 3, 0, 4, 9, 3, 10, 18, 9, 19, 30, 18, 31, 45, 30, 46, 63, 45, 64, 84 , . . .

- $\{c_n\}$: 2, 4, 6, 9, 12, 15, 20, 25, 30, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 88, 99, 110, 121, 132, 143, 156, 169, 182, 195, 208, 221, 238, 255, 272, 289, 306, 323, 342 , . . .

- $\{d_n\}$: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, , . . .

Podés encontrar las soluciones en la página siguiente.

SOLUCIONES

Solución 1. *Respuesta:* Hay varias formas de resolver este problema clásico de divisibilidad de enteros. Una es llenar el balde de 5, pasar el agua al de 7. Llenar por 2da vez el de 5, pasar 2 litros al de 7 (esto se puede hacer, porque se va pasando el agua con cuidado de modo de frenar justo cuando se llena el balde de 7). Vaciar el de 7. Pasar los 3 litros que quedan en el de 5 al de 7. Llenar por 3ra vez el de 5. Pasar 4 litros del de 5 al de 7, y ahí queda justo 1 litro en el de 5.

Esto funcionó porque $3 \times 5 - 2 \times 7 = 1$. Otra forma podría haber sido usar que $1 = 3 \times 7 - 4 \times 5$ y llenar 3 veces el balde de 7 litros e ir pasando el agua al de 5, que cuando se llena hay que tirar su agua, etc.

Hay una gran variedad de problemas como el planteado donde se pide obtener una cierta cantidad entera de litros, c, con dos baldes con capacidades para k y m litros respectivamente, que tienen solución si y solamente el máximo común divisor entre k y m, (k, m), divide a c (y que c no sea mayor que k y m simultáneamente). Para esto se usa que (k, m) se puede expresar como combinación lineal entera de k y m, es decir, existen enteros s y t tales que $(k, m) = s \times k + t \times m$.

Solución 2. *Respuesta:* La silla se debe poner a $3 - \sqrt{6} \cong 0,55$ del grupo de los 3 parlantes (esta es la proporción con respecto a la distancia entre los dos grupos de parlantes, que tomamos como 1).

Se sabe que la intensidad del sonido en un lugar es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia con respecto a la fuente del sonido. Para tener la misma intensidad, si llamamos x a la proporción de la distancia desde el grupo de los 3 parlantes, planteamos la ecuación $\frac{3}{x^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$, que se resuelve $\iff 3(1-x)^2 = 2x^2$, $\iff x^2 - 6x + 3 = 0$, cuya solución es $x = 3 \pm \sqrt{6}$, y como x debe ser un número entre 0 y 1, queda solo $x = 3 - \sqrt{6}$.

Solución 3. *Respuesta:* Con 4 pesas se pueden pesar todos los pesos desde 1 hasta 40 kg y las 4 pesas deben pesar 1, 3, 9 y 27 kg., respectivamente.

En general, con n pesas, se pueden pesar todos los pesos desde 1 hasta $\frac{3^n-1}{2}$ y las pesas deben ser las potencias del 3, es decir $3^0 = 1$, $3^1 = 1$, $3^2 = 9, \ldots, 3^{n-1}$.

Para ir logrando los pesos se van poniendo las pesas así:

(1er platillo, 2do platillo): (1,0) para 1 kg.; (3,1) para 2 kg.; (3,0) para 3 kg. y (3+1,0) para 4 kg. Así vemos que con solo 2 pesas se pueden obtener los pesos del 1 al 4.

Al agregar una pesa de 9 kg., se ve que al ir restando de 9 los pesos del 4 al 1 se van logrando el 5, 6, 7 y 8, y luego al ir sumando al 9 los pesos del 1 al 4 se obtienen del 10 al 13, por lo que con 3 pesas se logran todos los pesos del 1 al 13. El procedimiento sería poner $(9, 3+1)$ para pesar 5, $(9, 3)$ para pesar 6, $(9+1, 3)$ para el 7, $(9, 1)$ para el 8, luego $(9, 0)$ para el 9, $(9+1, 0)$ para el 10, $(9+3, 1)$ para el 11, $(9+3, 0)$ para el 12 y $(9+3+1, 0)$ para el 13. Notemos que $4 = \frac{3^2-1}{2}$ y $13 = \frac{3^3-1}{2}$. La siguiente pesa es la de 27 kg., que al combinarla con los pesos ya obtenidos con las 3 primeras pesas, nos permite ir restando $27 - 13 = 14, \ldots, 27 - 1 = 26$, luego 27, y luego sumar hasta llegar a $27 + 13 = 40$. Nuevamente $40 = \frac{3^4-1}{2}$.

La elección de las pesas es óptima, puesto que hemos hecho todas las combinaciones posibles de pesas en los dos platillos y han dado siempre pesos distintos, por lo que con 4 pesas y una balanza de dos platillos el máximo número posible de pesos que se pueden lograr es 40, y con n pesas es $\frac{3^n-1}{2}$.

Inductivamente se prueba sin dificultad el caso general.

Nota: Este es un problema clásico, formulado por Bachet de Méziriac en 1612, que lo enunció así: *Determinar el menor número de pesas, y su peso en libras, necesarias para pesar cualquier cantidad de libras entre 1 y 40, ambas incluidas* (*sin admitir fracciones*).

Este enunciado no es exactamente igual al dado, porque no hicimos conocer el número 40 de entrada, sino el de las 4 pesas.

Soluciones de ¡sucesiones al toque!

- $a_{11} = 4356$.
  a_n es la suma de los primeros n cubos; o el n-ésimo número triangular al cuadrado.

- $b_{21} = 63$.
  b_n es la suma parcial de los primeros n naturales, poniendo signo negativo al tercero de cada tres.

- $c_{36} = 361$.
  $c_{n+1} = c_n +$ el mayor factor primo de c_n.

- $d_{101} = 4$.
  $d_n =$ es la raíz cúbica entera de n.

Viene de la página 90.