¿Sabías que...

por Leandro Cagliero y Ricardo Podestá

existe una fórmula para saber el día de la semana correspondiente a una fecha dada?

Existe una curiosa fórmula (aunque no es curioso que la fórmula exista) para saber, dada una fecha, de qué día de la semana se trata. Toda fecha, como el 1 de enero de 2001, define 4 números naturales

$$n, m, a, b$$

como sigue. Sea n el número que corresponde al día del mes ($n = 1$ en nuestro ejemplo). Sea m el número del mes contando desde marzo. O sea, $m = 1$ para marzo, $m = 2$ para abril, $\ldots$, $m = 10$ para diciembre, $m = 11$ para enero y $m = 12$ para febrero. Esto peculiar elección se debe a que en los años bisiestos un día extra es añadido a febrero. Representemos a los años por ac donde c son las centenas (últimas dos cifras) y a el resto ($a = 20$ y $c = 01$ en nuestro ejemplo). Por último, sea d el día de la semana, con $d = 0$ para domingo, $d = 1$ para lunes, y así hasta $d = 6$ para el sábado (regla pnemotécnica: d0mingo).

Día de la semana a partir de la fecha: En las notaciones previas, para cualquier fecha $n/m/ac$, a partir del 15 de octubre de 1582 dC, el día de la semana que le corresponde es

$$d = n + [2.6m - 0.2] + c + [\tfrac{c}{4}] + [\tfrac{a}{4}] - 2a - (1+b)[\tfrac{m}{11}] \pmod 7$$

donde $[\cdot]$ denota la función parte entera y ponemos $b = 1$ si el año es bisiesto y $b = 0$ si no. Además, recordemos un entero a es congruente a un entero b módulo un natural n, denotado $a \equiv b \pmod n$, si y sólo si $p \mid a - b$, es decir $a = b + kn$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo: Calculemos que día cayó el 'barrilete cósmico', es decir el día de los goles de Diego Maradona a los ingleses. Todos sabemos (o deberíamos) que ese día fue el 22 de junio de 1986. Luego, tenemos $n = 22$, $m = 4$, $a = 19$ y $c = 86$. Además $b = 0$. Por la fórmula tenemos

$$\begin{aligned} d &= 22 + [2.6 \cdot 4 - 0,2] + 86 + [\tfrac{86}{4}] + [\tfrac{19}{4}] - 2 \cdot 19 - (1+0)[\tfrac{4}{11}] \\ &= 22 + 10 + 86 + 21 + 4 - 38 = 105 = 7 \cdot 15 \equiv 0 \pmod 7 \end{aligned}$$

Luego $d = 0$, es decir la fórmula dice que ¡fue un domingo! y todos sabemos que es correcto.

¿Por qué funciona? La prueba de la fórmula es una aplicación del principio de inducción. Es decir, veremos que la fórmula es correcta viendo que: (i) es correcta para el 15 de octubre de 1582, y (ii) si es correcta para una fecha, entonces también es correcta para la fecha del día siguiente.

El punto (i) lo dejamos de ejercicio para el lector (similar al ejemplo ya hecho). Veamos el punto (ii), para lo cual haremos un estudio caso por caso. En todos los casos debemos ver que al cambiar los valores de n, m, a, c y b de la fecha por n', m', a', c' y b' de la fecha del día siguiente, cambia el valor de $d \pmod 7$ por el de $d+1 \pmod 7$.

Los meses de 31 días son enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre y diciembre (que corresponden a 11, 1, 3, 5, 6 y 8), los de 30 días son abril, junio, setiembre y noviembre (2, 4, 7 y 9), y febrero tiene 28 (recordar el versito de la primaria: *"treinta días trae noviembre / con abril, julio y septiembre / de veintiocho sólo hay uno / y los demás, de treinta y uno"*).

Casos:

(a) Cambio de día, pero no de mes ni de año (e.g. 9 de julio de 1816). En este caso es claro que sólo cambia n por $n+1$ y por lo tanto d por $d+1$ módulo 7.

(b) Cambio de mes, de 31 días, sin cambio de año (e.g. 31 de enero de 2000). Tenemos $n = 31$, $n' = 1$, $m \in \{1, 3, 5, 6, 8, 11\}$, $m' = m + 1$, $a = a'$ y $c' = c$.

(c) Cambio de mes, de 30 días, sin cambio de año (e.g. 30 de abril de 2000). Tenemos $n = 30$, $n' = 1$, $m \in \{2, 4, 7, 9\}$, $m' = m + 1$, $a = a'$ y $c' = c$.

(d) Cambio de mes, de 29 días (29 de febrero de cualquier año bisiesto). Tenemos $n = 29$ con $b = 1$, $n' = 1$ $m = 12$, $m' = 1$, $a = a'$ y $c' = c + 1$.

(e) Cambio de mes, de 28 días (28 de febrero de un año no bisiesto). Tenemos $n = 28$ con $b = 0$, $n' = 1$ $m = 12$, $m' = 1$, $a = a'$ y $c' = c + 1$.

(f) Cambio de año sin cambio de siglo (e.g. 31 de diciembre de 2013) Tenemos $n = 31$, $n' = 1$ $m = 10$, $m' = 11$, $a = a'$ y $c' = c + 1$.

(g) Cambio de año con cambio de siglo (e.g. 31 de diciembre de 1999) Tenemos $n = 31$, $n' = 1$ $m = 10$, $m' = 11$, $a' = a + 1$ y $c = 99$ y $c' = 0$.

¡Listo! Hermosa aplicación de congruencias y principio de inducción. Sin embargo, esta fórmula no es la única. El famoso matemático inglés John H. W. Conway (26/12/1937–11/4/2020) obtuvo una fórmula parecida usando anchor days (días anclas) y doomsdays (días del juicio final). Pero esta es otra historia...

La fórmula vale a partir del 15 de octubre de 1582, que es cuando se adoptó el calendario gregoriano actualmente en uso. Recordar que los años bisiestos son aquellos que son divisibles por 4, salvo los que son divisibles por 100, que entonces son bisiestos si además son divisibles por 400. Por ejemplo, 1984 y 2000 son bisiestos, pero 1900 y 2100 no lo son.