
DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA DEL RECORRIDO DE UN PORTÓN LEVADIZO NO DESBORDANTE

Marcela P. Álvarez, Flavia E. Buffo y Gabriel A. Carrizo

RESUMEN. En este trabajo se presenta el modelo matemático y la resolución de un problema real y cotidiano para estudiantes de la carrera de Ingeniería que cursan materias básicas. Se propone un modelo simple para estudiar el movimiento de ascenso y descenso de un portón levadizo no desbordante, que se desliza sobre dos rieles horizontales y otros dos verticales. La resolución del modelo matemático atraviesa diferentes contenidos, geometría de curvas, cálculo y análisis diferencial, topología, optimización. Se describe matemáticamente la curva que representa el recorrido del portón en su movimiento de apertura, se presentan los resultados técnicos del problema y se analiza su importancia como propuesta metodológica, en el contexto del aprendizaje basado en problemas y la educación basada en competencias.

Palabras clave: Aprendizaje basado en problemas, Cálculo diferencial, Modelado matemático.

ABSTRACT. This work presents the mathematical model and the resolution of a real and everyday problem for students of the Engineering career who take basic subjects. A simple model is proposed to study the upward and downward movement of a non-overflowing liftgate, which slides on two horizontal rails and two vertical rails. The resolution of the mathematical model goes through different contents, geometry of curves, calculation and differential analysis, topology, optimization. The curve that represents the path of the gate in its opening movement is mathematically described, the technical results of the problem are presented and its importance as a methodological proposal is analyzed, in the context of problem-based learning and competence-based education.

Keywords: Problem-based learning, Differential calculus, Mathematical modelling.

§1. Introducción

Desde hace tiempo, en las carreras de ingeniería se vienen observando serios problemas en la interpretación, desarrollo y resolución de problemas matemáticos a partir de la observación de problemas reales. En el transcurso de su formación, el estudiante debe adquirir conocimientos básicos generales que constituyen la base en la que se apoyan los desarrollos científicos. Asimismo, deben ser capaces

de identificar, formular y resolver problemas de ingeniería, comunicar y defender sus ideas y coordinar el trabajo con sus pares. La tarea de los docentes de matemática tiene dos componentes: la organización matemática como herramienta fundamental para modelizar cualquier actividad matemática y la organización didáctica desarrollando tareas que faciliten el aprendizaje de nuevos contenidos y movilización de saberes previos. El docente debe ser capaz de proponer estrategias didácticas que promuevan el aprendizaje activo de los estudiantes y el desarrollo de capacidades técnicas propias de la formación. Existen diferentes metodologías de aprendizaje activo, por ejemplo el aprendizaje basado en problemas (ABP) (Nieto Said, 2004; Escribano y del Valle, 2008). Para trabajar en el aula con los estudiantes, los docentes deben elegir y/o diseñar problemas que los involucren en escenarios relevantes, faciliten la conexión entre la teoría y su aplicación razonada, los desafíen a buscar soluciones interesantes, fomenten el trabajo en grupos y requieran, no sólo conocimientos, sino discernimiento respecto a las diferentes maneras de abordar el problema. En la Sección 2 se propone un problema real y cotidiano: estudiar el movimiento de ascenso y descenso de un portón levadizo no desbordante, como un buen ejemplo para implementar la estrategia didáctica (ABP). En la Sección 3 se presentan los conceptos teóricos a los que el estudiante debe recurrir para modelar y resolver el problema desde diferentes perspectivas y grados de dificultad. En las Secciones 4 y 5 se describe el modelo matemático y se analizan los resultados obtenidos respectivamente. Finalmente, en la Sección 6 se presentan las conclusiones.

§2. El problema

El problema consiste en estudiar el movimiento de ascenso y descenso de un portón levadizo no desbordante, que se desliza sobre dos rieles horizontales. Para describir matemáticamente el recorrido del portón en su movimiento de apertura utilizando un modelo simple, se emplean diferentes conceptos y resultados de geometría de curvas, cálculo y análisis diferencial (Ardenghi, Buffo, y Álvarez, 2019), topología y optimización. Para los estudiantes el problema se enuncia como sigue: *Al entrar un automóvil a un garaje, en el que ya hay otro vehículo estacionado, e intentar cerrar el portón levadizo no desbordante como se muestra en la Figura 1, una parte del portón impacta al segundo automóvil. Se desea analizar por qué ocurrió el impacto, de qué forma podría evitarse cualquiera sea el tamaño del vehículo y cómo se expresa matemáticamente el recorrido del portón en su movimiento de ascenso o descenso.* Ardenghi y cols. (2019) presenta el problema descrito como un recurso para la implementación práctica del aprendizaje enfocado en competencias para las asignaturas Análisis Matemático I.



FIGURA 1. Sistema portón, garaje, auto.

§3. Conceptos teóricos

A continuación se presentan algunos conceptos fundamentales para resolver el problema matemático (Bartle, 1980; Courant y Fritz, 1965; Rey Pastor, Pi Calleja, y Trejo, 1968; Spinadel, 2004).

3.1. Problemas de optimización. Se considera el problema de optimización con restricciones de igualdad

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \min_{s.a} \quad & f(x) \\ & c(x) = 0, \end{aligned}$$

donde $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la función objetivo de clase C^2 , $c : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y diferenciable, que representa la restricción del problema y define el conjunto o región de factibilidad. En particular, si $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathbb{R})$ y no hay restricciones de igualdad, entonces las *condiciones necesarias y suficientes* para que x_* sea un minimizador local de f son

$$(3.2) \quad f'(x_*) = 0, \quad f''(x_*) > 0.$$

Para el problema (3.1) sea

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda c(x)$$

la función de Lagrange asociada al problema, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es el multiplicador de Lagrange de la restricción $c(x)$. Entonces las *condiciones necesarias y suficientes* para que x_* sea un minimizador local de f , sujeto a la restricción $c(x) = 0$, es que exista $\lambda_* \in \mathbb{R}$ tal que

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L}(x_*, \lambda_*) &= 0, \\ c(x_*) &= 0, \\ z^T \nabla^2 \mathcal{L}(x_*, \lambda_*) z &> 0, \quad \forall z \text{ tal que } \nabla c(x_*)^T z = 0, \end{aligned}$$

siempre que $\nabla c(x_*) \neq 0$. La condición de primer orden en (3.3) se llama condición de optimalidad, se expresa

$$\nabla f(x_*) = -\lambda \nabla c(x_*),$$

y garantiza que el gradiente de f en x_* sea combinación lineal del gradiente de c en x_* , la segunda ecuación en (3.3) verifica que x_* sea un punto factible y la condición de segundo orden establece que la matriz Hessiana $\mathcal{L}(x_*, \lambda_*)$ sea definida positiva, siempre que el vector z pertenezca al espacio tangente de las restricciones, esto es, que sea normal al gradiente de la restricción c , $\nabla c(x_*)$ cualquiera sea z .

3.2. Envolverte de curvas planas. Sea $\{C_t\}$ un haz o familia uniparamétrica de curvas planas de ecuación

$$(3.4) \quad f(x, y, t) = 0$$

dependientes de un parámetro t , donde f es una función escalar con derivadas parciales primeras continuas. Una curva E que en cada uno de sus puntos es tangente a alguna de las curvas de la familia $\{C_t\}$ se llama *envolverte* de la familia de curvas, y cada una de las curvas C_t se denomina *involuta*. Supongamos que existe la envolvente E de la familia de curvas $f(x, y, t) = 0$ dada. Entonces en el punto de contacto de la curva $f(x, y, t) = 0$ con la envolvente se verifica que $f_t(x, y, t) = 0$. Si pueden determinarse x e y como funciones de t por medio de estas dos ecuaciones, se obtiene la representación paramétrica de una curva con parámetro t , y esta curva es la envolvente que puede representarse por medio de dos funciones continuamente diferenciables $x(t), y(t)$:

$$(3.5) \quad E : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

donde

$$x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0.$$

Aplicando la regla de la cadena, la derivada de la función f respecto de t es

$$(3.6) \quad f_x x'(t) + f_y y'(t) + f_t = 0.$$

Ahora bien, si para el haz de curvas $\{C_t\}$ la envolvente E existe, entonces por la condición de tangencia los vectores (f_x, f_y) y $(x'(t), y'(t))$ son ortogonales, esto es

$$f_x x'(t) + f_y y'(t) = 0.$$

Luego la expresión (3.6) se convierte en $f_t = 0$. Por lo tanto, las ecuaciones

$$(3.7) \quad \begin{cases} f(x(t), y(t), t) = 0, \\ f_t(x(t), y(t), t) = 0, \end{cases}$$

son una *condición necesaria* para la envolvente E . Si existen $x(t)$ e $y(t)$ que satisfacen el sistema (3.7) y además $f_x^2 + f_y^2 \neq 0$, $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$, entonces se tiene una *condición suficiente* de existencia de E .

3.3. Sucesiones de funciones. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; se dice que $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es el límite puntual de la sucesión $\{f_n\}$ si para cada $x \in D$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x).$$

Se dice que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge a una función f en D si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ y para cada x en D hay un número $n_0(\epsilon, x) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0(\epsilon, x)$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Esta convergencia es una propiedad local de la sucesión en el punto x . Se dice que la función $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es el límite uniforme de la sucesión $\{f_n\}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un natural $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ para todo $x \in D$ y para todo $n \geq n_0(\epsilon)$. Se sabe que dada $\{f_n\}$ una sucesión de funciones $f_n : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que converge uniformemente a la función f sobre el intervalo $[a, b]$, si cada f_n es continua en $[a, b]$, entonces f es continua en $[a, b]$.

Teorema 1. (Dini) Sea (E, d) un espacio métrico compacto, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $\{f_n\}$, $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas. Si $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en E y es *mótona decreciente*, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ para todo $x \in E$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en E .

Un conjunto $K \in \mathbb{R}^p$ se dice convexo si para cada par de puntos de K , el segmento que los une está totalmente incluido en K , es decir, si $x, y \in K$ y $t \in [0, 1]$, entonces $(1 - t)x + ty = x + t(y - x) \in K$. La intersección de cualquier colección de conjuntos convexos en \mathbb{R}^p es convexa.

§4. Modelo matemático del problema

Para estudiar el movimiento de ascenso y descenso de un portón levadizo no desbordante que se desliza sobre dos rieles horizontales y dos verticales, se propone un modelo simple. Se considera una sección plana longitudinal del garaje y se asocia un sistema de ejes coordenados con origen en O como se muestra en la Figura 2; el portón, de altura L , se representa con el segmento \overline{AB} y los rieles horizontal y vertical, de igual tamaño, con los segmentos con \overline{OD} y \overline{OE} , respectivamente. Si el portón está cerrado $\overline{AB} \equiv \overline{OE}$ y está contenido en la recta perpendicular a eje x de ecuación $x = 0$. A medida que el portón asciende (o desciende) los puntos A y B se «desplazan» sobre los ejes x e y ; el segmento \overline{AB} pertenece a la recta, que interseca a los ejes coordenados en los puntos $A = (x_0, 0)$ y $B = (0, y_0)$, de ecuación

$$y = -\frac{y_0}{x_0}(x - x_0), \quad 0 < x_0 \leq L, \quad -L \leq y_0 \leq 0.$$

Como el triángulo $\triangle AOB$ es rectángulo en O , x_0 e y_0 satisfacen la relación Pitagórica:

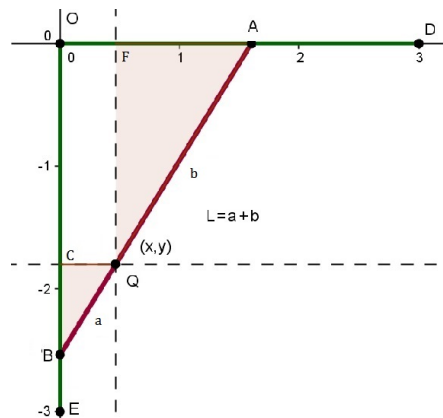


FIGURA 2. Esquema simple para el modelo del movimiento del portón.

$$x_0^2 + y_0^2 = L^2.$$

Cuando el portón está completamente abierto $\overline{AB} \equiv \overline{OD}$, $x_0 = L$ y la recta r es horizontal. En resumen, la posición del portón de altura L , parametrizada en x_0 , se expresa como:

$$(4.1) \quad \begin{cases} \text{Portón cerrado} & x_0 = 0, & -L \leq y \leq 0, & \text{si } x = 0, \\ \text{Portón abriendo} & 0 < x_0 \leq L, & y = \frac{\sqrt{L^2 - x_0^2}}{x_0} (x - x_0), & \text{si } 0 \leq x \leq x_0. \end{cases}$$

Sea $Q(x, y)$ el punto fijo sobre el portón que se muestra en la Figura 2, si la medida del segmento \overline{AQ} es b y la medida del segmento \overline{BQ} es $a = L - b$, entonces los triángulos rectángulos sombreados en la figura son semejantes. Luego

$$\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{b}.$$

Elevando al cuadrado cada miembro de la ecuación anterior se obtiene que x e y satisfacen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

por lo tanto el punto Q durante el movimiento de apertura del portón describe una trayectoria elíptica como se muestra en la Figura 3.

§5. Análisis de los resultados

5.1. Resolución del problema de optimización en una variable. Con el modelo simple propuesto en la sección 4, se plantea el siguiente problema (Ardenghi y cols., 2019): *Calcular cuál es la mejor distancia a la que puede ser colocado un automóvil dentro del garaje sin que, durante su recorrido, el portón levadizo lo impacte.* Para un

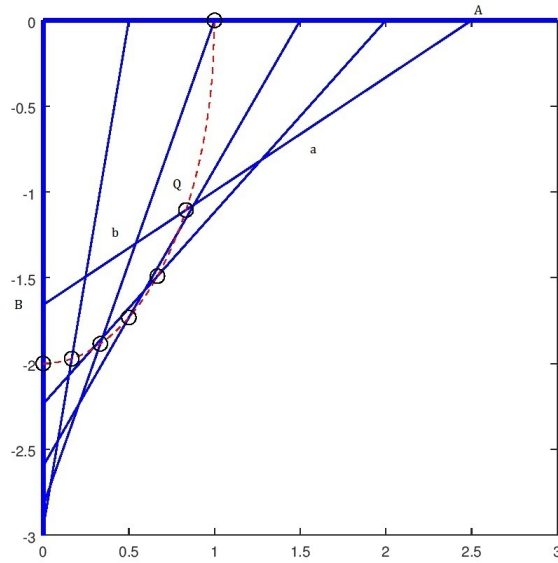


FIGURA 3. Trayectoria elíptica (línea punteada) de un punto fijo Q sobre el portón (o), en su movimiento de apertura. Posición del portón (línea llena).

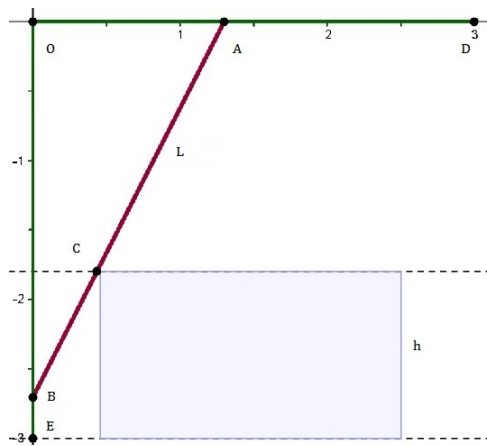


FIGURA 4. Ejemplo del modelo con $L = 3 \text{ m}$, $h = 1.2 \text{ m}$ y $C \cong (0.65, -1.8)$.

portón de altura L y un auto de altura h , el valor de la abscisa del punto de impacto $C = (x, h - L)$ mostrado en la Figura 4 es

$$x = \frac{(h - L)x_0}{\sqrt{L^2 - x_0^2}} + x_0.$$

Para encontrar la abscisa del punto C , que cumple con el objetivo de ser la mejor distancia para que el portón no impacte al auto, se plantea el problema de optimización

$$(5.1) \quad \max_{0 < x_0 < L} f(x_0) = \frac{(h-L)x_0}{\sqrt{L^2 - x_0^2}} + x_0.$$

Se tiene en cuenta que resolver (5.1) es equivalente a resolver el problema de minimizar la función $-f(x)$. La expresión de la derivada primera es:

$$f'(x_0) = 1 + \frac{(h-L)L^2}{(L^2 - x_0^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Al aplicar la condición de optimalidad de primer orden (3.2) y resolver la ecuación se obtiene

$$x_0^* = \sqrt{L^2 - \sqrt[3]{(h-L)^2 L^4}}.$$

Se verifica la condición de optimalidad de segundo orden

$$f''(x_0^*) = \frac{3(h-L)L^2 x_0^*}{(L^2 - (x_0^*)^2)^{\frac{5}{2}}} < 0,$$

y se concluye que x_0^* es un maximizador local de la función f y el máximo local $f(x_0^*)$ es el valor de la abscisa del punto C . Para verificar que se trata de un máximo global en $D = (0, L)$ se calculan los límites en la frontera

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0^+} f(x_0) = 0, \quad \lim_{x_0 \rightarrow L^-} f(x_0) = -\infty.$$

En la tabla se resumen los resultados obtenidos para dos casos de estudio:

Caso	L	h	x_0^*	y_0^*	$x = f(x_0^*)$	$y = h - L$
I	3	1.2	1.61	-2.53	0.46	-1.8
II	3	1.5	1.82	-2.38	0.68	-1.5

En la Figura 5 se representan los puntos $C(x, h-L)$ para diferentes alturas de auto h , y el segmento \overline{AB} que modela la posición del portón.

5.2. Resolución del problema de optimización en dos variables con restricciones de igualdad. El problema de la sección anterior puede reformularse como sigue

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \max_{s.a} \quad & f(x_0, y_0) = \frac{(L-h)x_0}{y_0} + x_0 \\ & x_0^2 + y_0^2 - L^2 = 0, \end{aligned}$$

y resolverse usando el método de los multiplicadores de Lagrange,

$$\mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda) = \frac{(L-h)x_0}{y_0} + x_0 + \lambda(x_0^2 + y_0^2 - L^2).$$

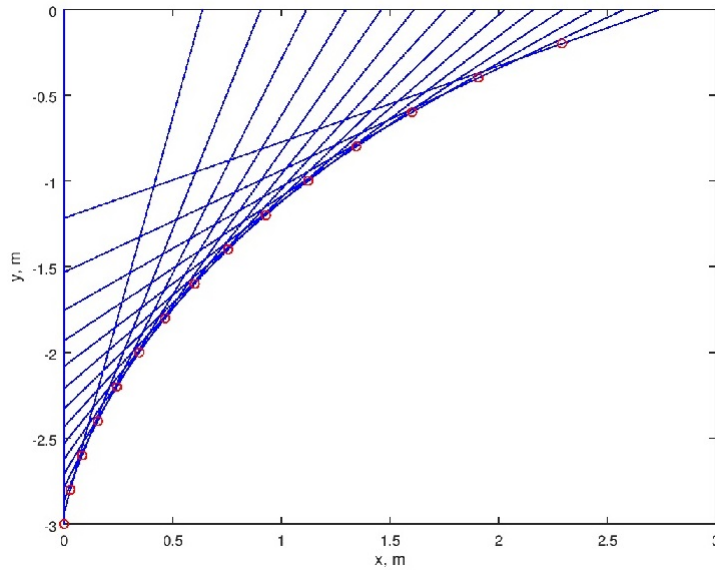


FIGURA 5. Gráfico del punto C para diferentes valores $0 < h < 3$ y de la posición del portón (segmento \overline{AB} en línea llena) .

Se aplican la condiciones de optimalidad y factibilidad

$$(5.3) \quad \nabla_x \mathcal{L} = \begin{bmatrix} \frac{L-h}{y_0} + 1 + 2x_0\lambda \\ -\frac{(L-h)x_0}{y_0^2} + 2y_0\lambda \end{bmatrix} = 0, \quad x_0^2 + y_0^2 - L^2 = 0,$$

se resuelve el sistema (5.2) y se obtiene

$$x_0^* = \sqrt{L^2 - \sqrt[3]{(h-L)^2 L^4}}, \quad y_0^* = -\sqrt[3]{(L-h)L^2}.$$

En la tabla se presentan los valores resultados para dos casos de estudio:

Caso	L	h	x_0^*	y_0^*	$x = f(x_0^*)$	$y = h - L$	λ
I	3	1.2	1.6117	-2.5303	0.46517	-1.8	-0.089539
II	3	1.5	1.8249	-2.3811	0.67529	-1.5	-0.101385

5.3. Análisis topológico del problema. Para cada posición x_0 del portón, se define un conjunto dado por el techo, el piso, el fondo y el portón del garaje. Este conjunto es convexo ya que se expresa mediante el sistema de inecuaciones lineales

$$U(x_0) = \begin{cases} 0 \leq x \leq P, \\ -L \leq y \leq 0, \\ y - \frac{\sqrt{L^2 - x_0^2}}{x_0} x \leq -\sqrt{L^2 - x_0^2}. \end{cases}$$

El conjunto G de todos los puntos del garaje que no son alcanzados por el portón en ningún momento, es decir el “conjunto útil del garaje”, se obtiene como intersección

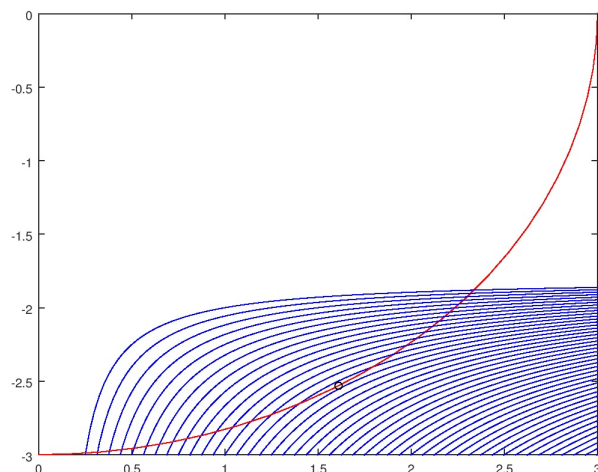


FIGURA 6. Solución gráfica del problema de optimización en dos variables para el caso $h = 1.2$.

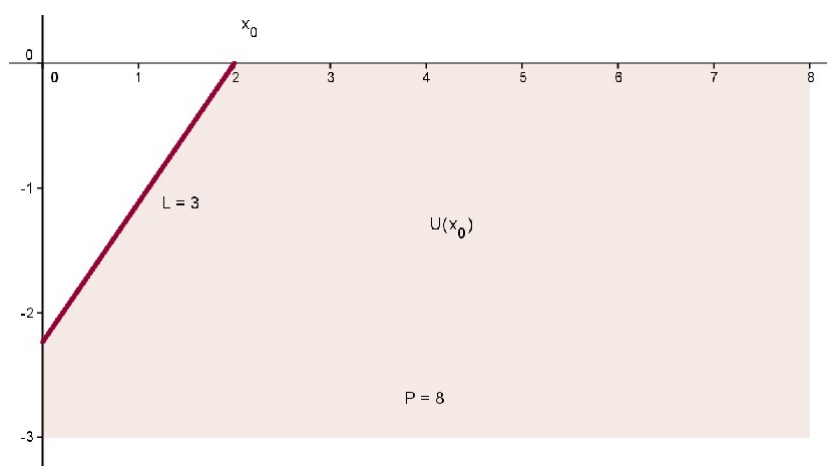


FIGURA 7. Conjunto $U(x_0)$.

de todos los $U(x_0)$ con $x_0 \in (0, L)$ convexos, luego G es un conjunto convexo. Al partir de la Figura 5 puede suponerse que la parte “curva” de la frontera de G es una función continua g . Para demostrarlo se construye una sucesión de funciones poligonales. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera un conjunto de $2^n - 1$ rectas que representen $2^n - 1$ posiciones del portón. Si $n = 1$ se tiene una recta; si se considera la posición del portón cuando el extremo inferior se halla a la mitad del recorrido la recta es

$$(5.4) \quad y_1^1(x) = \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}}x - \frac{L}{2}$$

Si $n = 2$ se tienen 3 rectas, en particular se consideran:

$$(5.5) \quad \begin{aligned} y_1^2(x) &= \frac{\frac{L}{4}}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{4}\right)^2}}x - \frac{L}{4}, \\ y_2^2(x) &= \frac{\frac{2L}{4}}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{2L}{4}\right)^2}}x - \frac{2L}{4}, \\ y_3^2(x) &= \frac{\frac{3L}{4}}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{3L}{4}\right)^2}}x - \frac{3L}{4}. \end{aligned}$$

Si $n = 3$ resultan ser 7 rectas:

$$(5.6) \quad \begin{aligned} y_1^3(x) &= \frac{\frac{L}{8}}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{8}\right)^2}}x - \frac{L}{8}, \\ y_2^3(x) &= \frac{\frac{2L}{8}}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{2L}{8}\right)^2}}x - \frac{2L}{8}, \\ y_3^3(x) &= \frac{\frac{3L}{8}}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{3L}{8}\right)^2}}x - \frac{3L}{8}, \\ y_4^3(x) &= \frac{\frac{4L}{8}}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{4L}{8}\right)^2}}x - \frac{4L}{8}, \\ y_5^3(x) &= \frac{\frac{5L}{8}}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{5L}{8}\right)^2}}x - \frac{5L}{8}, \\ y_6^3(x) &= \frac{\frac{6L}{8}}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{6L}{8}\right)^2}}x - \frac{6L}{8}, \\ y_7^3(x) &= \frac{\frac{7L}{8}}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{7L}{8}\right)^2}}x - \frac{7L}{8}. \end{aligned}$$

Analizando las expresiones (5.4), (5.5) y (5.6) se observa que $y_2^2(x) = y_1^1(x)$, por lo tanto al pasar de $n = 1$ a $n = 2$ se agregan dos rectas a (5.4). Análogamente como $y_2^3(x) = y_1^2(x)$ e $y_6^3(x) = y_3^2(x)$ al pasar de $n = 2$ a $n = 3$ se agregan otras cuatro rectas a (5.5). En general, para un n arbitrario definimos $2^n - 1$ rectas

$$y_i^n(x) = \frac{i}{\sqrt{4^n - i^2}}x - \frac{iL}{2^n}, \quad i = 1, \dots, 2^n - 1.$$

Sea V_n el conjunto de rectas definidas de este modo para cada n , es claro que $V_n \subset V_{n+1}$. A partir de estos conjuntos de rectas definimos una sucesión de poligonales $p_n : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$

$$p_n(x) = \min \{y_k^n(x), 0\}$$

Cada una de estas funciones p_n es uniformemente continua ya que *el mínimo de funciones uniformemente continuas es uniformemente continua*. En la Figura 8 se muestran las poligonales p_1, p_2, p_3 obtenidas a partir de las rectas definidas en (5.4), (5.5) y (5.6) respectivamente. Si se define $g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$

$$(5.7) \quad g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x)$$

intuitivamente el gráfico de g es la curva que delimita la región útil del garaje; se debe verificar que g este bien definida, es decir que para cada $x \in [0, L]$ el límite (5.7) existe. Para un valor $\bar{x} \in [0, L]$ se considera la sucesión numérica $\{y_n\}_{n=0}^\infty$, siendo $y_n = p_n(\bar{x})$, como esta sucesión es *monótona decreciente y acotada*

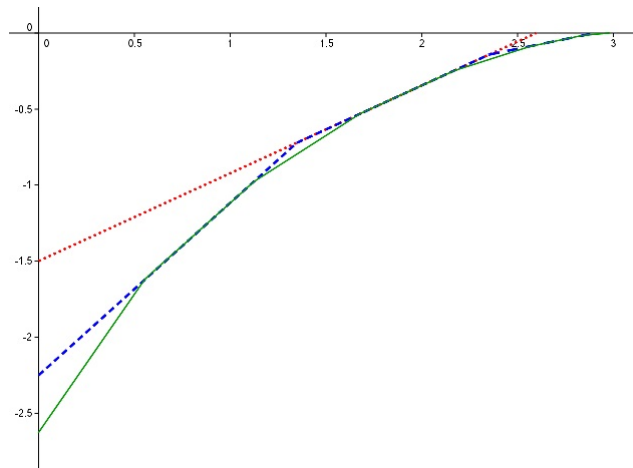


FIGURA 8. Gráfico de las poligonales p_1 (línea de puntos), p_2 , (línea a trazos) y p_3 (línea sólida).

inferiormente, entonces converge y g está bien definida. Además, como $[0, L]$ es un conjunto compacto, $p_n(x) \geq p_{n+1}(x)$, y p_n converge puntualmente a g , entonces por el teorema de Dini $p_n \rightarrow g$ uniformemente y g es continua $[0, L]$.

5.4. Cálculo del recorrido del portón. Para obtener el recorrido del portón es necesario obtener la expresión de la función continua g . En la Figura 5 se observa que la familia o haz de rectas que generan las diferentes posiciones del portón levadizo, se expresan con la ecuación

$$f(x, y, x_0) = x_0 y - \sqrt{L^2 - x_0^2}(x - x_0) = 0,$$

con x_0 como parámetro. Para obtener la expresión de la envolvente g del haz de rectas se aplican las condiciones (3.7):

$$(5.8) \quad \begin{cases} x_0 y - \sqrt{L^2 - x_0^2}(x - x_0) = 0, \\ y + \frac{x_0}{\sqrt{L^2 - x_0^2}(x - x_0)} + \sqrt{L^2 - x_0^2} = 0. \end{cases}$$

Multiplicando la segunda ecuación en (5.8) por x_0 y restándola a la primera resulta:

$$-\sqrt{L^2 - x_0^2}(x - x_0) - \frac{x_0^2(x - x_0)}{\sqrt{L^2 - x_0^2}} - x_0\sqrt{L^2 - x_0^2} = 0.$$

Con algo de trabajo algebraico se despeja x y se obtiene:

$$x = X(x_0) = \frac{x_0^3}{L^2},$$

luego, reemplazando $x = X(x_0)$ en la segunda ecuación de (5.8) se obtiene:

$$y = Y(x_0) = -\frac{(L^2 - x_0^2)^{\frac{3}{2}}}{L^2}.$$

En resumen, la envolvente g que describe el recorrido del portón se expresa

$$(5.9) \quad g : \begin{cases} x = \frac{x_0^3}{L^2}, \\ y = -\frac{(L^2 - x_0^2)^{\frac{3}{2}}}{L^2}, \end{cases} \quad x_0 \in [0, L].$$

En la Figura 9 se grafica el recorrido del portón g y algunos puntos $C(x, h - L)$

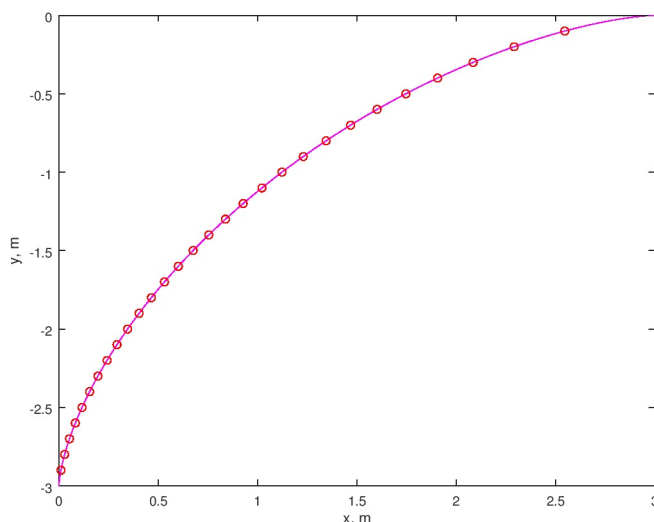


FIGURA 9. Gráfico de la envolvente g y de algunos puntos de tangencia C .

cuya abscisa es la mejor distancia desde la entrada del garaje para que el portón no impacte a un auto de altura h , obtenidos resolviendo el problema de optimización (5.1) para algunos valores de h .

§6. Conclusiones

Para resolver problemas en contextos reales se requiere una visión sistémica, conocimiento formal, experiencia, creatividad, práctica y juicio. Es decir, un alto nivel de desempeño en la competencia profesional. Con este problema los docentes pretenden que los estudiantes se involucren en escenarios reales que faciliten la conexión entre la teoría y su aplicación razonada, desafiarlos a buscar soluciones creativas, que trabajen colaborativamente en su solución y que sean capaces de exponer sus ideas de manera escrita y oral.

Bibliografía

Ardenghi, J. I., Buffo, F. E., y Álvarez, M. P. (2019). Aprendizaje por competencias en Ciencias Básicas: Recorrido de un portón levadizo no desbordante. En *El enfoque por competencias en Ciencias Básicas: casos y ejemplos en educación en*

- Ingeniería..* M. U. Cukierman y G. Calocai (Comp.). Ciudad Autónoma de Buenos Aires: edUTecNe (Ed.), (p. 148-160).
- Bartle, R. E. (1980). *Introducción al Análisis Matemático*. México D.C.: Editorial Limusa.
- Courant, R., y Fritz, J. (1965). *Introduction to Calculus and Analysis* (Vol. 1.). New York: Wiley International Edition.
- Escribano, A., y del Valle, A. (2008). *El Aprendizaje Basado en Problemas. Una propuesta metodológica en Educación Superior*. Narcea, S. A. Ediciones.
- Nieto Said, J. H. (2004). *Resolución de problemas matemáticos. Talleres de Formación Matemática*, Maracaibo, Brasil.
- Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., y Trejo, C. A. (1968). *Análisis Matemático* (Vol. 2). Buenos Aires: Editorial Kapeluz.
- Spinadel, V. W. (2004). *Cálculo 2*. Buenos Aires: Nueva Librería.

MARCELA P. ÁLVAREZ
Universidad Nacional del Sur
(✉) palvarez@criba.edu.ar

FLAVIA E. BUFFO
Universidad Nacional del Sur
(✉) fbuffo@uns.edu.ar

GABRIEL A. CARRIZO
Universidad Nacional del Sur
(✉) gabriel.carrizo@uns.edu.ar

Recibido: 16 de marzo de 2020.
Aceptado: 19 de mayo de 2021.
Publicado en línea: 14 de diciembre de 2021.
