
Las cigarras y los números primos

Nota editorial por Juan Carlos Pedraza

DURANTE el mes de enero de este año se pudo leer en un periódico de Illinois

Si prefiere masticar vidrio en lugar de escuchar la fuerte llamada de apareamiento de miles de millones de cigarras de 17 años, mayo podría ser un buen momento para salir de Illinois (Dalbey, s.f.)

El título, replicado en varios medios locales, llamó mi atención y me recordó una anécdota que vincula a estas cigarras, al trovador estadounidense Bob Dylan y a los números primos.

Era la primavera de 1970. Bob Dylan se encontraba en la Universidad de Princeton para recibir un doctorado honorífico. Desde el bosque que circunda a la universidad, Dylan pudo escuchar el ensordecedor “canto” de cientos de miles de cigarras similares a las que podemos escuchar los días calurosos en muchos parajes de nuestro país que también llamamos chicharras o coyuyos, según la región.

Esto inspiró a Dylan para componer *Day of the Locust* (Día de la Langosta). Tal vez Dylan debió llamar a su tema *Day of the Cicada* (Día de la Cigarra) ya que no eran langostas; pero podemos concederle a un Premio Nobel de Literatura, esa licencia poética o el derecho a la ignorancia de tal hecho.

Lo cierto es que Bob Dylan no se encuentra muy a gusto en el ambiente académico donde debe recibir su diploma, por lo menos eso dice la letra de la canción (Dylan, s.f.):

*I glanced into the chamber where the judges were talking.
Darkness was everywhere, it smelled like a tomb.
I was ready to leave, I was already walkin'.
But the next time I looked there was light in the room.
And the locusts sang, yeah, it give me a chill.
Oh, the locusts sang such a sweet melody,
Oh, the locusts sang their high whining trill.
Yeah, the locusts sang and they were singing for me.*

*Eché un vistazo a la sala donde hablaban los jueces.
 Tinieblas por todas partes, aquello olía a tumba.
 Yo estaba listo para irme, ya emprendía la marcha.
 Pero cuando volví a mirar había luz en la habitación.
 Y cantaron las langostas, sí, y sentí un escalofrío.
 Las langostas cantaron una dulce melodía,
 las langostas cantaron quejumbrosos gorgoritos.
 Sí, las langostas cantaron y cantaban para mí.*

Estas cigarras, como otras variedades que se encuentran en el este de Estados Unidos tienen algo muy particular: durante 17 años permanecen ocultas bajo tierra en forma de ninfas, recogiendo nutrientes de las raíces de los árboles. Durante el mes de mayo en el que Dylan estaba en Princeton, como lo habían hecho 17 años antes, salieron al exterior para una bacanal que duraría unas pocas semanas. En ellas, comen, fundamentalmente se aparean, las hembras ponen sus huevos y mueren. Son, en promedio, medio millón de cigarras por hectárea y solo los machos “cantan” para atraer a las hembras (en realidad poseen unos sacos con aire que funcionan como cajas de resonancia). El concierto es tan ensordecedor que muchos vecinos de la zona suelen irse de allí durante esos días tal como invita el título del periódico de Illinois. Se las puede oír a casi dos kilómetros de distancia.

Pero ¿por qué 17 años? ¿Por qué tanta exactitud? ¿Por qué su ciclo de vida es un número primo? ¿Es casualidad? Es probable que no porque estas cigarras que se guían por el número primo 17 no son la única variedad que se guía por un número primo. Otras variedades de cigarras, por ejemplo, tienen un ciclo de vida de 13 años, como ocurre en Alabama. Y otras pocas, el número 7. Todos números primos.

Esta mágica relación de las cigarras con los números primos la explica el matemático y divulgador Marcus du Sautoy de la Universidad de Oxford en su libro *La música de los números primos* (du Sautoy, 2003). Su teoría, se basa en

la posible existencia de un depredador que también solía aparecer periódicamente en el bosque, coordinando su llegada para que coincidiera con la de las cigarras y dándose el festín con los insectos recién aparecidos. Aquí es donde irrumpe la selección natural, porque las cigarras que regulan sus vidas con un ciclo que es un número primo se encontrarán con los depredadores con mucha menos frecuencia que las cigarras con un ciclo que no es un número primo.

Supongamos, por ejemplo, que los depredadores aparecen cada cinco años. Las cigarras que aparecen cada 17 años sólo coincidirán con los depredadores cada 85 años, ya que 5 y 17 no tienen factores comunes. Será mejor para ese depredador buscar otro alimento...

Historia incompleta de un fracaso

El estudio de los números primos ha sido motor de la teoría de números que se pensaba del reino exclusivo de la matemática pura, alejada de toda contaminación práctica. Sin embargo, esta teoría ha servido para generar en las últimas décadas, sofisticadas técnicas de encriptación, fundamentales en el desarrollo de internet, en la defensa y en la seguridad bancaria entre otras muchas aplicaciones.

Desde la creación de los sistemas de numeración y las operaciones, entre ellas la de multiplicar dos números, se pudo observar que unos se obtienen a partir de otros usando esta operación. Por ejemplo: el 30 se obtiene de multiplicar el 5 y el 6. Pero como el 6 es 2 por 3, resulta también que el 30 es el producto de tres factores: 2 por 3 por 5. El nombre *factor* viene de *hacedor* o *fabricador*. Es decir, el 2, el 3 y 5 hacen o forman el 30. ¿Qué nos detiene en este proceso de factorizar el 30? Tanto el 2 como el 3 como el 5 no pueden ser formados por ningún otro número. Mientras que podríamos sacar el 30 de la lista de números, sabiendo que lo podemos fabricar con solo multiplicar adecuadamente sus factores, el 2, el 3 y el 5 son insustituibles. En este proceso de fabricación de los números a partir de otros usando la multiplicación, los números primos (los insustituibles) vienen a jugar el papel de los átomos de la aritmética y allí radica tal vez su importancia.

Tal vez el primer intento fue hacer una lista de estos números. La lista no solo es “larga”, sino que también es caótica:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots$$

Salvo el 2 todos son impares pero no todos los impares están en la lista. No había una forma de saber cuál sería el próximo número primo y si siempre habría un próximo.

La matemática busca regularidades, patrones que puedan predecir de qué va la cosa. Encontrar la regularidad de un objeto de estudio, encontrar su ritmo, es como amansar un caballo salvaje. Los primos resultaron ser a lo largo del tiempo unos números salvajes que no se dejaron domar.

Los *Elementos* de Euclides tiene la primera demostración de que siempre hay un primo después de otro. Es decir, que hay infinitos primos. Se puede leer en los *Elementos*: supongamos que 2, 3 y 5 son los únicos números primos que hay y que todos los demás números son, en contrapartida, compuestos y se pueden obtener a partir de ellos. Se fabrica un nuevo número: producto de estos tres y únicos primos más 1:

$$2 \times 3 \times 5 + 1 = 31$$

Ni 2, ni 3, ni 5 dividen en forma exacta a 31 ya que siempre da resto 1 en la división porque así fue construido. O bien 31 es un nuevo número primo, o bien está formado por otros números primos que no están en la lista de los tres únicos primos.

Sabemos que 31 es primo, con lo cual estamos en el primer caso. Pero cualquiera sea el caso, esto contradice que sólo haya tres números primos. Este razonamiento se puede hacer con cualquier cantidad finita de números primos y siempre se llega a la misma contradicción: hay un número que o bien es un primo que no está en la lista o bien hacen falta nuevos números primos para construirlo. Por lo tanto hay infinitos números primos. Decía Godfrey A. Hardy (1877–1947) al referirse a este razonamiento de reducción al absurdo: *el ajedrecista sacrifica una pieza para ganar una partida, el matemático ofrece la partida misma para llegar a la verdad.*

Pasaron 2100 años. Nadie podía encontrar la cadencia, el ritmo de estos números al tiempo que nuevos problemas, desarrollos y conjeturas nacían al compás de su errático andar.

En 1792 un chico de 15 años recibió como regalo de cumpleaños una tabla de logaritmos que tenía al final, una larga lista con los primeros números primos. El joven era Carl Fiedrich Gauss (1777–1855). Él, como tantos otros, no podía establecer un patrón que permitiera predecir cuál sería el siguiente número primo. Pero Gauss (un adolescente por entonces), tuvo una nueva mirada. En lugar de preocuparse por encontrar una fórmula, se preguntó cómo estaban distribuidos. Observó que entre los primeros diez números, había abundancia de números primos: el 2, el 3, el 5, el 7. Eran 4, casi la mitad. Vio que esta abundancia de primos que se comprueba entre los primeros números se iba disipando conforme se exploran números más grandes. Lo sorprendente para Gauss era que lo hacían siguiendo cierta cadencia rítmica: mientras que entre los primeros diez casi la mitad eran primos, entre los cien primeros números, una cuarta parte de ellos eran primos, entre los primeros mil solo la sexta parte aproximadamente resultaban ser primos, entre los primeros diez mil apenas uno de cada ocho de ellos era primo y entre los primeros cien mil lo eran 1 de cada diez aproximadamente. Cada vez que agregaba un cero a la cantidad de números, la proporción de primos disminuían con cierta regularidad, con un número cercano a 2 como factor de regularidad. Una breve tabla muestra esta cadencia descubierta por Gauss. Llamó $\pi(x)$ a la cantidad de primos que no superan a x

x	$\pi(x)$	$x/\pi(x)$	diferencia
10	4	2,500	
100	25	4,000	1,500
1.000	168	5,952	1,952
10.000	1.229	8,137	2,185
100.000	9.592	10,425	2,288
1.000.000	78.498	12,740	2,315
10.000.000	664.579	15,047	2,307

(donde en la cuarta columna se da la diferencia entre dos proporciones consecutivas de la tercer columna).

Aunque seguramente Gauss no tenía una lista de primos tan grande, pudo ver que este factor que al principio se parece a 2, en realidad se parece mucho más a 2,305. En la misma tabla que tenía Gauss en sus manos pudo ver que este número es bastante aproximado al $\ln(10)$. En otras palabras, él observa que cuando $x = 10^n$, entonces $\frac{x}{\pi(x)}$ se parece a $\ln(10) \times n$, es decir

$$\frac{x}{\pi(x)} \approx \ln(10) \times \log_{10}(x) = \ln(x).$$

Conjeturó entonces que la cantidad de primos $\pi(x)$, que no superan a x , se podía aproximar en forma asintótica mediante la fórmula $\frac{x}{\ln(x)}$. Por ejemplo,

$$\pi(1.000.000.000) = 50.847.534 \quad \text{y} \quad \frac{1.000.000.000}{\ln(1.000.000.000)} = 48.254.942.$$

El cociente de ambas cantidades es un número cercano a 1 (1,054). El error es de apenas el 5%.

Gauss no pudo demostrar su conjetura y hubo que esperar hasta 1896, para que Jacques Hadamard (1865–1963) y Charles Jean de la Vallée Poussin (1866–1962) demostraran en forma independiente que la conjetura era cierta. Los primos tenían una música propia, aunque todavía no se sabía (aún no se sabe) la partitura completa. La demostración de estos dos matemáticos se basaba en un descubrimiento prodigioso realizado por un discípulo de Gauss de la Universidad de Gotinga. En 1859 descubrió una relación inesperada entre la distribución de los números primos y la misteriosa *función zeta*.

Georg Fredrich Bernhard Riemann (1826–1866) era un estudiante tímido, hipocóndrico y poco afecto a socializar con sus compañeros. Entró a estudiar en Gotinga en 1846. Riemann se dio cuenta de que el gráfico de la función zeta, le proporcionaba un escenario tridimensional que podía servir para estudiar los números primos. Obtuvo así un fascinante paisaje con extensas mesetas, depresiones abismales y cordilleras infinitas. Pero no era esto lo interesante del paisaje sino que en los valles había ciertos lugares a nivel del mar (los ceros de la función), que parecían estar distribuidos de una manera muy particular. Los *ceros* de la función, parecía que estaban todos alineados y que tenían una conexión estrecha con la distribución de los números primos. Podríamos decir que los ceros daban las notas de la música que se estaba buscando. Los ceros de la función zeta pueden interpretarse como frecuencias armónicas en la distribución de los números primos. Riemann había encontrado una regularidad, un patrón. Pero Riemann no pudo demostrar lo que intuía ni disfrutar la fama que le trajo. La guerra entre Hanover y Prusia hizo temer a Riemann que una bala lo encontraría en las calles de Gotinga y se fue a Italia. A las tres semanas, con solo 39 años, murió de tuberculosis.

Esta conjetura de que todos los ceros de la función zeta están alineados se llama desde entonces la *hipótesis de Riemann* y se convirtió en el desvelo de varias generaciones de matemáticos, En 1914 Hardy demostró que había infinitos ceros de la función zeta sobre la recta crítica. Un avance asombroso pero que no cerraba el problema. El desafío es uno de los *siete problemas del milenio* y por su resolución el Instituto Clay de Matemática estableció un premio de un millón de dólares. Poco dinero para tamaña proeza...

...

Lo cierto es que en mayo de 2021, 51 años después (17 por 3 ☺) de que Dylan recibiera su doctorado en Princeton, la *dulce melodía* de las cigarras volverá a repetirse. ¿Sabían acaso las cigarras la música de los números primos? La próxima cita será en la primavera de 2038. Tal vez para ese entonces, sepamos algo más sobre este misterio y sobre la música de los números primos. Tal vez para entonces, la hipótesis de Riemann haya sido por fin demostrada o todavía mejor, nuevos desafíos se hayan planteado en pos de su solución. En tiempos de pandemia, donde el esfuerzo colectivo y solidario pareciera ser el camino para que nuestra especie encamine virtuosamente su futuro, esta historia, como tantas otras de la ciencia, brinda evidencia de ello. La humanidad atraviesa centurias en el intento de resolver problemas con una tenacidad admirable y asombrosa. Los individuos, en cambio, con frecuencia somos alcanzados por el desánimo y la frustración ante los obstáculos que imponen las circunstancias. María Elena Walsh, cuando cantaba al sol como la cigarra, nos decía con sabiduría que *a la hora del naufragio y de la oscuridad alguien nos rescatará, para ir cantando*. No nos podemos dar el lujo de no formar parte de ese esfuerzo.

La misteriosa función zeta

La función zeta se define como una suma infinita:

$$(*) \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

donde los valores de s se toman sobre los números complejos. Cuando la parte real de s es mayor que 1, se obtiene una suma infinita convergente que define, en ese semiplano, una función *analítica*, esto es, que se puede expresar como una suma infinita de potencias y resulta ser suave ella y todas sus derivadas. Por ejemplo es conocido el valor de la función zeta para $s = 2$:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

La función zeta se puede *extender* en forma analítica (se llama *prolongación analítica*) para el semiplano complejo con parte real menor que 1. Además, ζ satisface una ecuación funcional que relaciona los valores para s con parte real menor que

1 con los de s de parte real mayor que 1:

$$(**) \quad \zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

Esta ecuación (que involucra a la función gamma, extensión del factorial en el sentido que $\Gamma(n) = (n-1)!$ cuando n es un número natural) permite ver que la función zeta se anula sobre los números enteros pares negativos (la función seno se anula cuando s es par en esta ecuación). A estos ceros se los llama *triviales* ya que se los obtiene fácilmente de la ecuación funcional. Pero además tiene otros ceros llamados *no triviales*. La hipótesis de Riemann dice que estos ceros son todos de la forma $s = \frac{1}{2} + bi$. Es decir están en una misma recta, llamada *recta crítica*. La Figura 1 (Wikipedia, s.f.) muestra el “coloreo del gráfico” de la función ζ : primero se le asigna un color a cada número complejo, y luego a cada complejo s se lo colorea con el color asignado a $\zeta(s)$. En la imagen se distinguen ciertos “nudos”:

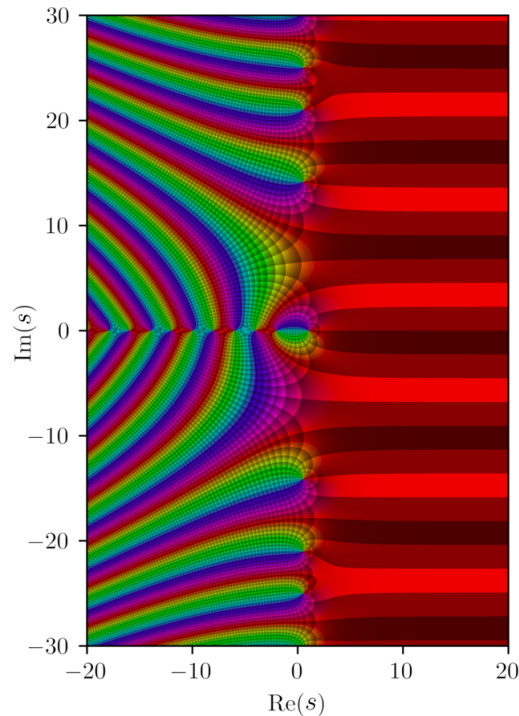


FIGURA 1. Coloreo del gráfico de la función ζ . Extraída de Wikipedia, Riemann zeta function.

sobre el eje real corresponden a los ceros triviales en los s negativos pares y a la singularidad en $s = 1$; y sobre la recta crítica correspondiente a parte real igual a $\frac{1}{2}$ los nudos corresponden a los ceros no triviales en $s = \frac{1}{2} \pm 14,14i, \frac{1}{2} \pm 21,02i, \frac{1}{2} \pm 25,01i$.

La primera conexión con los números primos la estableció Euler al mostrar que:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{-s}} \cdot \frac{1}{1-3^{-s}} \cdot \frac{1}{1-5^{-s}} \cdot \frac{1}{1-7^{-s}} \cdot \frac{1}{1-11^{-s}} \cdots = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

válida para los complejos con parte entera mayor que 1. Es fascinante seguir el razonamiento de Euler para $s = 1$ donde la función zeta es la serie armónica que sabemos que es divergente. Esto produce una nueva demostración de que hay infinitos primos o bien, sabiendo eso, que la serie armónica es divergente (Muñoz, 2011).

Para terminar, queremos destacar que a partir de la ecuación funcional (**), y sabiendo que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, se obtiene

$$\zeta(-1) = 2^{-1} \pi^{-2} \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{2}\right) \Gamma(2) \zeta(2) = -\frac{1}{12}.$$

Esta es una curiosidad interesante pues “establece la falsa igualdad”

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}} = \zeta(-1) = -\frac{1}{12}.$$

Esta “loca identidad” estaba incluida, entre otras identidades asombrosas, en la carta que Srinivasa Ramanujan (1887–1920) le enviara a Hardy pidiéndole se publicaran sus teoremas si encontraba algún valor en ellos. Tal vez el primer impulso de Hardy fue arrojar la carta de Ramanujan al fuego en ese frío enero de 1913 en el Trinity College de Cambridge. Pero cuando vio junto con J.E. Littlewood (1885–1977) la conexión que tenía con la función zeta, se convencieron de que tal vez estaban ante un genio de escala nunca imaginada por ellos (Leavitt, 2011). Al año siguiente de la llegada de esa carta, Ramanujan estaba trabajando junto a Hardy. Para él, según sus propias palabras, el descubrimiento de Ramanujan fue el aporte más importante que hizo a la matemática.

La falla en la argumentación está en que no es correcto que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}} = \zeta(-1)$ pues la fórmula (*) solamente es válida para los números complejos s con parte real mayor que 1. Hay sitios y videos en internet que discuten más en detalle esta falsa igualdad, por ejemplo (Mathologer, 2020).

Bibliografía

- Dalbey, B. (s.f.). *Billions, yes billions, of 17-year cicadas will emerge in 2021*. Descargado 2021-01-22, de <https://patch.com/us/across-america/billions-yes-billions-17-year-cicadas-will-emerge-2021>
- du Sautoy, M. (2003). *La música de los números primos*. Editorial Acantilado.
- Dylan, B. (s.f.). *Day of the locusts*. Descargado 2021-03-08, de <https://www.bobdylan.com/songs/day-locusts/>
- Leavitt, D. (2011). *El contable hindú*. Editorial Anagrama.
- Mathologer. (2020). *700 years of secrets of the sum of sums (paradoxical harmonic series)*. Descargado 2021-03-08, de <https://www.youtube.com/watch?v=vQE6-PLcGwU>
- Muñoz, J. M. S. (2011). Riemann y los números primos. Descargado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3744317>
- Wikipedia. (s.f.). *Riemann zeta function*. Descargado 2021-03-08, de https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function