Curiosidades del 2021

Todos los números tienen alguna curiosidad, aquí compartimos algunas del 2021.

El 2021 no sólo es la yuxtaposición de dos enteros consecutivos (20 y 21) sino que también es el producto de dos primos consecutivos (43 y 47) que a su vez se escriben ¡como sumas de enteros consecutivos! Es decir:

$$2021 = 43 \cdot 47 = (21 + 22) \cdot (23 + 24).$$

Además, el reverso de 2021 es 1202 y tanto la suma como el producto de 2021 con su reverso dan números capicúas (palíndromos):

$$\begin{aligned} 2021 + 1202 &= 3223, \\ 2021 \cdot 1202 &= 2429242. \end{aligned}$$

Más aún, el cuadrado del reverso es el reverso del cuadrado y tenemos

$$1202^2 + 2021^2 = 1444804 + 4084441.$$

Expresiones con los dígitos

- 2021 puede ser escrito con las operaciones elementales en forma ascendente o descendente (con los dígitos o permitiendo también el 10):

$$\begin{aligned} 2021 &= 1 + 2 \times (3^4 \times (5 + 6) + 7 \times (8 + 9)) \\ &= 12 \times (3 \times 4 + 5 + 6) \times 7 + 89 \\ &= (1 + 2 \times 3 + 45 \times 6) \times 7 + 8 \times 9 + 10\,, \\ 2021 &= (9 \times 8 + 7 + 6) \times 5 \times 4 + 321 \\ &= (-9 + 8) \times 7 - 6 \times (5 - (4 + 3)^{2+1}) \\ &= 10 + 9 + 87 + 65 + 43^2 + 1\,. \end{aligned}$$

También existen expresiones de este tipo usando factoriales o raíces cuadradas o ambas ¿te animás a encontrar una?

- 2021 puede ser escrito usando solo uno cualquiera de los dígitos:

$$\begin{aligned}
2021 &= (1+1)^{11} - (1+1+1)^{(1+1+1)} \\
&= (2 \times 22 + \tfrac{2}{2})^2 - 2 - 2) \\
&= (3 - \tfrac{3}{3})^{\frac{33}{3}} - 3^3 \\
&= 4 + (4+4) \times (4^4 - 4) + \tfrac{4}{4} \\
&= 5 + \tfrac{(5+5)^{(5-\frac{5}{5})}+55}{5} + 5 \\
&= 6 + 66 \times (6 \times 6 - 6) + 6 \times 6 - \tfrac{6}{6} \\
&= \tfrac{77+7}{7} + 7 \times (7 \times (7 \times 7 - 7) - 7) \\
&= 8 \times (8+8) \times (8+8) - 8 - 8 - \tfrac{88}{8} \\
&= (\tfrac{9+9}{9})^{\frac{99}{9}} - (9+9+9)\,.
\end{aligned}$$

- La misma representación usando un único dígito a:

$$2021 = \frac{(aaaaa - a) \times (a + a) + a \times aa}{a \times aa}$$

  para cualquier $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

- Usando los mismos dígitos en bases y potencias:

$$\begin{aligned}
2021 &= -1^6 + 2^1 + 3^7 - 6^3 + 7^2 \\
&= 1^8 - 3^5 + 4^9 + 5^6 - 6^7 + 7^3 + 8^4 - 9^1\,,
\end{aligned}$$

  y usando además dígitos consecutivos:

$$\begin{aligned}
2021 &= -1^3 - 2^5 + 3^6 + 4^1 + 5^2 + 6^4 \\
&= 0^4 + 1^7 + 2^8 - 3^9 + 4^6 + 5^2 + 6^1 + 7^5 + 8^3 + 9^0\,.
\end{aligned}$$

Números primos

- Si consideramos los primos menores que 100 y formamos todos los pares de primos consecutivos (dominós):

$$(2,3), \quad (3,5), \quad (5,7), \ldots, \quad (83,89), \quad (89,97)$$

  entonces la suma de todos estos pares da 2021. Es decir

$$2021 = 2 + 2(3 + 5 + 7 + \cdots + 83 + 89) + 97.$$

- 2021 es la suma de 33 más los primeros 33 números primos:

$$2021 = 33 + p_1 + p_2 + \cdots + p_{33} = 33 + (2 + 3 + 5 + \cdots + 127 + 131 + 137).$$

Cuadrados, cubos y otras potencias

- 2021 como suma de 3 cuadrados. Hay 17 formas, y usando al menos un primo tenemos:

$$\begin{aligned}2021 &= 2^2 + 9^2 + 44^2 \\ &= 4^2 + 18^2 + 41^2 \\ &= 6^2 + 7^2 + 44^2 \\ &= 6^2 + 31^2 + 32^2 \\ &= 7^2 + 26^2 + 36^2 \\ &= 12^2 + 14^2 + 41^2 \\ &= 14^2 + 23^2 + 36^2 \\ &= 17^2 + 24^2 + 34^2 \\ &= 22^2 + 24^2 + 31^2 \,.\end{aligned}$$

  ¿Te animás a encontrar las 8 que faltan?

- 2021 como suma de 4 cuadrados:

$$2021 = 2^2 + 21^2 + 26^2 + 30^2 \,.$$

- 2021 como suma de cubos o potencias cuartas:

$$\begin{aligned}2021 &= 11^3 + 7^3 + 7^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 \\ &= 6^4 + 5^4 + 3^4 + 2^4 + 1^4 + 1^4 + 1^4 \,.\end{aligned}$$

- 2021 como suma de potencias y sumas con los mismos dígitos:

$$\begin{aligned}2021 &= 1^8 + 44^2 + 73^0 + 83^1 = 18 + 442 + 730 + 831 \\ &= 2^8 + 41^2 + 75^0 + 83^1 = 28 + 412 + 750 + 831 \\ &= -5^1 + 45^2 + 162^0 = -51 + 452 + 1620 \,.\end{aligned}$$

Ternas pitagóricas

- 2020 satisface las siguientes ternas pitagóricas:

$$\begin{aligned}2021^2 + 180^2 &= 2029^2 \\ 2021^2 + 43428^2 &= 43475^2 \\ 2021^2 + 47472^2 &= 47515^2 \\ 2021^2 + 2042220^2 &= 2042221^2 \,.\end{aligned}$$

Cuadrados mágicos

Un cuadrado mágico de tamaño n es un arreglo de $n \times n$ donde se colocan los números $1, 2, \ldots, n^2$, de modo tal que todas las filas y columnas y las 2 diagonales principales tienen la misma suma. Damos 3 cuadrados mágicos 7×7 donde las filas, columnas y diagonales principales son números primos palindrómicos.

$$\begin{array}{ccccccc} 1&3&1&1&1&3&1\\ 3&2&9&1&9&2&3\\ 1&9&5&2&5&9&1\\ 1&1&2&0&2&1&1\\ 1&9&5&2&5&9&1\\ 3&2&9&1&9&2&3\\ 1&3&1&1&1&3&1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} 1&3&7&1&7&3&1\\ 3&3&3&1&3&3&3\\ 7&3&6&2&6&3&7\\ 1&1&2&0&2&1&1\\ 7&3&6&2&6&3&7\\ 3&3&3&1&3&3&3\\ 1&3&7&1&7&3&1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} 7&1&7&7&7&1&7\\ 1&1&2&0&2&1&1\\ 7&2&2&6&2&2&7\\ 7&0&6&9&6&0&7\\ 7&2&2&6&2&2&7\\ 1&1&2&0&2&1&1\\ 7&1&7&7&7&1&7 \end{array}$$