¿Sabías que...

por Leandro Cagliero y Ricardo Podestá

hay una prueba muy bonita del Teorema del Coseno utilizando áreas?

Comenzamos recordando el Teorema de Pitágoras, que dice que en todo triángulo rectángulo de hipotenusa c y catetos a y b se tiene que

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

El "Teorema del Coseno" es una generalización de éste a cualquier triángulo de lados a, b y c y asegura que

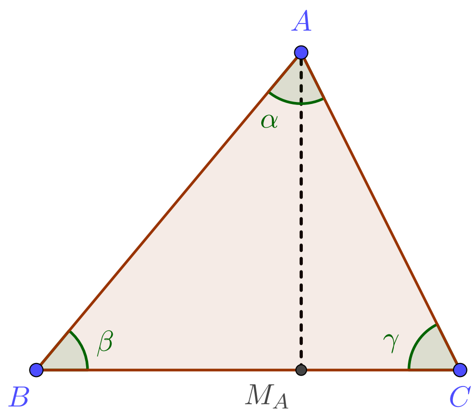
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

donde γ es el ángulo opuesto a c. Observar que si γ es recto, $\cos(\gamma) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ y se recupera el Teorema de Pitágoras. En la figura de abajo, si el punto C se acerca al M_A, el triángulo tiende a ser rectángulo y el coseno de γ tiende a 0.

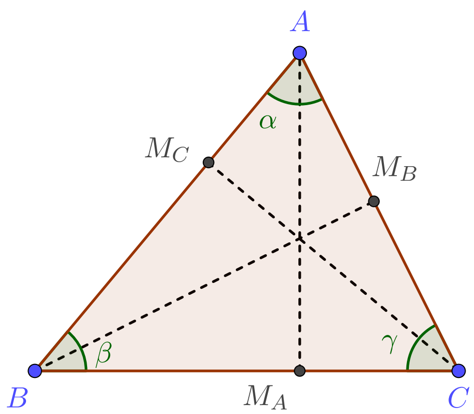
Consideremos un triángulo acutángulo $\triangle ABC$ y tracemos la altura $h_A = \overline{AM_A}$ correspondiente a la base $\overline{BC}$. Si llamamos α, β y γ a los ángulos interiores al triángulo correspondientes a los vértices A, B y C respectivamente, obtenemos (usando que "coseno es cateto adyacente sobre hipotenusa")

$$\cos(\beta) = \frac{\overline{BM_A}}{\overline{BA}},$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\overline{CM_A}}{\overline{CA}}.$$



De igual modo, si trazamos las otras dos alturas $h_B = \overline{BM_B}$ y $h_C = \overline{CM_C}$ obtenemos las siguientes igualdades.



Considerando la altura h_B:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{AM_B}}{\overline{AB}},$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\overline{CM_B}}{\overline{CB}};$$

y considerando la altura h_C:

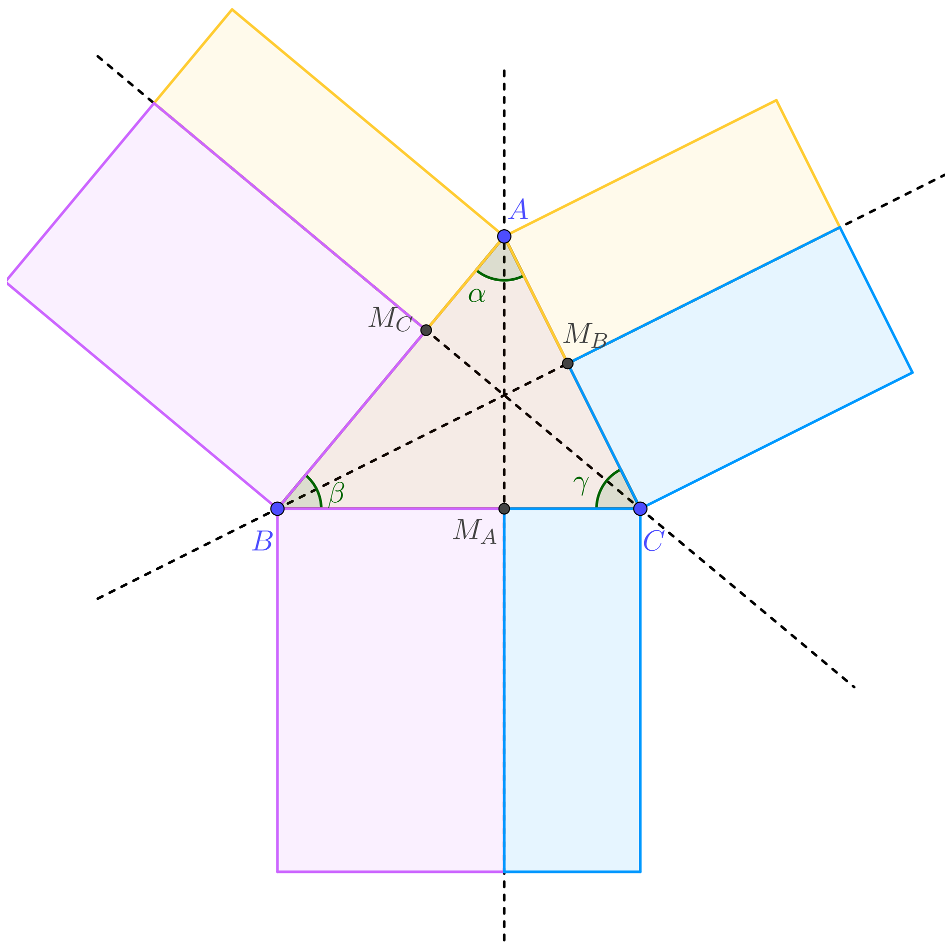
$$\cos(\beta) = \frac{\overline{BM_C}}{\overline{BC}},$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{AM_C}}{\overline{AC}}.$$

Con estas notaciones, el teorema que queremos probar se lee

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos(\alpha).$$

Ahora, tal como suele hacerse en las clásicas demostraciones del Teorema de Pitágoras, dibujamos cuadrados exteriores sobre los lados del triángulo.



Resulta que los rectángulos del mismo color ¡tienen la misma área! Por ejemplo, el área del rectángulo amarillo de lado $\overline{AM_C}$ es

$$\overline{AB} \times \overline{AM_C} = \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos(\alpha)$$

mientras que el área del rectángulo amarillo de lado $\overline{AM_B}$ es

$$\overline{AC} \times \overline{AM_B} = \overline{AC} \times \overline{AB} \times \cos(\alpha).$$

Llamaremos $\mathcal{A}(R_a)$ a esta área. De manera análoga se ve que los rectángulos violetas tienen igual área $\mathcal{A}(R_v)$ y que los rectángulos celestes también tienen igual área $\mathcal{A}(R_c)$.

Ya estamos listos para la demostración del Teorema del Coseno, la cual sale comparando áreas de rectángulos. Tenemos:

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= \mathcal{A}(R_v) + \mathcal{A}(R_c)\\ &= \left(\overline{AB}^2 - \mathcal{A}(R_a)\right) + \left(\overline{AC}^2 - \mathcal{A}(R_a)\right)\\ &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\times \mathcal{A}(R_a)\\ &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\times\ \overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos(\alpha).\end{aligned}$$

La demostración que hicimos fue realizada sobre un triángulo acutángulo, dejamos a cargo del lector hacer las modificaciones necesarias para obtener una demostración análoga para triángulos obtusángulos.

Los griegos no usaban explícitamente senos y cosenos. Sin embargo, un resultado similar al Teorema del Coseno se encuentra en la Proposición 12 de los Elementos de Euclides. En el siglo XV, el matemático y astrónomo persa Jamshīd al-Kāshī (ca. 1380 – 22/6/1429), dió la primer versión explícita del teorema en una forma más trigonométrica. El teorema fue popularizado en occidente por el matemático francés François Viète (1540 – 23/2/1603) en el siglo XVI. En Francia aún suele referirse al Teorema del Coseno como el Teorema de al-Kāshī. A comienzos del siglo XIX el teorema tomó su forma actual.