Revista de Educación Matemática
Volumen 35, N°2 (2020), páginas 51–69
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Artículo de Matemática

RECORTANDO POLÍGONOS, DE LAS TIJERAS A LA GENERALIZACIÓN

Luis Agustín Cárdenas Pena

Resumen. En este artículo se ilustra que un problema surgido en el Certamen *"El Número de Oro"* puede impulsar el entusiasmo matemático y llevar de forma natural a generalizaciones. Se investiga el problema, lo cual culmina redescubriendo un teorema de cierta generalidad con un atractivo estético, siempre manteniendo el tratamiento geométrico elemental.

Abstract. This article illustrates how a problem posed in the contest *"El Número de Oro"* might impulse mathematical enthusiasm and induce addressing a more general question in a natural way. Studying the problem culminates on the rediscover of a general theorem with an aesthetically appealing, always keeping the geometric treatment elementary.

§1. De lo particular a lo general, el sendero dado por la curiosidad

La materia prima para estudiar matemáticas es la curiosidad, puesto que esta guía el descubrimiento. En este pequeño artículo queremos ejemplificar cómo una semilla de curiosidad en forma de problema, en este caso un desafío del Certamen *"El Número de Oro"*, motiva la deducción de proposiciones más generales. Tras resolver un problema particular muchas veces las incógnitas que surgen son ¿qué tan general fue el método? ¿qué tiene y qué falta para poder atacar un abanico más amplio de problemas? La enseñanza de matemáticas, tradicionalmente, pide respuestas. Pero creemos que tan importante como las respuestas, son las preguntas. Hacerse preguntas y cultivar la curiosidad es una parte fundamental del proceso de aprendizaje matemático. Las preguntas adecuadas son más iluminadoras que hallar respuestas a preguntas no tan adecuadas, y juegan un rol fundamental

Palabras claves: Disecciones, polígonos, número áureo, Wallace–Bolyai–Gerwien.
Keywords: Dissections, polygons, golden-ratio, Wallace–Bolyai–Gerwien.

en la creación de teorías. Finalmente, al examinar las respuestas halladas se pueden plantear nuevas preguntas, formándose así el círculo virtuoso que estimula la actividad matemática desde sus mismos orígenes.

1.1. La Olimpíada Matemática Argentina. La matemática es una disciplina que solo se entiende a través de su práctica, y la forma más pura de practicar matemáticas es resolver problemas matemáticos. Con el fin de aumentar la presencia de ésta en la sociedad se creó la Fundación Olimpíada Matemática Argentina, una entidad que organiza distintas competencias de matemática a través del país. Entre estas competencias, están la Olimpíada Matemática Ñandú, orientada a alumnos de educación primaria, la Olimpíada Matemática Argentina para alumnos de educación secundaria, y el certamen *"El Número de Oro"* el cual realiza dos competencias paralelas, una orientada a alumnos de educación universitaria de carreras relacionadas con la matemática, y la otra orientada a profesores de educación secundaria.

Estas competencias tienen una o más instancias en las cuales a cada participante se le da una lista de problemas y se evalúa el mérito de las soluciones para decidir quiénes pasan a la siguiente instancia, o en caso de ser la última, quiénes integran el podio y quiénes adquieren las menciones de honor.

Los problemas de estas competencias tienen como objetivo difundir matemáticas e intentan ser plurales no requiriendo conocimiento demasiado técnico. Lo que sí se requiere, es mucho entusiasmo y ganas de resolver, emplear pensamiento creativo y, como toda competencia, mucha práctica y entrenamiento.

Podemos comparar *"El Número de Oro"* con la Competencia Interuniversitaria Matemática Argentina (CIMA). La primera está organizada por la Fundación OMA y la segunda por la Unión Matemática Argentina. Ambas están dirigidas a alumnos universitarios de carreras afines a la matemática, la segunda más específicamente a alumnos de licenciatura en matemática, aunque no en forma excluyente. Ambas requieren pensamiento creativo, y en la CIMA más conocimiento del cuerpo teórico matemático. Cada año *"El Número de Oro"* es de una única instancia, donde se presentan diez problemas, de los cuales cada participante debe elegir tres para resolver.

1.2. Un problema particular. El siguiente problema fue el número 10 del Certamen "Número de Oro" para estudiantes del año 2016.

Problema 1.2.1. *Sea ABCD un cuadrado de lado $1+\varphi$, siendo $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ el Número de Oro (también conocido como número áureo). Dividir el cuadrado en piezas que reacomodadas permitan obtener un rectángulo tal que uno de sus lados mida φ.*

Intentemos resolver el problema. Primero podemos cortar el cuadrado en un rectángulo de $\varphi \times (\varphi+1)$, y un segundo rectángulo de $1 \times (\varphi+1)$. Luego, para continuar podemos recortar el segundo rectángulo en un rectángulo de $1 \times \varphi$ y un cuadrado de 1×1. Luego se pueden pegar los rectángulos como indica la Figura 1.

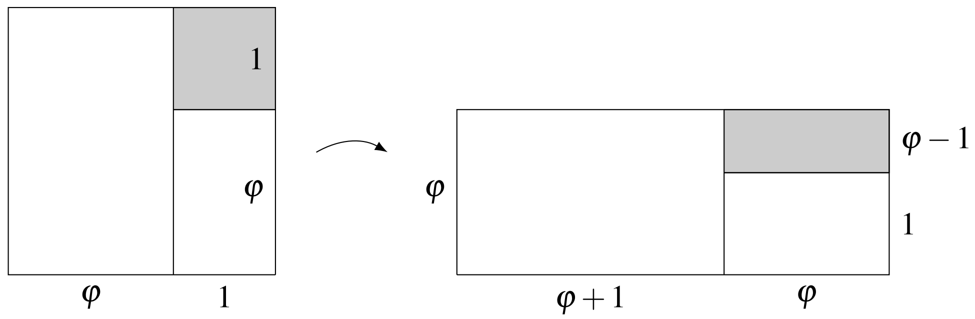


FIGURA 1. Primer paso.

El área gris del cuadrado indica el cuadradito que nos sobra para ensamblar, y el área gris del rectángulo indica el rectangulito el cual nos falta llenar.

Ahora, podemos partir el cuadrado de 1×1 en un rectangulito de $1 \times (\varphi - 1)$ y otro de $1 \times (2 - \varphi)$ (ya que $2 - \varphi + \varphi - 1 = 1$), luego se recorta el rectangulito de $1 \times (2 - \varphi)$ en un cuadradito de lado $2 - \varphi$ y un rectangulito de $(2 - \varphi) \times (\varphi - 1)$. Indicamos este segundo paso en la Figura 2.

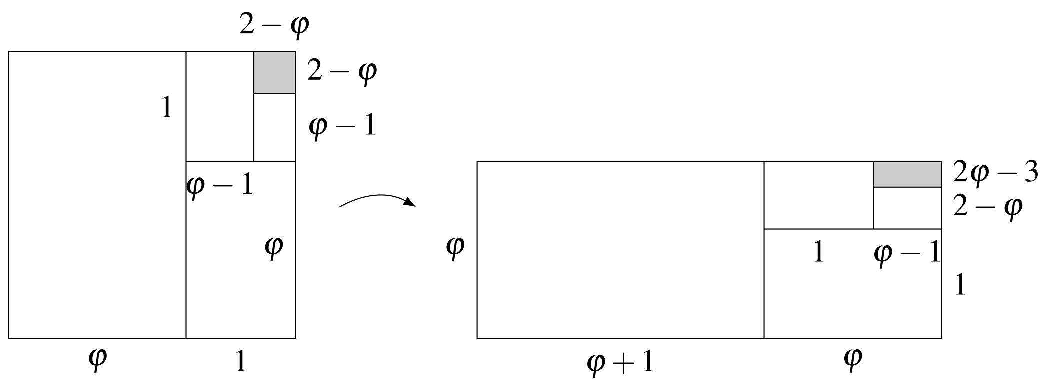


FIGURA 2. Segundo paso.

Podríamos llevar a cabo un tercer paso, pero esto está empezando a lucir mal, al parecer estamos repitiendo el mismo paso, de forma tal que estamos logrando reducir el problema en tamaño sin reducirlo en dificultad. Si pudiésemos partir el cuadrado en infinitas piezas, este proceso serviría, pero no es lo que nos pide el enunciado del problema.

Si retrocedemos al primer paso, el problema radica en que convertir un cuadrado de 1×1 a un rectángulo de $\varphi \times \varphi - 1$ es equivalente al problema original ya que $\frac{\varphi}{\varphi+1} = \varphi^{-1}$ y $\frac{1}{\varphi+1} = \varphi - 1$ como podemos verificar a continuación:

$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \varphi + 1$$

y de forma similar

$$\varphi^{-1} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi - 1.$$

Como en el fondo se trata de un problema de proporciones, resolver el problema con el cuadrado pequeño es exactamente igual de difícil que con el cuadrado original. En vista de esto, tendremos que ser un poco más metódicos con el fin de resolver este problema.

1.3. Un primer ataque al problema inspirado en una demostración geométrica del teorema de Pitágoras. Como ya vimos en la discusión anterior, éste realmente se trata de un problema de proporciones. Así que para facilitar los cálculos, vamos a resolverlo partiendo de un cuadrado de lado 1, en cuyo caso el problema correspondiente es hallar un rectángulo de dimensiones $\varphi^{-1} \times \varphi$, donde el φ que buscábamos originalmente se corresponde con el lado de longitud φ^{-1}, y el lado de longitud $\frac{(\varphi+1)^2}{\varphi}$ con el de longitud φ.

Marcando un punto a distancia a de cada vértice respetando orientación, y luego uniéndolos, se corta el cuadrado original en cinco piezas; un cuadrado de lado $\sqrt{(1-a)^2+a^2}$, y cuatro triángulos con hipotenusa $\sqrt{(1-a)^2+a^2}$ y catetos $1-a$ y a, como se ve en la Figura 3.

La función $\sqrt{(1-x)^2+x^2}$ siempre es menor que 1 debido a que si x está en el intervalo $(0,1)$ se tiene que x es positivo y $1-x$ es negativo, por lo que

$$(1-x)^2+x^2 = 1-2x+2x^2 = 1-2x(1-x)$$

es menor o igual que 1. Por ende los puntos $x=0$ y $x=1$ son máximos ya que la función vale 1 en estos puntos. El único punto en el que la derivada de la función es 0 es $x=1/2$, luego este ha de ser un mínimo puesto que se encuentra ubicado entre dos máximos. La función evaluada en este mínimo vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Como la función es continua en $[0,1]$ y vale 1 en los extremos de dicho intervalo, su imagen es $[\frac{\sqrt{2}}{2},1]$. Dicho mínimo puede calcularse por medios más elementales siendo que $\sqrt{x}$ es una función creciente, y calculando el vértice de la parábola. Este proceso puede observarse en la Figura 3.

Podemos cortar dos de estos triángulos, para así poder formar rectángulos con un lado de longitud h, por lo que con los cuatro triángulos obtenemos dos rectángulos. Describimos el proceso más detalladamente y apoyándonos en la Figura 4: Tomamos un par de triángulos, y cortamos el primer triángulo por la perpendicular a su lado más largo que pasa por el vértice opuesto a ésta, indicada en rojo. Luego pegamos el triangulito cuya hipotenusa esta marcada en azul con el cateto en azul del segundo triángulo, y el triangulito cuya hipotenusa está marcada en verde con el cateto marcado en verde del segundo triángulo. Resultando así un

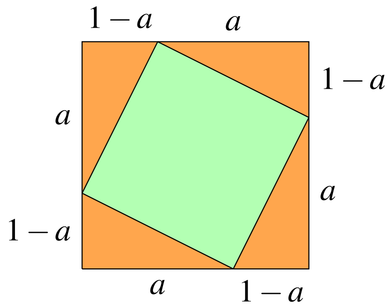


FIGURA 3. Corte Pitágoras

rectángulo con un lado de la misma longitud que la hipotenusa de los triángulos, es decir, de $\sqrt{(1-a)^2+a^2}$.

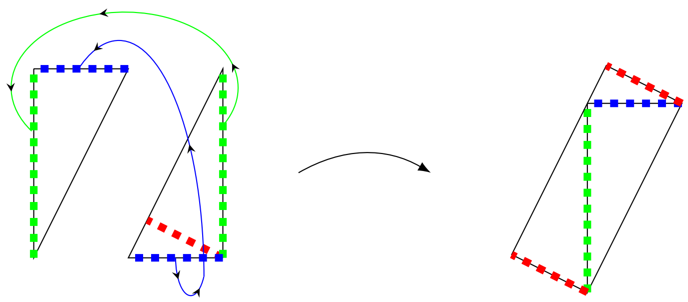


FIGURA 4. De dos triángulos a un rectángulo

A continuación se ensamblan los dos rectangulitos y el cuadrado para obtener el rectángulo de las dimensiones buscadas. Nuestro rectángulo queda como en la Figura 5

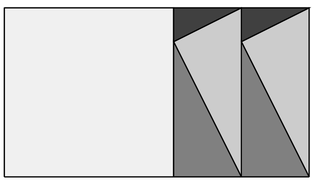


FIGURA 5. Rectángulo ensamblado.

Dado que la hipotenusa del triángulo se convierte en el lado de nuestro rectángulo, se tiene $\ell = h = \sqrt{(1-a)^2+a^2}$, luego $\ell \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ para todo $a \in (0,1)$. Este método solo sirve para los casos en los que ℓ esta contenido en tal intervalo, no nos sirve para nuestro problema ya que re-escalando el cuadrado de lado $\varphi + 1$ a uno de lado 1, obtener un rectángulo de lado φ se corresponde con obtener un lado de longitud

$$0{,}618 \approx \frac{\varphi}{\varphi+1} < \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707,$$

por lo que la longitud de nuestro problema no está en el intervalo y no podemos generarla con este método. Sin embargo esta idea nos servirá en un contexto más general. En el resto del artículo llamaremos "corte Pitágoras" a la descomposición del cuadrado original en un cuadrado y cuatro triángulos rectángulos según la Figura 3.

Como siguiente paso, analizamos las dimensiones de nuestro cuadrado y el rectángulo objetivo en busca de pistas, por lo que volveremos a pensar en un cuadrado de lado ϕ.

Tenemos un cuadrado de $\varphi + 1$ de lado y queremos partirlo en piezas de modo que reacomodadas formen un rectángulo con uno de los lados igual a φ.

A continuación calculamos el otro lado del rectángulo deseado. Cuando se recortan y reacomodan piezas sin superponerlas el área se conserva, tenemos que el otro lado es igual a $\frac{(\varphi+1)^2}{\varphi}$. Considerando que $\varphi^2 = \varphi + 1$, obtenemos

$$(\varphi + 1)^2 = \varphi^4 = \varphi^3 \cdot \varphi. \tag{1.1}$$

Por lo que si queremos que un lado del rectángulo mida φ el otro ha de medir $\varphi^3 = 2 + \sqrt{5}$.

Queremos hallar un rectángulo de dimensiones $(2 + \sqrt{5}) \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})$.

Busquemos los cuatro rectángulos correspondientes al desarrollo de tal producto. Es decir, un rectángulo A de $2 \times \frac{1}{2}$, un rectángulo B de $\sqrt{5} \times \frac{1}{2}$, un rectángulo C de $2 \times \frac{\sqrt{5}}{2}$ y un rectángulo D de $\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{2}$. Esta división se puede ilustrar en la Figura 6.

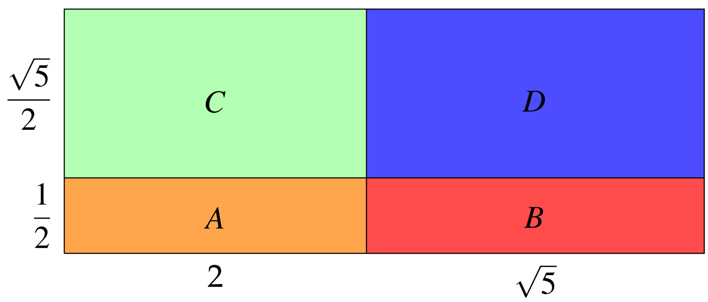


Figura 6. El rectángulo al cual queremos llegar.

Podemos dividir nuestro cuadrado de partida, de lado $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, de la siguiente forma: lo cortamos a $\frac{3}{2}$ de cada lado en las dos direcciones paralelas a sus lados. Con lo cual nos quedan cuatro trozos, un cuadrado E de $\frac{3}{2}$ de lado, dos rectángulos congruentes F y G de dimensiones $\frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{3}{2}$ y $\frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2}$ respectivamente y un cuadrado H de $\frac{\sqrt{5}}{2}$ de lado. Se ilustra en la Figura 7.

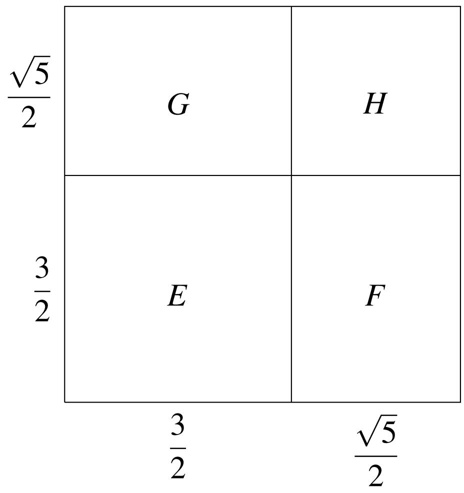
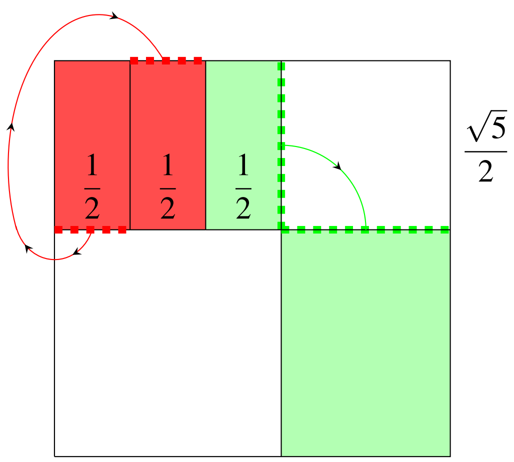


FIGURA 7. Rectángulo de partida.

Usando F y un tercio de G podemos obtener fácilmente el rectángulo C. El resto de G es un rectángulo de $1 \times \frac{\sqrt{5}}{2}$ el cual partido a la mitad y reacomodado nos sirve para formar el rectángulo B.

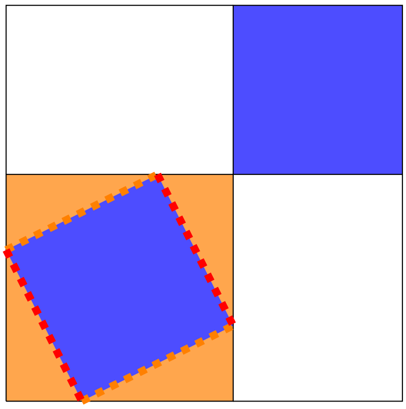


Las líneas punteadas del mismo color corresponden a los lados sobre los cuales se pegan los polígonos para obtener el rectángulo B en rojo y el rectángulo C en azul.

FIGURA 8. Corte sobre los dos rectángulos obtenidos del cuadrado original.

Del cuadrado H obtenemos la mitad del rectángulo D. Falta la otra mitad, otro cuadrado de $\frac{\sqrt{5}}{2}$ de lado. Lo obtendremos del cuadrado E.

Al cuadrado E le hacemos 4 cortes, dividiéndolo en 5 piezas empleando el primer paso del método del corte Pitágoras. Marcando sus lados en los tercios, obtenemos un cuadriculado, luego partimos del tercio de cada lado a los dos tercios del lado siguiente, en sentido horario (o antihorario). Como le sustrajimos cuatro triángulos rectángulos de lados $\frac{1}{2}$ y 1, cuyas hipotenusas son $\frac{\sqrt{5}}{2}$, nos queda un cuadrado de lado $\frac{\sqrt{5}}{2}$ en el centro con lo que completamos D. Los cuatro triángulos que tenemos son de lados 1 y $\frac{1}{2}$ por lo cual es fácil reacomodarlos para obtener nuestro rectángulo de 2×1. El proceso se ilustra en las figuras 9 y 10.



Los triángulos naranjas se unen de a pares mediante los pares de líneas naranjas/rojos respectivamente, es decir se unen los pares de triángulos opuestos. Los cuadrados azules se unen en los bordes.

FIGURA 9. Corte sobre los dos cuadrados obtenidos del cuadrado original.

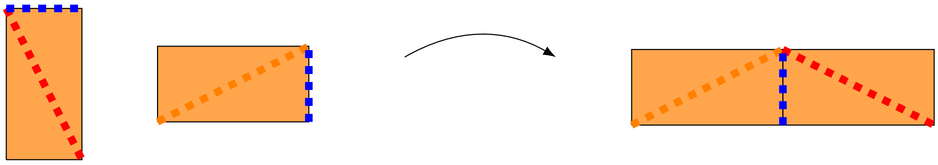


FIGURA 10. Unión de los dos rectángulos naranjas en un rectángulo de dimensiones 2×1.

Pintamos los polígonos E, F, G y H con los colores rojo, azul, verde y naranja, respectivamente. Luego, cuando ensamblamos el rectángulo objetivo, el resultado luce como se ve en la Figura 11.

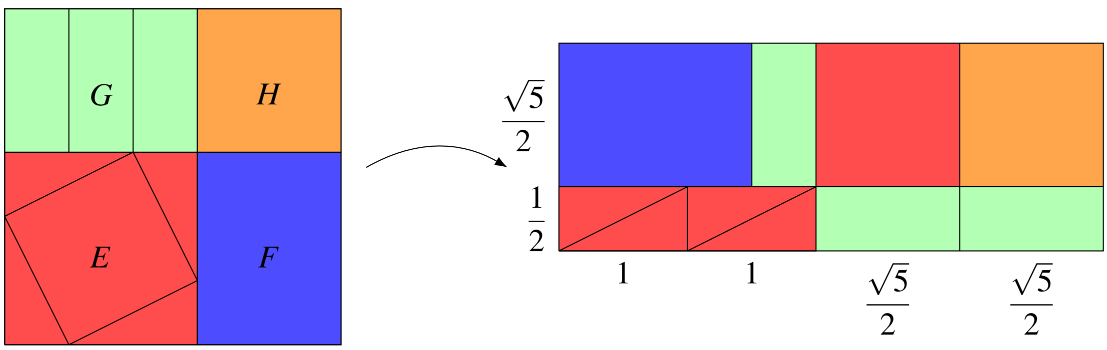


FIGURA 11. Solución propuesta al problema planteado.

De esta manera hemos resuelto el problema original del certamen, y además ilustramos una idea a la cual aún no le sacamos mucho provecho, el método del corte Pitágoras el cual nos permite transformar o 'estirar' hasta cierto punto un cuadrado en un rectángulo. Para la generalización necesitaremos el concepto de figuras equidescomponibles.

1.4. Una primera generalización. El método del corte Pitágoras no bastó para solucionar el problema original puesto que utilizamos también piezas rectangulares para exhibir la solución. Para esto nos apoyamos fuertemente en la expresión algebraica de φ, y no se ve una clara generalización de este método ni siquiera para números muy cercanos a φ. ¿Qué pasaría con un número trascendente?[1]

Claramente, para generalizar el problema de transformar un cuadrado en un rectángulo de la misma área pero con un lado arbitrario a, hay que buscar una forma más sistemática, la cual no haga uso de la expresión algebraica de las proporciones. Con fin de facilitar tal empresa, introducimos la siguiente definición.

Definición 1.4.1 (Polígonos equidescomponibles)**.** Dos polígonos A y B se dicen *equidescomponibles*, si A se puede cortar, con cortes rectos y en finitas piezas, y luego reacomodarlas de forma tal que formen B, sin que en este proceso ninguna de las piezas formadas se superponga.

La relación dada por "P y Q son equidescomponibles" es una relación de equivalencia, es decir:

- La relación es reflexiva, ya que todo polígono es sí mismo con 0 cortes (y si esto no convence al lector, basta con cortar a un polígono en dos trozos y volverlos a unir de la misma forma en la que se los recortó para recuperar el polígono).
- La relación es simétrica. Si de P se puede armar Q, entonces de Q se puede armar P. Basta con recortar P, armar Q a partir de éste, y revertir el proceso (por donde se pegaron las piezas de P, se lo corta a Q, y luego por donde se cortaron las piezas de Q se lo pega a P).
- La relación es transitiva. Si de P se puede armar Q, y de Q se puede armar R, entonces de P se puede armar R. Basta con armar Q desde P, y luego cortarlo nuevamente para armar R. Las piezas de Q estaban formadas por piezas de P, por lo que cuando con piezas de Q armemos R, estaremos armando R con piezas de P.

El método del corte Pitágoras fue, en cierto sentido, un método local. Ya que nos da soluciones para el intervalo $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$.

[1]Un número trascendente es un número el cual no es raíz de ningún polinomio con coeficientes enteros. Esto implica, entre otras cosas, que el número no puede expresarse mediante sumas, productos y raíces a partir de los números racionales. Debido a que estos son difíciles de escribir, el lector puede estar familiarizado con pocos de estos números. Dos ejemplos famosos son e y π, pero también sucede con los logaritmos naturales de los números enteros mayores que 2.

Un método "global"[2] pero impreciso, podría ser partir un rectángulo de dimensiones $a \times b$ en dos rectángulos de dimensiones $a \times \frac{b}{2}$ y unirlos de forma tal que el rectángulo resultante tenga dimensiones $2a \times \frac{b}{2}$. Iterando ese proceso, de un cuadrado de 1×1 podemos obtener rectángulos de dimensiones $\frac{1}{2^n} \times 2^n$. Deseamos combinar este método global aproximado. Si aplicamos el método del corte Pitágoras y luego aplicamos el proceso de partir a la mitad n veces, entonces llegamos a un rectángulo de dimensiones

$$\frac{a}{2^n} \times \frac{2^n}{a},$$

con $a \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$. Por ende este método solo nos sirve para hallar rectángulos con un lado ℓ en el conjunto

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right] \tag{1.1}$$

Es así que, si deseamos generalizar el problema a un ℓ cualquiera en $(0, 1]$, hace falta refinar el método global, o refinar el método local. Elegiremos refinar el método global (cualquiera de las dos cosas es posible, solo ilustramos un posible camino de deducción).

Lema 1.4.1. *Dado un cuadrado de lado* 1 *y un rectángulo de lados* ℓ *y* $\frac{1}{\ell}$*, estos son equidescomponibles.*

Discusión de ideas.

Para orientarnos en el problema, como primer paso, podemos notar que el rectángulo ha de tener área 1 y lados ℓ y $\frac{1}{\ell}$, por lo que con solucionar el problema para $\ell < 1$ éste ya estará resuelto para $\ell > 1$ ya que en ese caso $\frac{1}{\ell} < 1$. El caso $\ell = 1$ es altamente trivial (nos quedamos con el cuadrado original).

Caso $\ell \in (0, 1)$. La idea que usaremos para completar al método Pitágoras, es la de realizar $n - 1$ cortes equidistantes horizontales y $n - 1$ cortes equidistantes verticales al cuadrado original, de forma tal que nos queden n^2 cuadraditos de dimensiones $\frac{1}{n} \times \frac{1}{n}$. Luego reacomodar estos n^2 cuadraditos en k filas y m columnas para formar un rectángulo cuyas dimensiones sean $\frac{m}{n} \times \frac{k}{n}$. Como la cantidad total de cuadraditos se mantiene invariante, para esto necesitamos que se cumpla la igualdad $n^2 = k \cdot m$.

Por simplicidad buscamos un n pequeño para el cual esto suceda, se tiene que si k y m tienen un factor primo en común p, entonces existen naturales k', m' tales que $k = p \cdot k'$ y $m = p \cdot m'$, por lo que $n^2 = k' \cdot m' p^2$, luego $p|n$ por lo que existe n' tal

[2] Global en el sentido de que nos permite acercarnos a cualquier número del intervalo achicando el error relativo debajo de cierta cota, pero no nos permite terminar de acercarnos al número una vez que estemos en dicho entorno.

que $n = p \cdot n'$ y $(n')^2 = k' \cdot m'$. Por ende, para hallar los números lo más pequeños posibles los buscamos coprimos, es decir, sin factores primos en común.

En vistas de esto, veamos que si $n^2 = k \cdot m$ se tiene que tanto k como m han de ser cuadrados de algún número natural. Sea p un número primo que cumpla $p \mid k$ es decir existe k' natural tal que $k = p \cdot k'$. Como $n^2 = k \cdot m$ se tiene que $p \mid n^2$ por ser p número primo. Luego, como $p \mid n^2 = n \cdot n$, se tiene que $p \mid n$. Luego $n = p \cdot n'$ y por ende $p^2 \cdot (n')^2 = p \cdot k' \cdot m$, tras dividir por p obtenemos $p \cdot (n')^2 = k' \cdot m$. Luego, como p es primo o bien $p \mid k'$ o bien $p \mid m$. Si $p \mid m$ contradecimos que k y m no sean coprimos, ha de ser $p \mid k'$, es decir $k' = p \cdot k''$ para algún k'' número natural. Por lo tanto $k = p^2 \cdot k''$ por lo que $p^2 \mid k$. Con esto demostramos que todos los factores primos de k aparecen elevados al cuadrado, lo cual implica que k es un cuadrado.

Nuestra estrategia tiene como segundo paso, convertir cada uno de estos $k \cdot m$ cuadraditos en rectángulos deformándolos por un factor $c \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ como se ilustra en el método de Pitágoras. Luego estos $k \cdot m$ rectangulitos formarán un rectángulo de lados

$$\frac{k}{n} \cdot c \times \frac{m}{nc} \qquad \text{o} \qquad \frac{k}{nc} \times \frac{m}{n} \cdot c$$

según en qué dirección se realice. Por ende, si para cualquier $\ell \in (0,1)$ logramos hallar una terna (n,k,m) tal que $n^2 = k \cdot m$ y $\ell = \frac{k}{n}c$ habremos complementado el método de Pitágoras para poder lidiar con un ℓ cualquiera.

Si tuviésemos $\ell = \frac{3}{5}$ podríamos usar $n = 6, k = 4, m = 9$, dado que tomando $c = \frac{9}{10}$ obtendríamos un rectángulo de dimensiones $(\frac{4}{6} \cdot \frac{9}{10}) \times (\frac{9}{6} \cdot \frac{10}{9}) = \frac{3}{5} \times \frac{5}{3}$.

Pero si $\ell = \frac{7}{10}$ entonces con la misma elección de n, k y m tendríamos que no podemos reacomodarlo de forma completamente análoga ya que no existe $c \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ tal que $\frac{7}{10} = \frac{4}{6}c$. Por ende, necesitamos mostrar que existe una forma sistemática de hallar n, k, m.

Si hallamos números n, m, k tales que $n^2 = m \cdot k$, con el método ya ilustrado podemos resolver el problema para todo $\ell \in [\frac{k}{m}\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{k}{n}]$. Por ende, una posible solución es hallar una familia de ternas tales que para todo $\ell \in (0,1)$ existan números n, m, k en tal familia tales que $\ell \in [\frac{k}{m}\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{k}{n}]$.

Para simplificar tal trabajo, hallaremos números s, t, u tales que $s^2 = t \cdot u$ de forma tal que nuestra familia de ternas sea el conjunto $\{(s^i, t^i, u^i) : i \in \mathbb{N}\}$, es decir el conjunto formado por las ternas correspondientes a las i-ésimas potencias de s, t y u. Como $s^2 = t \cdot u$ implica que $(s^i)^2 = (s^2) = (t \cdot u)^i = t^i \cdot u^i$, la relación entre s, t y u sigue cumpliéndose para s^i, t^i y u^i.

Como si $t < s$ se tiene que $\frac{t^i}{s^i}$ puede estar tan cerca del cero como queramos, entonces nuestro método sirve para números arbitrariamente cercanos al 0, ya que cubrimos los intervalos

$$\bigcup_{i=0}^{\infty}\Big[\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t^i}{s^i},\frac{t^i}{s^i}\Big] \tag{1.2}$$

Pero esto podría no bastar ya que estos intervalos podrían contener huecos en el medio, por ejemplo, un ℓ muy grande para estar en el segundo intervalo y muy pequeño para estar en el primero, es decir $\ell \in (\frac{t}{s}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Ya presentadas las ideas, el procedimiento entero luce como sigue.

Demostración.

Emplearemos intervalos que se solapen, para esto basta con que $\frac{t}{s} > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Como también necesitamos que t, u sean cuadrados podemos elegir a $s = 6^2 = 36$ y $t = 7^2 = 49$ los cuales cumplen con esto.

Sea $\ell \in (0,1)$. Existe un número natural $m \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{6^2}{7^2})^m = (\frac{36}{49})^m < \ell$, ya que como $0 < \frac{36}{49} < 1$, $(\frac{36}{49})^m$ se puede hacer tan chico como se quiera elevándolo a un número lo suficientemente grande (en el lenguaje del cálculo infinitesimal, se dice que la sucesión $(\frac{36}{49})^m$ converge a 0 conforme m tiende a infinito). Además, existe un primer número natural que cumple esto (pues el conjunto de los números naturales es bien ordenado). Luego, existe un m natural para el cual

$$(\tfrac{36}{49})^m < \ell < (\tfrac{36}{49})^{m-1}$$

Llamamos $n = m-1$ para facilitar la notación. Como $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{36}{49}$, se tiene que si

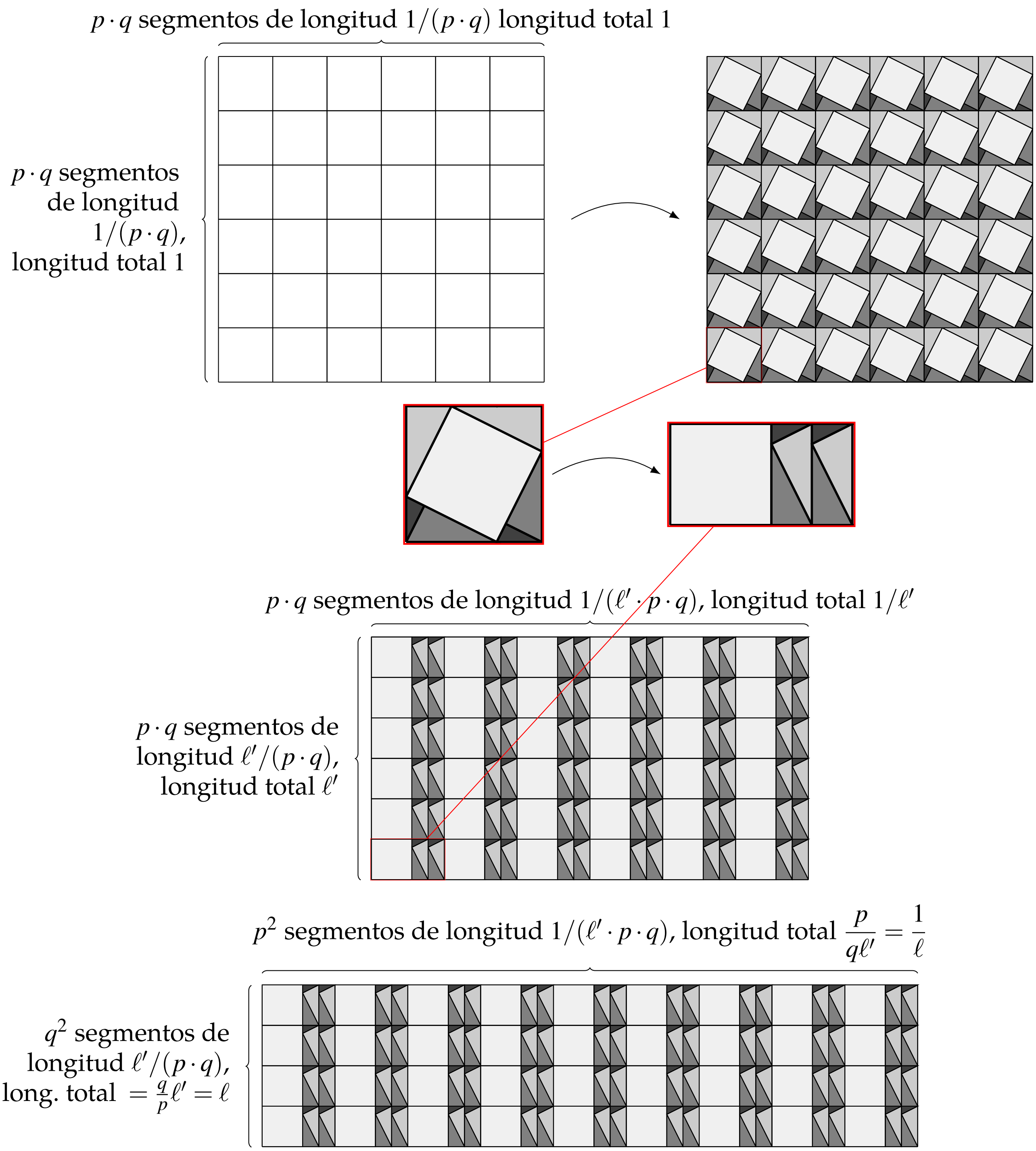
$$\tfrac{\sqrt{2}}{2}(\tfrac{36}{49})^n < (\tfrac{36}{49})^{n+1} < \ell < (\tfrac{36}{49})^n,$$

luego $\ell \in [\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{36}{49})^n, (\frac{36}{49})^n]$; por lo que $\ell(\frac{49}{36})^n \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$. Llamaremos $\ell' = \ell\left(\frac{49}{36}\right)^n$.

Para armar un rectángulo de lado ℓ llevaremos a cabo el siguiente procedimiento: Primero partiremos nuestro cuadrado en $(36 \cdot 49)^n$ cuadraditos de lado $\frac{1}{(6\cdot 7)^n}$. Una vez hecho esto, por el procedimiento que usamos para el cuadrado de lado uno, escalado a estos cuadraditos, podemos hacer rectangulitos de lados $\frac{1}{\ell'\cdot(6\cdot 7)^n}$ y $\frac{\ell'}{(6\cdot 7)^n}$, a los cuales llamaremos base y altura respectivamente para distinguirlos y orientarnos geométricamente. Una vez hecho esto, ordenamos los $(6\cdot 7)^{2n}$ rectangulitos en 7^{2n} columnas y 6^{2n} filas, por lo que la base quedará de $\frac{1}{\ell'}\frac{1}{(6\cdot 7)^n}\cdot 7^{2n} = \frac{1}{\ell'}\left(\frac{7}{6}\right)^{2n} = \frac{1}{\ell}$ y la altura de dimensiones $\ell'\left(\frac{7}{6}\right)^{2n}\cdot 6^{2n} = \ell'\left(\frac{36}{49}\right)^n = \ell$.

El procedimiento se ilustra en la Figura 12. Para simplificar el esquema, ilustramos el caso en el cual $\ell \in [\frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2}{3}]$ para necesitar solo 36 cuadraditos, correspondiéndose a $q = 2$ y $p = 3$.

Corolario 1.4.2. *Dado un cuadrado de lado a, se puede formar un rectángulo de lados ℓ y $\frac{a^2}{\ell}$. Basta con escalar los ejes por un factor de a y llevar a cabo el procedimiento empleado en la demostración del lema.*



Se divide el cuadrado en n^2 cuadraditos. Luego, se emplea el procedimiento ilustrando en las figuras 3 y 4 para transformar cada cuadradito en un rectángulito de ciertas proporciones. Finalmente se puede ensamblar un rectángulo de $p^2 \times q^2$ rectangulitos.

FIGURA 12. Resumen visual de todos los pasos del proceso.

Ya casi estamos en condiciones de generalizar la idea del problema a su máxima expresión, este resultado se conoce como teorema Wallace–Bolyai–Gerwien.

1.5. La última generalización, el Teorema de Wallace Bolyai-Gerwien. Está claro que si dos polígonos son equidescomposibles, entonces estos poseen la misma área ya que las operaciones de recortar y re-ensamblar sin superposiciones conservan el área. Resulta ser, que el hecho de que dos polígonos posean la misma área es una condición necesaria y suficiente para que estos sean equidescomposibles.

Teorema 1.5.1 (Wallace–Bolyai–Gerwien)**.** *Dados dos polígonos convexos A y B ambos de igual área, se tiene que A y B son equidescomponibles.*

Demostración. Primero, comprobemos que todo polígono convexo se puede triangular, es decir, se puede descomponer en triángulos.

Demostrémoslo por inducción sobre n. Si $n = 3$ tenemos un triángulo el cual claramente es una triangulación.

Sea C un polígono de n lados. Veamos que podemos descomponerlo en un triángulo y un polígono de $n-1$ lados en el cual emplearemos el paso inductivo. Dado un vértice v, éste pertenece a dos aristas. Estas dos aristas han de tener otro vértice cada una, llamémoslos u y w. Como el polígono C es convexo, este contiene al triángulo uvw y se puede remover el triángulo uvw del polígono C de la siguiente forma seleccionando los dos vértices adyacentes a v y cortando al polígono mediante la línea que los une, obteniendo así un polígono cuyos vértices son los mismos que el inicial, pero sin v, este proceso se ilustra en la Figura 13.

De esta forma obtenemos un nuevo polígono el cual tiene todos los vértices del anterior salvo v y cuyo conjunto de aristas está formado por la arista con uw y todas las aristas del polígono anterior que no son adyacentes a v, es decir agregamos la arista uv y sustraemos las aristas uv y vw al conjunto de aristas de nuestro polígono original. De esta forma ahora tenemos un triángulo y un polígono de $n-1$ lados, de forma que empleando el método sucesivamente triangulamos el polígono tras $n-3$ pasos.

El teorema se puede generalizar fácilmente a polígonos no convexos, basta con demostrar que todo polígono tiene al menos un vértice en común con su cápsula convexa (es decir, el menor polígono convexo que lo envuelve, el que se formaría si rodeamos nuestro polígono con una bandita elástica), y el paso inductivo lo llevamos a cabo eligiendo un vértice v que esté tanto en el polígono dado como en su cápsula convexa. Se deja de ejercicio para el lector verificar que todo polígono tiene un vértice en común con su cápsula convexa.

A partir de un triángulo cualquiera se pueden obtener dos triángulos rectángulos, el procedimiento es simple, basta con partir al triángulo original en dos mediante un corte perpendicular a un lado el cual pase por el vértice opuesto a éste,

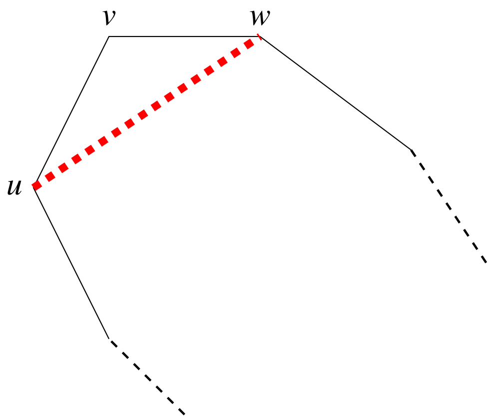


FIGURA 13. Paso inductivo de triangulación en polígono convexo.

este corte pasará por la línea que suele definirse como altura del triángulo respecto de ese lado. Para un triángulo agudo, puede elegirse cualquier lado. El lector escéptico puede notar que en el caso de los triángulos obtusos este método puede fallar al quedar la línea de corte fuera del triángulo, por lo cual hay que tener cuidado a la hora de elegir el lado. En este caso se emplea la altura del lado opuesto al ángulo obtuso, de forma tal que la altura queda dentro del triángulo. Una vez obtenidos los dos triángulos rectángulos, se procede a construir un rectángulo mediante los siguientes pasos. Se emplea de base del triángulo el lado opuesto a su mayor lado (para evitar que nuestra base forme parte de un ángulo obtuso y el corte quede fuera del triángulo). Luego, se parte el triángulo mediante una paralela a la base, a la mitad de la altura, marcada en azul. Una vez partido en un trapezoide y un triángulo, se parte al triángulo por una perpendicular a su base que pasa por el vértice opuesto. Finalmente se unen estos dos triángulos al trapezoide para obtener así obtener un rectángulo.

La construcción ilustrada en la Figura 14.

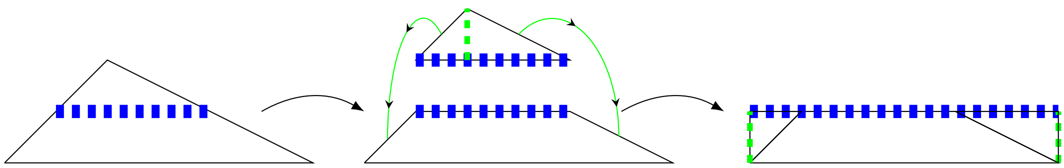


FIGURA 14. Construcción de un rectángulo a partir de un triángulo arbitrario.

Finalmente, a cada uno de los rectángulos obtenidos lo convertimos en un rectángulo de la misma área con un lado de longitud 1 (cualquier longitud fija sirve, elegimos 1 por conveniencia). Luego, podemos unir todos los rectángulos obtenidos dejando a los lados de longitud 1 paralelos para obtener un rectángulo cuyos lados son de longitudes 1 y a. Como el proceso puedo aplicarlo tanto con A como con B, y señalamos que la relación 'puede descomponerse en la forma indicada para formar el otro polígono' es de equivalencia, concluimos la demostración. □

§2. Incógnitas adicionales

Como planteamos inicialmente, al encontrar una respuesta, ésta es tan emocionante como las preguntas que sugiere. Ya sabemos que dados dos polígonos P y Q, P se puede descomponer con finitos cortes para formar Q si y solo si el área de P es igual al área de Q. El Teorema 1.5.1 nos asegura que si los dos polígonos tienen la misma área, esto puede realizarse. Por otro lado el área de un polígono no cambia si se lo recorta en varios polígonos y se lo vuelve a pegar sin superposiciones, por esta razón si a partir de un polígono P puede obtenerse un polígono Q, entonces P y Q han de tener la misma área.

Ahora, con solo observar la Figura 13, queda claro que el procedimiento empleado en la demostración está lejos de ser óptimo, pues se requieren muchísimos cortes. Sería entonces interesante dar con una fórmula o un algoritmo que, dados dos polígonos P y Q de igual área, nos diga cuál es la mínima cantidad de cortes que se necesitan para obtener uno a partir del otro. Esta es una incógnita que aún no tiene respuesta.

Para obtener mejores cotas, se necesita encontrar procedimientos metódicos para descomponer polígonos, los cuales empleen una menor cantidad de polígonos.

En 1924, el matemático polaco-americano Alfred Tarski atacó este problema y dio una cota inferior para el número de cortes necesarios cuando P y Q son polígonos convexos. Si llamamos $\sigma(P,Q)$ a la cantidad de triángulos en las que hemos de descomponer P para formar Q, se tiene que

$$\sigma(P,Q) \geq \frac{d(P)}{d(Q)}$$

donde $d(X)$ nota al diámetro del polígono X.

En el caso de que P_x sea un rectángulo cuyos lados sean $a \cdot x$ el mayor y $a \cdot \frac{1}{x}$ el menor, y Q un cuadrado de lado a, el teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien nos dice que los polígonos son equidescomponibles, y Tarski halló una cota superior para $\sigma(P_x, Q)$ la cual está dada por

$$\sigma(P_x, Q) \leq 2 + \left\lceil \sqrt{x^2 - 1} \right\rceil$$

Dado que P_x es congruente con $P_{\frac{1}{x}}$, se tiene que $\sigma(P_x, Q) = \sigma(P_{\frac{1}{x}}, Q)$, luego reemplazando x por $\frac{1}{x}$ se obtiene

$$\sigma(P_{\frac{1}{x}}, Q) \leq 2 + \left\lceil \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \right\rceil$$

Una anécdota interesante sobre el tema, que no podemos dejar de mencionar, es que Tarski publicó estos resultados en revistas orientadas hacia profesores de secundario, en un esfuerzo por mejorar la instrucción de matemáticas en Polonia, e invitaba a los alumnos a participar en la resolución de problemas. El profesor de secundario Henryk Moeseen publicó en 1932 un artículo en el cual se mejoraba la cota dada por Tarski.

La cota dada por Henryk Moeseen es

$$\sigma(P_x, Q) \leq \lceil x \rceil + 1$$

De hecho, Henryk demostró que $\sigma(P_x, Q)$ es igual a $\lceil x \rceil + 1$ o a $\lceil x \rceil$ cuando $x \geq 1$, y demostró un caso específico para el cual $\sigma(P_x, Q) = \lceil x \rceil + 1$.

Finalmente, Tarski halló el valor exacto de $\sigma(P_x, Q)$ para $1 \leq x \leq 2$. El autor de este artículo desconoce si se han logrado mayores progresos en este aspecto.

Esta apasionante historia puede hallarse con mayor detalle en el libro sobre Tarski (McFarland, McFarland, Smith, y Grattan-Guinness, 2014).

Todas estas preguntas y resultados van en la dirección de contar la cantidad de piezas, pero también podríamos buscar generalizar el resultado a más dimensiones ¿Dados dos poliedros P y Q del mismo volumen, se puede descomponer P en Q con finitos cortes?

Este problema fue el tercer problema de Hilbert, y fue respondido negativamente por Max Dehn en 1900.

La respuesta es negativa, pero es muy interesante y profunda. Como es usual con los problemas de imposibilidad geométrica, la demostración fue realizada empleando el álgebra; Dehn definió una propiedad de los poliedros, la cual es invariante mediante estas descomposiciones. Es decir, si dos poliedros P y Q son equivalentes, entonces tienen el mismo invariante de Dehn. Finalmente, mostró que el cubo y el tetraedro poseen distintos invariantes de Dehn, por lo cual es imposible descomponer uno y con esas piezas recomponer el otro.

Como comentario adicional orientado hacia aquellos cuya curiosidad geométrica excede el mundo euclídeo, el problema de equidescomposición tridimensional sigue abierto para las geometrías elípticas e hiperbólica, pero comentar sobre éstas está fuera del alcance de este artículo.

§3. Comentarios finales

En este artículo intentamos ilustrar el proceso de descubrimiento matemático manteniéndonos fieles al espíritu del Certamen *"El Número de Oro"*. Si bien el autor no tuvo la restricción de tiempo propia del examen, decidió no consultar bibliografía durante la re-deducción del Teorema WBG.

Ya sea por valor estético o pedagógico, la bibliografía matemática muchas veces expone argumentos elegantes que pueden esconder la intuición detrás del descubrimiento. Consideramos que es educativo mostrar una obra con los andamios aún colocados. Consideramos que así se puede recrear la sensación de cuarto oscuro que se tiene cuando se ataca un problema en solitario, por supuesto siempre se invita al lector a intentar crear sus propios argumentos ya que esto es esencial para aprender matemáticas. Estas últimas dos secciones fueron elaboradas consultando bibliografía.

En (Hartshorne, 2000), se emplea un mejor método local por lo cual no hace falta refinar el método global. La proposición 24.4 de tal libro dice:

Proposición 3.0.1. *Dado un rectángulo $ABCD$, y dado un segmento AE tal que $AB < AE < 2AB$, el rectángulo $ABCD$ es equidescomponible a un rectángulo con lado AE.*

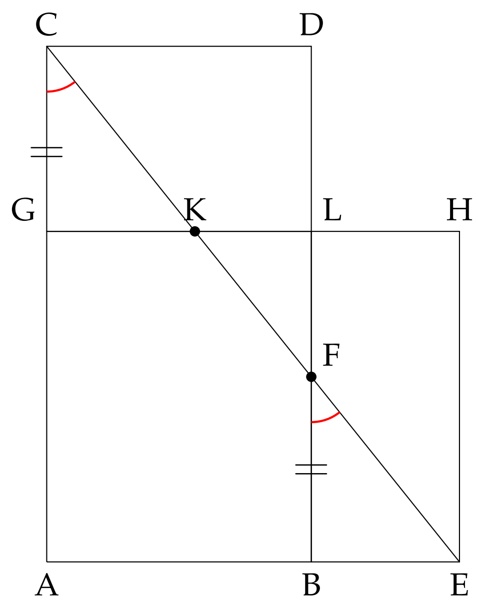


Figura 15. Ilustración del método 'local' más amplio para rectángulos.

En la Figura 15 se ilustra el procedimiento, sobre el rectángulo $ABCD$ se ilustra el rectángulo $AEHG$ con E en la dirección AB y G en la dirección AC. Del rectángulo $ABCD$ se corta el triángulo CGK y se lo pega sobre el lado BD de forma tal que G coincida con B y E este en la semirrecta AB. Luego se traslada el triángulo FDC de forma tal que F coincida con E y C quede en la semirrecta que originalmente era EC.

Después de conocer estos resultados, se puede pensar en modificar nuestra demostración mejorando el método local en lugar del global. Para lograr cubrir todo el intervalo $(0, 1]$ en lugar de (1.1), basta con notar que mientras que si bien estábamos pensando en el lado menor cuando enunciamos el método del corte Pitágoras, si pensamos en el lado más grande, éste está en $[0, \sqrt{2}]$. Por ende, si repetimos el procedimiento empleado para llegar a (1.1), pudiendo elegir $a \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}]$, cubrimos

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}, \frac{\sqrt{2}}{2^n}\right] = (0, \sqrt{2}] \supset (0, 1] \tag{3.1}$$

Este método sigue teniendo la desventaja de que solo sirve con cuadrados por lo cual ha de aplicarse dos veces para llegar de un rectángulo arbitrario a otro, pero la transitividad nos garantiza que es posible.

Cerramos el artículo queriendo poner énfasis en que muchas veces, para poder obtener el mayor fruto, se necesita dejar crecer libremente las ideas, ya que solo después de que éstas crezcan se hace evidente cuales han de ser podadas y cuales son esenciales para nuestro jardín.

Referencias

Hartshorne, R. (2000). *Geometry: Euclid and beyond* (1. A., korr. Nachdruck 2002. ed.). Springer.

McFarland, A., McFarland, J., Smith, J., y Grattan-Guinness, I. (2014). *Alfred tarski: Early work in poland - geometry and teaching*. Birkhäuser.

Luis Agustín Cárdenas Pena
Universidad de Talca, Talca, Chile.
(✉) cardenaspenaluisa@gmail.com

Recibido: *4 de noviembre de 2018*.
Aceptado: *11 de febrero de 2020*.
Publicado en línea: *29 de julio 2020*.