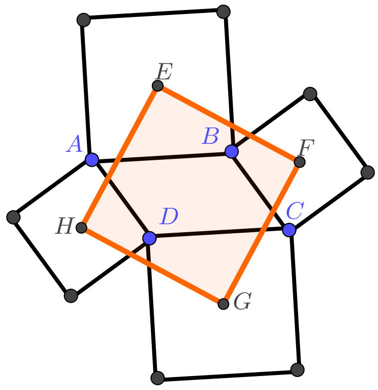
¿Sabías que...

por Leandro Cagliero y Ricardo Podestá

si sobre los lados de un paralelogramo se construyen cuadrados externos (o internos) al paralelogramo, los centros de los cuadrados agregados forman un nuevo cuadrado?



Este hecho es conocido como el primer *Teorema de Thébault*, quien lo probó en 1937. Recibe el nombre de primero, ya que fue él quien propuso 3 problemas: el primero con un paralelogramo y cuadrados, el segundo con un cuadrado y triángulos equiláteros y el tercero con un triángulo y círculos.

Para los curiosos, vale la pena mencionar que el Teorema de Thébault es un caso especial del Teorema de van Aubel de 1878 (*si en un cuadrilátero convexo construimos cuadrados externos sobre los lados, los segmentos que se obtienen de unir los centros de los cuadrados opuestos son de igual longitud y se cortan en ángulos rectos*) y que generaliza el Teorema de Napoleón (*si triángulos equiláteros son construidos sobre los lados de un triángulo arbitrario –todos externos o todos internos– las líneas que conectan los centros de estos triángulos forman un triángulo equilátero*) usualmente atribuido a Napoleón Bonaparte, aunque con ciertas dudas al respecto.

Veamos una demostración sencilla y puramente geométrica de este hecho (existen algunas otras). Sean A, B, C, D los vértices del paralelogramo $\mathcal{P}$ y E, F, G, H los centros de los cuadrados agregados a los lados de $\mathcal{P}$. Queremos ver que el cuadrilátero $EFGH$ es un cuadrado. Haremos esto en dos pasos.

(a) Los triángulos $\triangle(EAH)$, $\triangle(EBF)$, $\triangle(FCG)$ y $\triangle(GDH)$ son todos congruentes, por lo tanto $EFGH$ es un rombo.

Todos estos triángulos están formados por un lado que es la mitad de la diagonal del cuadrado menor, otro lado que es la mitad de la diagonal del cuadrado mayor y el lado restante es un lado del cuadrilátero $EFGH$. Para probar que los cuatro triángulos son congruentes entre sí, vamos a aplicar el criterio LAL de congruencia de triángulos. Llamemos $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ y $\hat{d}$ a los ángulos de los triángulos en cuestión en los vértices A, B, C y D respectivamente. Debemos probar que $\hat{a} \equiv \hat{b} \equiv \hat{c} \equiv \hat{d}$. Si llamamos α y β a los ángulos distintos del paralelogramo, tenemos que $\alpha + \beta \equiv \pi$ y

$$\hat{a} \equiv \hat{c} \equiv \tfrac{\pi}{4} + \alpha + \tfrac{\pi}{4} = \alpha + \tfrac{\pi}{2}\,,$$
$$\hat{b} \equiv \hat{d} \equiv \angle EBF \equiv 2\pi - (\beta + \tfrac{\pi}{2}) = (\pi - \beta) + \tfrac{\pi}{2} \equiv \alpha + \tfrac{\pi}{2}\,.$$

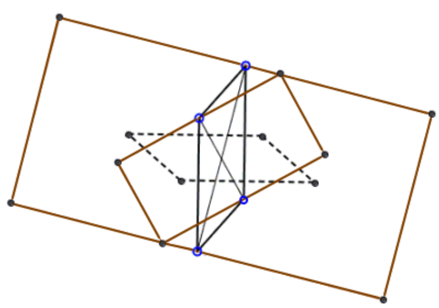
Esto demuestra que $\hat{a} \equiv \hat{b} \equiv \hat{c} \equiv \hat{d}$ y por lo tanto los cuatro triángulos mencionados son congruentes enter sí.

(b) Dado que $\triangle(EAH) \equiv \triangle(GDH)$ resulta que $\angle(AHE) = \angle(DHG)$, lo que implica que $\angle(GHE) = \angle(DHA) = \frac{\pi}{2}$. El mismo argumento sirve para ver que los otros tres ángulos de $\mathcal{P}$ son rectos, y por lo tanto $\mathcal{P}$ es un cuadrado.

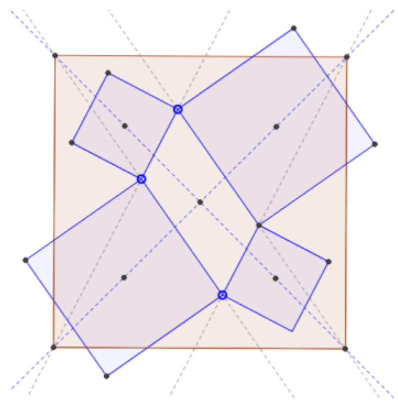
Dos variantes realmente muy bonitas de este resultado son la de Ray Viglione y Purna Patel (2013) y la de Dao Thanh Oai (2015) que damos a continuación. El lector curioso puede intentar probarlos por su cuenta y encontrar más información en el reconocido blog *cut-the-knot* del cual copiamos las figuras de abajo.

Variante 1 (Viglione-Patel).
Dado un paralelogramo, los centros de los cuadrados dibujados en ambos lados de las diagonales forman un paralelogramo congruente al original y rotado 90 grados sobre su centro.

Variante 2 (Dao).
Supongamos que en los lados de un paralelogramo adjuntamos cuadrados externos y que extendemos los lados del paralelogramo de modo que intersequen a las rectas que unen los centros de los cuadrados. Entonces, los puntos de intersección ed estas rectas forman un cuadrado.



Viglione-Patel

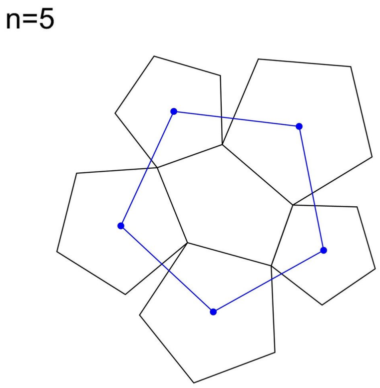


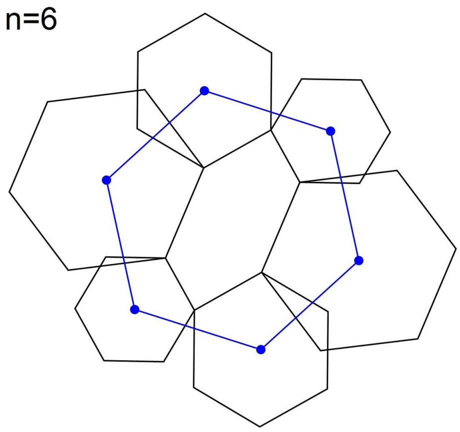
Dao Thanh Oai

Por último, mencionamos que el teorema de Thebault se generaliza a polígonos de n-lados, con la condición extra de que sean afín-regulares. Recordamos que un polígono es *afín-regular* si es la imagen afín de un polígono regular. De este modo, los triángulos son todos afín-regulares y los cuadriláteros afín-regulares son los paralelogramos

Teorema de Napoleón-Barlotti (1952, 1955). *Si sobre los lados de un n-ágono afín-regular construimos n-ágonos regulares todos externos (o todos internos) entonces los centros de esos n-ágonos regulares forman un n-gono regular.*

Es decir, para $n = 3$ tenemos el Teorema de Napoleón y para $n = 4$ el Teorema de Thebault. A continuación, dos instancias del teorema para $n = 5$ y $n = 6$.





Dejamos aquí una applet diseñada en Geogebra por Ignacio Larrosa Cañestro www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/Teorema-Napoleon-Barlotti.html para quien quiera jugar un poco variando el $3 \leq n \leq 12$ y los puntos del n-ágono.

Victor Michael Jean-Marie Thébault (1882–1960) fué un matemático francés conocido por proponer 3 problemas famosos de geometría plana. El Teorema de Thébault (correspondiente al primer problema) sobre el paralelogramo también es conocido como Teorema de Sawayama. Publicó mas de 1000 problemas originales en varias revistas matemáticas y contribuyó con más de 600 problemas y soluciones a la sección de problemas de la prestigiosa revista American Mathematical Monthly.