Sección de Problemas

☞ *por Juan Pablo Rossetti*

Los siguientes problemas están pensados para un público amplio....

Las soluciones se encuentran en la página siguiente.

Problema 1. TAMAÑO DE LAS MAMUSHKAS. Un fabricante de mamushkas (o matrioshkas) quiere cambiar de pintura a una muy linda, pero costosa, porque la gente cada vez se fija más en este aspecto que en los notables encastres, casi perfectos, de las tradicionales muñecas rusas. Así, quiere saber con precisión cuánta pintura necesitará para pintar un juego de 5 muñecas, cuyas alturas son de menor a mayor: 3; 4; 5,5; 7,5 y 10cm. Si para pintar a la más chiquita necesita una cierta cantidad C de pintura, ¿cuánta necesitará para pintar a todas?

Problema 2. CARA O NÚMERO A CIEGAS. En una cajita cuadrada, sin tapa, se colocan 4 monedas en sus 4 esquinas. El desafío se trata de dar vuelta algunas de las monedas y lograr que queden las cuatro mostrando lo mismo, es decir, las 4 caras o las 4 números; pero hay un detalle importante: ¡tenemos que hacer esto *a ciegas*! La dinámica es así: uno elige algunas de las monedas (entre 0 a 4), y una amiga las da vuelta. Luego, le pedimos a ella que nos diga si las 4 están iguales, es decir, las cuatro caras o las cuatro números. Si lo están, ganamos. Si no, ella hace girar la caja como quiera, sin decirnos cuánto. Ahora tenemos un segundo turno para dar vuelta las monedas que queramos, siempre a ciegas, y volver a preguntar si ahora están bien. Y así sucesivamente. ¿Hay alguna estrategia que nos asegure que podemos ganar en a lo sumo una cantidad fija de intentos? En caso que haya una estrategia ¿cuántos intentos son necesarios (como mínimo) para asegurar que va a funcionar seguro?

Vale la pena pensar bien este problema, para descrifrar una estrategia ganadora. También proponemos algunas variantes del problema:

¿Si se coloca una quinta moneda en la cajita, ahora en el centro, qué sucede? En este caso, la moneda del centro, siempre quedará en el centro al rotar la cajita.

¿Si en lugar de 4 monedas en la cajita cuadrada, se colocan 5 monedas en una cajita circular (o pentagonal) y se procede del mismo modo, será posible resolverlo?

¿Y si se colocan 3 monedas en una cajita triangular, que gira como la cuadrada, se podrá lograr?

¿Qué pasa si nuestra amiga puede girar la cajita no solo después que hacemos un intento, sino también después que le indicamos qué monedas dar vuelta? ¿Seguimos teniendo una estrategia ganadora?

Problema 3. ORDENAR n ELEMENTOS POR COMPARACIONES. Tenemos n números positivos distintos (no sabemos cuáles son) y queremos ordenarlos de menor a mayor. Solo podemos comparar dos números por vez y así saber cuál es menor y cuál mayor entre esos dos. Dados cuatro números a, b, c, d, ¿cuántas comparaciones hacen falta como mínimo para ordenarlos? Ejemplo: si hay que ordenar solo tres números, digamos x, y, z, entonces necesitaremos 3 comparaciones para estar seguros, en todos los casos, de que los podremos ordenar de menor a mayor.

¿Se anima a resolver este problema con cinco números?

El problema es muy interesante en general, cuando se tienen n números distintos. No se puede resolver en forma completa, pero lo que sí se puede hacer es dar algunas cotas, inferiores y superiores, de la cantidad de comparaciones que harán falta y que alcanzan, respectivamente, para resolver el problema.

¡Sucesiones al toque!

¿Cuál creés que es el próximo número en las siguientes sucesiones y por qué? ¿Te animás a encontrar más términos de estas sucesiones? ¿Y una fórmula general?

$$\{a_n\}: \quad 2,\ 3,\ \frac{10}{3},\ \frac{7}{2},\ \frac{18}{5},\ \frac{11}{3},\ \frac{26}{7},\ldots$$

$$\{b_n\}: \quad 2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, 1154, 2786, 6726, 16238, 39202, 94642, 228486, 551614, 1331714, \ldots$$

$$\{c_n\}: \quad 0,1,0,2,0,1,0,3,0,1,0,2,0,1,0,4,0,1,0,2,0,1,0,3,0,1,0,2, 0,1,0,5,0,1,0,2,0,1,0,3,0,1,0,2,0,1,0,4,0,1,0,2,0,\ldots$$

Podés encontrar las soluciones en la página 72.

SOLUCIONES

Solución 1. Cada mamushka de altura h necesita $(\frac{h}{3})^2$ pintura con respecto a lo que hace falta para pintar la mamushka de 3 cm de altura. Esto es así porque las mamushkas son todas iguales, salvo por su tamaño, entonces el área a pintar se agranda como la proporción entre sus alturas pero elevada al cuadrado. Por lo tanto la respuesta es $(\frac{4}{3})^2+(\frac{4}{3})^2+(\frac{5{,}5}{3})^2+(\frac{7{,}5}{3})^2+(\frac{10}{3})^2=\frac{211{,}5}{9}=23,5$, multiplicado por C.

Solución 2. Sí, hay una estrategia ganadora, en a lo sumo 8 intentos logramos que todas las monedas esten iguales. Procedemos así: en el primer turno, preguntamos si así estan bien (de este modo, estamos considerando el caso de 4 caras o 4 números). En caso que no, atacamos los casos en que haya 2 caras y 2 números: damos vuelta 2 monedas opuestas en diagonal (movimiento [X]). Si después de esto no todas las monedas tienen la misma cara visible, pensamos que hay 2 pares de adyacentes de cada tipo, entonces damos vuelta dos monedas adyacentes (movimiento [I]). Si después de esto no ganamos, entonces pensamos que quedan 2 pares de diagonales de cada tipo. Repetimos el movimiento [X]. Si quedan todas igual, ganamos; si no, es porque al principio había un número impar de caras y uno impar de números (3 de un tipo y 1 del otro). En tal caso, utilizamos nuestro 5to turno para dar vuelta una sola moneda, cualquiera. Entonces nos quedan seguro dos monedas cara y dos número y podemos repetir los movimientos [X] [I] [X] y ganar.

El caso en el que se coloca una quinta moneda en el centro, es esencialmente igual, solo que nos llevará el doble de intentos, 16, puesto que cada vez que preguntamos si están bien las monedas hay que hacerlo una segunda vez dando vuelta la moneda del medio.

El caso de 5 monedas en un arreglo pentagonal o 3 monedas en un arreglo triangular, no tiene solución. Qué notable que con 3 monedas no se pueda y con 4 sí, ¿verdad?.

Solución 3. Para ordenar 4 elementos alcanza con hacer 5 comparaciones, y ese es el número mínimo para asegurar el buen orden. Podemos comparar primero a, b y c, todos con todos (son 3 comparaciones) y así ordenarlos a ellos. Luego, comparamos d con el que quedó al medio de los 3 anteriores. Por ejemplo, si habían quedado $a < b < c$, comparamos d con b. Si $d > b$, entonces comparamos d con c, y si $d < b$ entonces comparamos d con a.

Esta no es la única forma de lograr ordenarlos en 5 comparaciones, pero tiene de bueno que nos muestra un camino para ordenar $n+1$ números habiendo ordenado n. Se toma el nuevo número, se lo compara con uno del medio (dependiendo de la paridad hay uno solo al medio o dos), y luego se continúa comparando ese último número con el del medio de la zona a donde cayó. De este modo, al pasar de n números a $n+1$, se ve que alcanza con hacer $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ nuevas comparaciones.

La cota inferior para la cantidad de comparaciones viene dada por $\log_2(n!)$. Esto es así porque inicialmente hay $n!$ órdenes distintos posibles. En cada comparación, vamos partiendo ese conjunto de $n!$ posibilidades en 2, luego en 4, y así sucesivamente, vemos que se va armando un árbol y para asegurar que hemos llegado a ordenar los n números en todos los casos, hace falta que en cada rama del árbol quede una sola posibilidad. Por consiguiente, al hacer k comparaciones, debemos tener $2^k \geq n!$, es decir, $k \geq \log_2(n!)$

Para una cota superior, podemos razonar como al principio, notando que las comparaciones que necesitamos sumar al agregar números a partir de un solo número son $1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots$ Esto es fácil de sumar, da $\frac{2n(n+1)}{2} - 1$.

Este tema es investigado en matemática y en computación, desarrollando algoritmos que ordenan los números de manera eficiente. Se conoce el número exacto para ordenar hasta 16 números. De la Enciclopedia on-line de sucesiones enteras: A036604

(Sorting numbers: minimal number of comparisons needed to sort n elements.)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	1	3	5	7	10	13	16	19	22	26	30	34	38	42	?

Soluciones de ¡sucesiones al toque!

- $a_8 = \dfrac{15}{4} = \dfrac{30}{8}$. Son los números de la forma $a_n = \frac{4n-2}{n}$.
- $b_{18} = 3215042$. Son los *Números de Pelle*, $b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2}$.
- $c_{54} = 1$. c_n es el exponente del 2 en la descomposición en primos de n.

Viene de la página 70.