

# EL MÉTODO DE LILL PARA EVALUAR POLINOMIOS

Javier Pedro García

---

**RESUMEN.** Si bien el tópico *Polinomios* es clásico en la escuela secundaria y pareciera estar agotada la posibilidad de nuevos abordajes, aún queda mucho por decir. En este sentido, en el presente escrito mostramos una forma muy interesante de interpretar la evaluación de polinomios en términos gráficos, conocida como el *método de Lill*. Este método sorprende tanto por su elegancia como por la novedad que representa (aún cuando haya surgido en la segunda mitad del siglo XIX), así como por la riqueza de contenidos matemáticos que se entrelazan en su desarrollo: el algoritmo de división, la regla de Ruffini o de Horner, la geometría y las funciones trigonométricas.

**ABSTRACT.** While the topic *Polynomials* is classic in high school and the possibility of new approaches seems to be exhausted, much remains to be said. In this sense, in this paper we show a very interesting way to interpret the evaluation of polynomials in graphical terms, known as *Lill method*. This method surprises both for its elegance and the novelty it represents (even when it emerged in the second half of the nineteenth century), as well as for the many mathematical contents intervening in its development: the division algorithm, Ruffini or Horner's rule, geometry and trigonometric functions.

## §1. La sorpresa inicial

La idea de utilizar un gráfico para estimar las raíces de un polinomio parece desde el vamos una idea original. Y fue el ingeniero austríaco Eduard Lill quién en 1867 desarrolló un método para hacerlo: mediante el simple trazado de dos poligonales podemos estimar la evaluación de un polinomio  $f$  en un número real  $x$ . Tomemos, por ejemplo, el polinomio  $f = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ . Queremos evaluar  $f$  en  $x = -1$ . En la Figura 1 presentamos la idea de Lill. La primera poligonal (la de trazo grueso) representa, en un sentido que precisaremos, al polinomio  $f$ : la longitud de cada uno de sus segmentos coincide con los coeficientes de  $f$ . La segunda poligonal (la de trazo punteado) representa el hecho de que queremos evaluar en  $x = -1 = \tan(-45^\circ)$ . La distancia entre los extremos finales de cada una

---

*Palabras clave:* representación de polinomios, método de Lill, regla de Horner.

*Keywords:* polynomials representation, Lill's method, Horner's rule.

de las poligonales es igual a 2. Si calculamos  $f(-1)$  como lo hacemos usualmente, obtenemos  $f(-1) = -2 + 3 - 5 + 6 = 2$ . ¿Será una casualidad?

Es de imaginar que no lo es. Teniendo en cuenta que la función  $\tan x$  definida de  $(-\pi/2, \pi/2)$  en  $\mathbb{R}$  es biyectiva, cada número real  $x$  puede identificarse con un cierto ángulo  $\theta$  ( $x = \tan \theta$ ) y, de esta manera, para cada  $x \in \mathbb{R}$  se construye la segunda poligonal: la misma comienza con el trazado de una semirrecta que forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $x$ . Midiendo de manera apropiada la distancia entre los extremos finales de las poligonales podremos calcular el valor de  $f(x)$ .

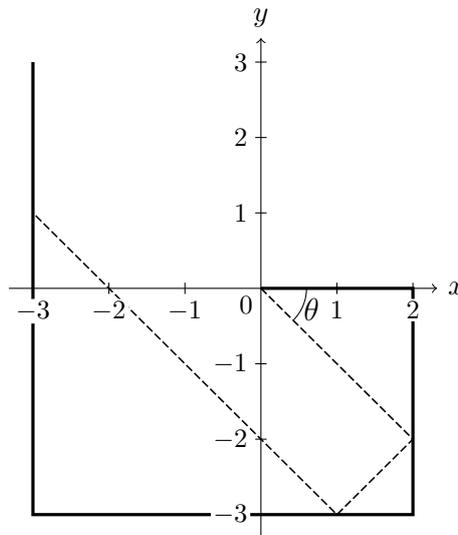


FIGURA 1. Las dos poligonales para  $f$ , y su interpretación;  $\theta = -45^\circ$ ,  $f(-1) = 2$

Por supuesto, el entramado que subyace detrás de este ejemplo introductorio es de una riqueza que vale la pena explorar. ¿Cómo es que funciona? ¿Cuáles son las ideas que lo inspiran? Esperamos que el discurrir del texto nos permita responder las preguntas formuladas. Y esperamos también que el lector experimente, al igual que nosotros, la sorpresa que nos abordó la primera vez que conocimos este método: cómo los polinomios aún constituyen un concepto con un gran potencial para comprender mejor la matemática escolar.

## §2. Representación de polinomios

Existe un puente que va desde el álgebra a la geometría y está vinculado a las formas en las que expresamos los polinomios, específicamente a una forma en particular: la llamada *forma de Horner*. Esto nos lleva directamente, a tratar este tema con dedicación.

Cuando de polinomios se trata, desde el primer momento es común escribirlos como

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Esta es la definición inicial, aunque no hay que perder de vista que no es la única forma de representar un polinomio. Nos interesa entablar una primera discusión con respecto a este punto.

Un ejemplo típico se da en el contexto del trabajo con funciones cuadráticas o, también, polinomios de grado 2. Cuando se consideran, suelen clasificarse atendiendo a la información que proporciona cada una de las escrituras:

$$f = ax^2 + bx + c \quad \text{“forma polinómica”}$$

$$f = a(x - x_0)^2 + y_0 \quad \text{“forma canónica”}$$

$$f = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{“forma factorizada”}$$

Aunque siempre nos estemos refiriendo al mismo polinomio  $f$ , la palabra *polinómica* aparece sólo en la primera expresión. ¿Acaso  $f$  no es un polinomio independientemente de la forma en que se escriba? En función de la definición inicial, nuestra percepción de un polinomio está sesgada por la representación  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , que bien podríamos llamar *forma descendente*.

La forma factorizada puede extenderse a otros polinomios más allá de los cuadráticos, por supuesto, entendiéndola en un sentido más amplio: interviene aquí el estudio de la factorización de un polinomio en *factores irreducibles* sobre un anillo de polinomios  $\mathbb{K}[x]$ , donde  $\mathbb{K}$  es un cuerpo (ver (Childs, 2009), Part IV, ch. 14). Así, la identidad

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = (x + 1)(x + 2)(x - 1)^2,$$

muestra las formas descendente y “factorizada” como producto de irreducibles para el mismo polinomio. Las comillas pretenden indicar que cuando factorizamos polinomios, tenemos que tener especial cuidado con la noción de factor irreducible ya que no es una noción intrínseca: el carácter de irreducible depende del anillo de polinomios  $\mathbb{K}[x]$ . Si no tomamos este recaudo, la escritura de un polinomio como producto de factores no está bien definida. Por ejemplo, también podríamos expresar el polinomio de arriba en la forma

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = (x^2 - 1)(x - 1)^2.$$

Entendemos esta discusión como una oportunidad para poner de manifiesto la flexibilidad que poseen los polinomios a la hora de escribirlos, en contraste con su usual representación en forma descendente. Sin embargo no es en vano la popularidad de la que goza esta forma.

Ciertamente, la representación en forma descendente es la más adecuada para tratar con la mayoría de los problemas o propuestas escolares. Una de las situaciones que requieren de esta representación es la famosa *regla de Ruffini*. Los libros escolares la presentan como un *método* para dividir un polinomio  $f$  por un polinomio de la forma  $x - a$ . Más aún, se invoca este método casi exclusivamente en el caso en que  $a$  es una raíz del polinomio  $f$ .

En el Cuadro 1 recordamos el procedimiento: calculamos el cociente y el resto de la división de  $f = 5x^3 - 4x^2 + 7x + 2$  por  $x - 2$ . El método nos dice que los números obtenidos en la última fila, son los coeficientes del cociente expresado en forma descendente y que el último número, en este caso **40**, es el resto de la división.

2	5	-4	7	2
		10	12	38
	5	6	19	<b>40</b>

CUADRO 1. Regla de Ruffini

Lo que no resulta del todo claro en los textos escolares es que la regla de Ruffini es una forma abreviada del algoritmo de división usual, que se basa también en la forma descendente de los polinomios. Dedicemos entonces un espacio a explicitar el modo en que la regla de Ruffini se deduce del algoritmo de división. Si hubiésemos hecho *la división extendida* tendríamos una situación como la de la Figura 2. Si prestamos atención a los coeficientes en rojo, obtenemos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r}
 5x^3 - 4x^2 + 7x + 2 \\
 - \\
 \hline
 5x^3 - 10x^2 \\
 \hline
 6x^2 + 7x + 2 \\
 - \\
 \hline
 6x^2 - 12x \\
 \hline
 19x + 2 \\
 - \\
 \hline
 19x + 38 \\
 \hline
 40
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \overline{) x - 2} \\
 5x^2 + 6x + 19
 \end{array}$$

FIGURA 2. Algoritmo de división y regla de Ruffini

Una observación esencial es que, como consecuencia del algoritmo de división en el caso particular en que se divide por el polinomio  $x - a$ , obtenemos que el resto de la división coincide con  $f(a)$  (ver (Childs, 2009), Part IV, ch. 14). Usaremos este hecho más adelante. Reiteramos un detalle no menor: los procedimientos son consecuencia de expresar los polinomios en forma descendente.

Nos interesa presentar a continuación una nueva forma de representar polinomios que se desprende de la regla de Ruffini. Veremos, con sorpresa, que siempre estuvo a nuestro alcance. Focalicemos nuestra atención en la secuencia de operaciones realizadas en el Cuadro 1. Comenzamos *bajando* el 5, luego multiplicamos por 2 y sumamos el resultado al segundo coeficiente; multiplicamos por 2 y sumamos el tercer coeficiente; multiplicamos por 2 y así sucesivamente. La secuencia de cálculos es la siguiente:

$$((5 \cdot 2 + (-4)) \cdot 2 + 7) \cdot 2 + 2.$$

Si en lugar de considerar  $x = 2$ , pensamos esta secuencia con un número real arbitrario  $x$ , la expresión de la sucesión de operaciones sería:

$$(2.1) \quad ((5x + (-4))x + 7)x + 2.$$

¿Qué sucede si expandimos esta secuencia de cálculos? Obtenemos la representación descendente del polinomio.

$$(2.2) \quad \begin{aligned} ((5x - 4)x + 7)x + 2 &= (5x^2 - 4x + 7)x + 2 \\ &= 5x^3 - 4x^2 + 7x + 2. \end{aligned}$$

Reflexionemos un poco sobre lo que hemos hecho. Por un lado, pasamos de la representación descendente de  $f$  a una nueva representación que surge de rastrear las operaciones realizadas en el método de Ruffini. Por otro, y es consecuencia de saber que estamos haciendo una división muy particular, es posible calcular por ejemplo,  $f(2)$  (o  $f(a)$  para un número real  $a$  arbitrario) de una forma particular, pues según lo que hemos observado anteriormente, la expresión (2.1) nos conduce a  $f(a)$  cuando  $x = a$ . Vale la pena destacar que la forma (2.1) puede ser alcanzada sacando factor común  $x$  sucesivamente, por lo que también tenemos una forma de obtenerla prescindiendo de Ruffini, aunque lo que buscamos con este análisis es todo lo contrario: estamos de alguna forma, redescubriendo Ruffini. Esta forma de representar un polinomio, se llama *forma de Horner*.

Este enfoque contrasta con el modo usual de evaluar un polinomio  $f$  o, más aún, una función arbitraria. En efecto, nuestra *experiencia* nos conduce a reemplazar cada ocurrencia de  $x$  por el valor numérico de interés. Esto armoniza con el sentido funcional de  $f$ : visto como una función en la variable  $x$ , para calcular  $f(x)$ , reemplazamos cada ocurrencia de  $x$  por el valor en cuestión. Sin embargo, en el caso de polinomios, es posible considerar una forma de evaluar más relevante desde lo computacional. Es más sencillo utilizar la regla de Ruffini que la forma usual. Al observar la secuencia de cálculos (2.1) dos cosas son evidentes: no hay exponentes y la cantidad de multiplicaciones realizadas es menor. Por esto mismo es que a la evaluación de un polinomio mediante esta forma se la conoce como *evaluación rápida*. En nuestro camino hacia el método de Lill nos encontraremos con la forma de Horner de manera natural.

### §3. El Método de Lill

El método de Lill encierra una forma de representar geoméricamente un polinomio y, al mismo tiempo, de aproximar sus raíces gráficamente. Dado un polinomio  $f$ , le asociamos una poligonal, que llamaremos  $S$ -poligonal, cuya construcción

consiste en trazar un segmento por cada coeficiente de  $f$ , comenzando por el coeficiente principal y continuando en forma descendente hasta el coeficiente constante, tal como se describe a continuación.

Comenzamos por el origen y trazamos un segmento de longitud igual al coeficiente principal sobre la parte positiva del eje  $x$ . Dibujamos luego un segmento perpendicular a este, de longitud igual al valor absoluto del coeficiente que le sigue en grado. La convención es dibujarlo *hacia la derecha* si el coeficiente tiene el mismo signo del coeficiente anterior, o *hacia la izquierda* si el signo es diferente. Esto se puede apreciar en la Figura 3: en este caso se produce un giro hacia la derecha, mientras que en el caso de la Figura 4, corresponde girar hacia la izquierda. Este mecanismo se repite con cada coeficiente de  $f$ , hasta llegar al coeficiente constante. Así obtenemos la  $S$ -poligonal (en negrita en ambos casos).

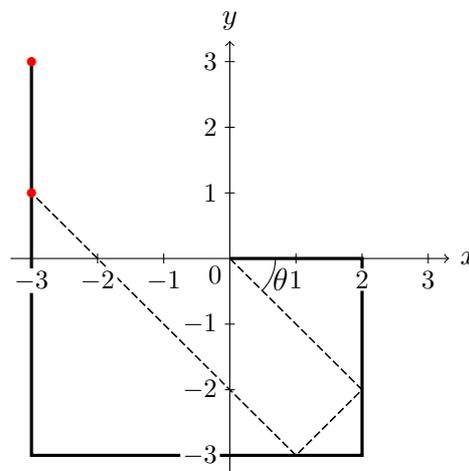


FIGURA 3.  $f = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ ,  
 $\theta = -45^\circ$ ,  $f(-1) = 2$

A continuación se construye una segunda poligonal, que llamaremos  $T$ -poligonal, en función de la cantidad  $f(a)$  que se pretende estimar, siendo  $a$  un número real arbitrario. Consideramos el ángulo  $\theta$  en el intervalo abierto  $(-\pi/2, \pi/2)$  tal que  $\tan \theta = a$  y trazamos el primer segmento de  $T$  desde el origen hasta la intersección con el segundo segmento de  $S$  o su prolongación, en caso de ser necesario. Para determinar el segundo segmento de  $T$ , giramos  $90^\circ$  de manera tal que trazando una recta cortemos al tercer segmento de  $S$  o a su prolongación. El segundo segmento de  $T$  será entonces el que comienza donde termina el primer segmento ya construido, y termina donde dicha recta corta al segmento de  $S$  mencionado. Repetimos este proceso hasta cortar al último segmento de la  $S$ -poligonal. La poligonal resultante será  $T$ , que hemos representado en línea punteada.

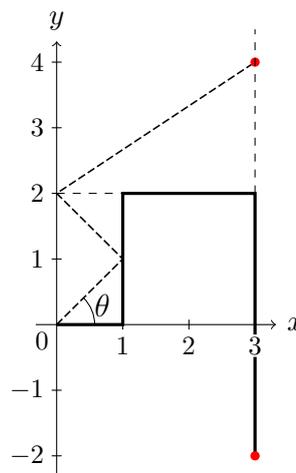


FIGURA 4.  $f = x^3 - 2x^2 - 2x - 4$ ,  
 $\theta = -45^\circ$ ,  $f(1) = -6$

El método de Lill nos dice entonces que la distancia entre los extremos de las poligonales, *medida convenientemente*, coincide con  $f(a) = f(\tan \theta)$ . En las Figuras precedentes observamos dos ejemplos de esta situación.

¿Cómo se calcula  $f(\tan \theta)$  entonces? Debemos medir la distancia entre los extremos de las poligonales  $S$  y  $T$  en relación a la **orientación** del último segmento de  $S$  y el signo del coeficiente de  $f$  con el cual se corresponde. Por ejemplo, en la Figura 3, el último segmento de  $S$  corresponde al coeficiente  $+6$ , y está orientado de abajo hacia arriba en el trazado de la poligonal. La poligonal  $T$ , termina en el punto  $(-3,1)$  y para medir la distancia con el extremo de  $S$ , debemos ir en la misma dirección de este segmento (de abajo hacia arriba) una cantidad de 2. Entonces esa magnitud tendrá el mismo signo que  $+6$ , es decir,  $f(\tan -45^\circ) = f(-1) = 2$ . Podemos verificarlo evaluando:  $f(-1) = 2$ . En la Figura 4, la distancia entre los extremos de las poligonales es igual a 6, y la medición nuevamente coincide con el sentido del segmento, que en este caso se corresponde con el coeficiente negativo  $-4$ . Luego  $f(\tan \theta) = f(1) = -6$ .

Veamos ahora el trazado de las poligonales en un ejemplo con más cambios de signo. Consideramos el polinomio  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 2$ . Para calcular  $f(-1)$ , obtenemos las poligonales de la Figura 5. La distancia entre sus extremos es 5, y el sentido de la medición es contrario al sentido del último segmento de  $S$ , que se corresponde con el coeficiente positivo  $+2$ . Por lo tanto  $f(\tan \theta) = f(-1) = -5$ .

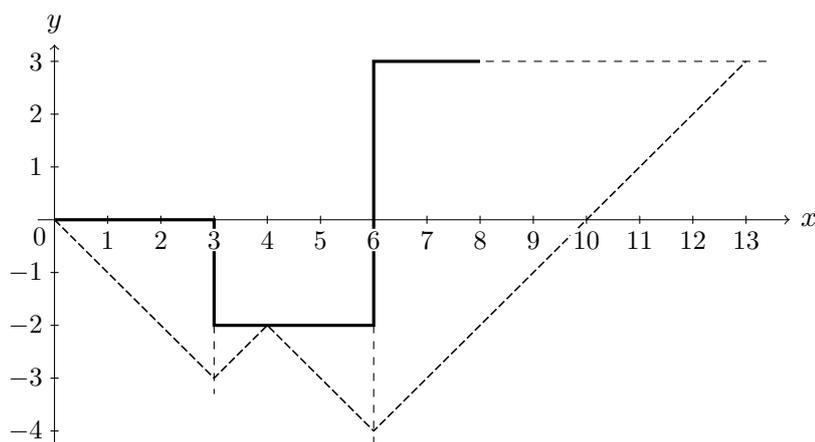


FIGURA 5.  $f = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 2$ ,  $\theta = -45^\circ$ ,  $f(-1) = -5$

Hasta aquí, hemos visto la operatoria con la que se rige este método. Estamos en condiciones de profundizar un poco más e intentar dilucidar la matemática subyacente.

**3.1. Un esbozo de demostración.** Por diversos motivos, el método de Lill ha pasado desapercibido a lo largo de los años, aunque hay diversos textos que lo han presentado. El texto de Turnbull (Turnbull, 1947, ch. 2, sec. 15) dedica una sección a su tratamiento. Un texto más moderno es el de Dan Kalman (Kalman, 2009, ch. 1, sec. 3). Si bien los textos difieren en la forma de encarar la construcción de las poligonales, tienen como denominador común realizar un primer acercamiento al

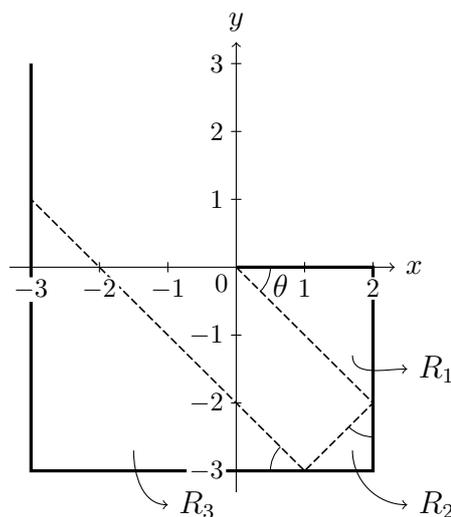


FIGURA 6.  $f = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ ,  $\theta = -45^\circ$ ,  $f(-1) = 2$

por qué del funcionamiento, mediante el establecimiento del vínculo natural con la forma de Horner.

Vamos a demostrar en el caso particular de  $f = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 6$  y  $\theta = -45^\circ$  que el método de Lill efectivamente nos da el valor de  $f(-1) = f(\tan -45^\circ)$ . Nuestro fin es mostrar de modo geométrico y en forma constructiva cómo la distancia entre los extremos de las poligonales, medida como corresponde, coincide con  $f(-1)$ .

La esencia del razonamiento es la que se sugiere en la Figura 6. Observamos allí que las poligonales  $T$  y  $S$  dan lugar a una serie  $R_1, R_2, R_3$  de triángulos semejantes, todos ellos poseyendo uno de sus ángulos igual a  $\theta$ . Con la intención de hacer más general el argumento, podemos pensar que  $\theta$  es un ángulo menor que 0, y por lo tanto, que  $a = \tan \theta < 0$ .

Teniendo en cuenta la observación del párrafo precedente, el cateto opuesto a  $\theta$  en el triángulo  $R_1$  tiene una longitud de  $-2 \tan \theta$ . Cuando pasamos a  $R_2$ , la longitud del cateto adyacente a  $\theta$  es la del segundo segmento de  $S$  menos la del cateto opuesto a  $\theta$  en  $R_1$ . Recordando que  $\theta$  es negativo, el cateto adyacente a  $\theta$  en  $R_2$  tiene una longitud igual a  $3 + 2 \tan \theta$  y esta cantidad es positiva debido al contexto de la figura: estamos sustrayendo de un segmento mayor, que mide 3, uno menor que mide  $-2 \tan \theta$ . Luego podemos afirmar que el cateto opuesto a  $\theta$  en  $R_2$  será  $(3 + 2 \tan \theta) \tan \theta$  y será una magnitud negativa. Siguiendo este razonamiento para interpretar los signos de los catetos, tenemos que el cateto adyacente a  $\theta$  en  $R_3$  tiene una longitud igual a  $5 + (3 + 2 \tan \theta) \tan \theta$ , magnitud positiva; por lo tanto el cateto opuesto a  $\theta$  es  $((3 + 2 \tan \theta) \tan \theta + 5) \tan \theta$ , magnitud negativa. Finalmente, la distancia entre las poligonales es igual a

$$((3 + 2 \tan \theta) \tan \theta + 5) \tan \theta + 6 = (((3 + 2a)a + 5)a + 6 = f(a).$$

La última igualdad es consecuencia de la forma de Horner de  $f$ .

Al parecer el método funciona, al menos en este ejemplo. Sin embargo, este argumento debe ser independiente del ángulo elegido y del tipo de poligonal. Es decir, deberíamos ver que esto funciona para cualquier polinomio y cualquier ángulo. Mas vayamos con calma, tal vez esto que parece tan sorprendente, quizás no lo sea, quizás ya estaba implícito en casos más simples como los polinomios de grado 1.

**3.2. Rastreado el método de Lill.** A riesgo de ser reiterativos, el método de Lill es sorprendente y sencillo por demás. Y cuando de un resultado matemático de esta índole se trata, nos desvela saber de dónde vino, cómo es que alguien pudo darse cuenta de su validez, cómo es que fue traído a la luz.

Lo interesante es que las ideas básicas están al alcance de la mano. Es cuestión de analizar en detalle qué ocurre con los polinomios de grado 1.

Supongamos entonces que  $f = ax + b$  es un polinomio de grado 1. En particular, que  $a$  es positivo y  $b$  negativo. En la Figura 7 observamos la  $S$ -poligonal correspondiente a  $f$  y las tres posibles  $T$ -poligonales dependientes de los valores que tome el ángulo  $\theta$ .

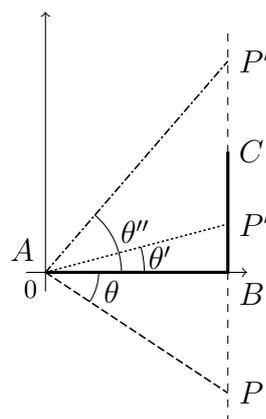


FIGURA 7. El caso lineal

Queremos mostrar que en este caso simple, ya encontramos la esencia del método de Lill. La idea es entonces mostrar que la distancias  $|PC|$ ,  $|P'C|$  y  $|P''C|$  que se presentan en la Figura 7 son iguales, salvo el signo, a  $f(\tan \theta)$ ,  $f(\tan \theta')$  y  $f(\tan \theta'')$ , respectivamente. Aquí es donde juega un papel el hecho de cómo medir.

**Proposición 3.1.** Sea  $f = ax + b$  un polinomio de grado 1, con  $b \neq 0$  y  $x = \tan \theta$  un número real, con  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Denotemos por  $C$  el extremo final de la  $S$ -poligonal y por  $P$  el extremo final de la  $T$ -poligonal. Entonces la distancia del segmento  $PC$  es igual a  $|f(\tan \theta)|$ . Más precisamente, el signo de  $f(\tan \theta)$  coincide con el de  $b$  si el sentido de  $PC$  es el mismo que el del segmento asociado a  $b$ ; en caso contrario, el signo es distinto.

*Demostración.* Vamos a considerar el caso en que  $a$  es positivo y  $b$  negativo tal como se ilustra en la Figura 7. Los otros casos son similares.

Comenzamos con el caso  $-\pi/2 < \theta < 0$ . La poligonal  $T$  asociada a  $\theta$  corta a la prolongación del segmento  $BC$  en un punto  $P$ . Como el sentido del segmento  $PC$  es el mismo del segmento  $BC$  (el último segmento de la  $S$ -poligonal asociada a  $f$ ) y este corresponde al coeficiente  $b$  que es negativo, obtendremos que  $f(\tan \theta)$  es negativo. Teniendo en cuenta que  $\tan \theta < 0$ , resulta que  $a \tan \theta$  también es negativo. Por lo tanto,  $|PB| = |a \tan \theta| = -a \tan \theta$ .

En consecuencia tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 |PC| &= |PB| + |BC| \\
 &= |a \tan \theta| + |b| \\
 &= -a \tan \theta - b \\
 &= -(a \tan \theta + b) \\
 &= -f(\tan \theta).
 \end{aligned}$$

Así,  $f(\tan \theta) = -|PC|$  como queríamos ver.

Consideremos ahora el caso  $\theta'$ . Sea  $P'$  el punto de intersección entre la  $T$ -poligonal asociada a  $\theta'$  y el segmento  $BC$ . Como en el caso anterior, dado que el sentido del segmento  $P'C$  es el mismo del segmento  $BC$ , también obtendremos que  $f(\tan \theta')$  es negativo. Como  $0 < \theta' < \pi/2$  entonces  $\tan \theta'$  también es positivo. Por lo tanto,  $|BP'| = a \tan \theta'$  y

$$\begin{aligned}
 |P'C| &= |BC| - |BP'| \\
 &= -b - a \tan \theta' \\
 &= -(a \tan \theta' + b) \\
 &= -f(\tan \theta')
 \end{aligned}$$

Concluimos entonces que  $f(\tan \theta') = -|P'C|$ .

Resta analizar el caso  $\theta''$ . En esta situación, siendo el sentido del segmento  $P''C$  contrario al del segmento  $BC$ , obtendremos que  $f(\tan \theta'')$  es positivo. Argumentando como en casos previos tenemos que

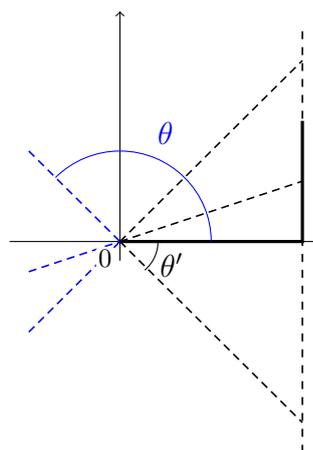
$$\begin{aligned}
 |P''C| &= |BP''| - |BC| \\
 &= a \tan \theta'' + b \\
 &= f(\tan \theta'').
 \end{aligned}$$

Esto completa la demostración. □

Podemos apreciar que la prueba es bastante directa en el caso de polinomios de grado 1. Para la prueba en el caso general necesitaremos, sin embargo, de más cuidado. Aunque antes vale la pena continuar con algunas consideraciones interesantes.

**3.3. Rango de  $\theta$ .** Hemos visto que el método de Lill nos permite calcular  $f(a)$  para  $a = \tan \theta$ , eligiendo  $\theta$  en el intervalo  $(-\pi/2, \pi/2)$ . De esta manera, el segmento inicial de  $T$  corta al segundo segmento de  $S$ , o a su prolongación, y esto permite comenzar a construir la  $T$ -poligonal. ¿Qué ocurre si elegimos  $\theta$  en el intervalo  $(\pi/2, 3\pi/2)$ ? Inicialmente la semirrecta que sale del origen conformando un ángulo  $\theta$  con el eje  $x$ , no se encuentra con  $S$ .

A modo de ejemplo, consideremos el caso en el que el polinomio comienza con un coeficiente positivo, y luego continúa con uno negativo. Tendremos entonces una situación como en la Figura 8. Vemos entonces que si  $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$ , la semirrecta correspondiente al primer segmento de  $T$ , no se interseca con  $S$ . Esta situación ha sido representada con el ángulo  $\theta$  marcado en azul en la figura. ¿Qué corresponde hacer en este caso?



Existe entonces una forma natural de interpretar esta situación, que es “prolongar  $T$ ” y encontrar a  $S$  en el semiplano derecho. Es decir, como la semirrecta azul no encuentra a  $S$  en el semiplano izquierdo, la prolongamos en sentido opuesto y lo hará en el semiplano derecho.

FIGURA 8. En azul  $\theta$ , en negro  $\theta' = \theta - \pi$ .

Al considerar esta prolongación en sentido opuesto, lo que estamos haciendo es considerar una semirrecta que sí se encontraría con la  $S$ -poligonal y que nos permitiría construir una  $T$ -poligonal (aquella que es generada por dicha semirrecta), pero en este proceso, hemos cambiado el ángulo inicial  $\theta$  por otro  $\theta' = \theta - 180$  como se indica en la figura. Lo relevante es que precisamente esto último, no es otra cosa que la expresión de la propiedad  $\tan(\theta \pm \pi) = \tan \theta$ .

Esta propiedad garantiza entonces la buena definición del procedimiento, es decir, podemos realizar el método de Lill con  $\theta'$ , y obtendremos  $f(\tan \theta') = f(\tan \theta)$ , que es lo que buscábamos desde un comienzo. Así vemos que el método de Lill en realidad no tiene restricciones a la hora de elegir un ángulo  $\theta$  en particular.

**3.4. Coeficientes perdidos.** Estudiemos cómo construir el diagrama de Lill cuando el polinomio tiene *coeficientes perdidos* o nulos. Por ejemplo, el caso  $f(x) = x^2 - 2$ . Una forma de dar con dicho diagrama es apelando a un argumento que involucra un proceso de paso al límite, valiéndonos de la continuidad de las funciones polinómicas.

Para ello consideramos  $\varepsilon > 0$  y definimos  $f_\varepsilon = x^2 - \varepsilon x - 2$ . La esencia del razonamiento es observar que  $f_\varepsilon$  “tiende a  $f$  cuando  $\varepsilon$  tiende a cero”, y la pregunta inmediata es, ¿será que los diagramas de Lill de los polinomios  $f_\varepsilon$  también convergen al diagrama de Lill de  $f$ ? La respuesta es sí, aunque en principio no queda claro que sería *converger al diagrama de Lill de  $f$* .

Apliquemos el método de Lill con el fin de calcular  $f_\varepsilon(1) = f_\varepsilon(\tan 45^\circ)$ . Hemos representado esto en la Figura 9. Podemos ver que el sentido de la medición entre los extremos de las poligonales coincide con el sentido del último segmento de  $S$ . De esta manera, concluimos que  $f_\varepsilon(1)$  tiene el mismo signo que el último coeficiente de  $f_\varepsilon$ .

Observando la figura, vemos que la distancia entre las poligonales es  $1 + \varepsilon$ . Por lo tanto,  $f_\varepsilon(1) = -(1 + \varepsilon)$  y esta última cantidad tiende a  $f(1) = -1$  cuando  $\varepsilon$  tiende a cero. Es decir, aplicar el método de Lill a los polinomios  $f_\varepsilon$  aproxima a  $f(1)$ , que es el resultado esperado de aplicar el método de Lill a  $f$ . En forma similar, se puede tratar el caso  $f_\varepsilon = x^2 + \varepsilon x - 2$  y convencerse de que el método de Lill aplicado a los polinomios  $f_\varepsilon$ , converge al método de Lill aplicado a  $f$ .

Establecidos sobre este resultado resulta natural definir el diagrama de Lill para  $f$  como el límite de los diagramas de Lill de los polinomios  $f_\varepsilon$ , obteniendo entonces el diagrama de la Figura 10.

Es sumamente interesante destacar que, a partir del razonamiento de aproximaciones desarrollado anteriormente, es posible ensayar un método para obtener el mismo diagrama en forma directa. Veamos esto continuando con el mismo ejemplo. La idea es pensar que nuestro polinomio es  $f = x^2 + 0x - 2$  o  $f = x^2 - 0x - 2$ . Independientemente del caso considerado, llegaremos al mismo diagrama. Analicemos el procedimiento considerando  $f = x^2 - 0x - 2$  (el caso límite del polinomio  $f_\varepsilon = x^2 - \varepsilon x - 2$ ).

El recorrido sería el siguiente. Primero una unidad hacia la derecha por  $x^2$ ; luego, *cero* unidades hacia la izquierda (tenemos aquí un cambio de signo) por el término  $-0x$ . Esta forma de proceder revela la interpretación que hacemos respecto del término  $-0x$ : interpretamos el efecto del mismo en el diagrama como un giro de una magnitud infinitesimal hacia la izquierda, que en el caso límite, se reduciría a cero, pero *nos dejaría mirando hacia la izquierda*. Esto produce

entonces el efecto de dar medio giro hacia la izquierda *en el lugar*. Finalmente, debemos dar medio giro hacia la derecha, los signos se mantienen, y terminamos moviéndonos 2 unidades hacia la derecha sobre el eje  $x$ . En total, la  $S$ -poligonal se ve como un segmento sobre el eje  $x$ , que va desde el origen hasta el punto  $(3, 0)$ .

Si tomábamos  $+0x$ , el recorrido hubiese sido: una unidad hacia la derecha por  $x^2$ , *cero* unidades hacia la derecha por el término  $+0x$ , y finalmente 2 unidades hacia la izquierda (cambio de signo) sobre el eje  $x$ , volviendo a terminar en el punto  $(3, 0)$ .

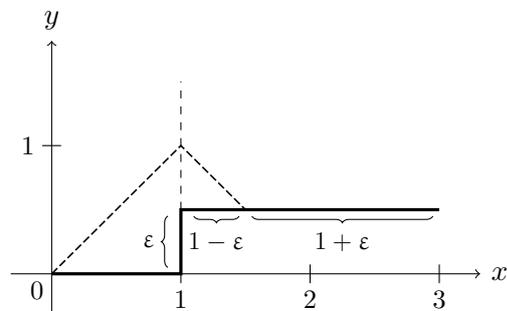


FIGURA 9. Diagrama para  $f_\varepsilon = x^2 - \varepsilon x - 2$

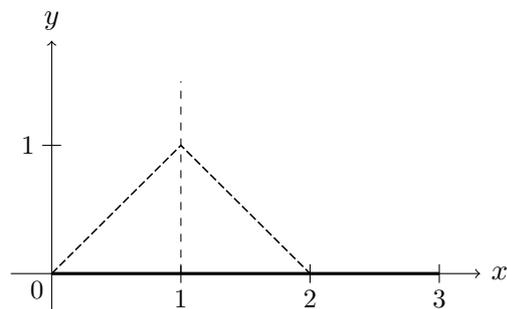


FIGURA 10. Diagrama de Lill para  $f = x^2 - 2$

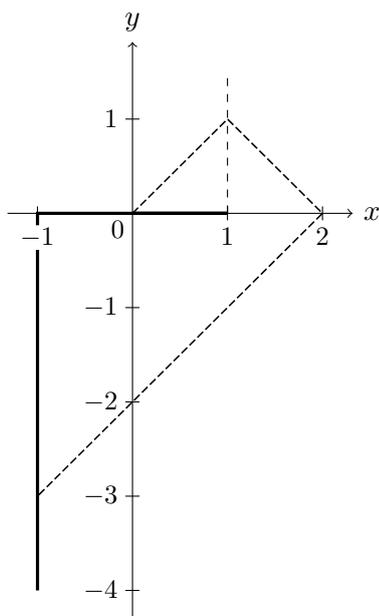


FIGURA 11.  $f = x^3 + 2x - 4$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $f(1) = -1$

Para terminar con el desarrollo del método, debemos mostrar como construir la  $T$ -poligonal. En la misma figura, podemos ver como construirla para un ángulo  $\theta > 0$  cualquiera. Notemos que en un diagrama correspondiente a un polinomio sin coeficientes nulos, la semirecta que parte del origen formando un ángulo  $\theta$  con el eje  $x$  y que da inicio a  $T$ , interseca al segmento de  $S$  que se corresponde con el segundo coeficiente de  $f$ , o a su prolongación en caso de ser necesario. En nuestro caso, el segundo coeficiente de  $f$  es nulo ¿Cómo asignarle un segmento en  $S$ ? La idea es pensar que la participación del término  $-0x$  en el diagrama, es la heredada por el término lineal en  $f_\varepsilon = x^2 - \varepsilon x - 2$ . En estos casos obteníamos un segmento vertical comenzando en el final del primer segmento de  $S$ , y su prolongación resultaba estar contenida en la recta vertical  $x = 1$ . La idea es imaginar lo que sucede en el caso límite: al hacer tender  $\varepsilon$  a cero, el pequeño segmento vertical desaparece, y sobrevive la prolongación del mismo.

Por lo tanto, la forma de construir  $T$  en este caso, descansa sobre el hecho de ubicar adecuadamente la prolongación del segmento nulo que se corresponde con  $-0x$ . Para ello consideramos la recta perpendicular al segmento inicial de  $S$  con pie en el final del mismo, es decir, la recta  $x = 1$ . Luego de hacer esto, es posible trazar la semirecta que da inicio a  $T$ , y obtener una intersección con dicha recta vertical. Así es posible formar el primer segmento de  $T$ . Entonces la poligonal continua de manera usual buscando cortar el tercer segmento de  $S$  o su prolongación, obteniendo así el diagrama de la Figura 10.

Podemos tomar entonces este método, como una forma económica de construir el diagrama de Lill en el caso de que el polinomio  $f$  tenga coeficientes nulos.

En la Figura 11 mostramos la construcción del diagrama de Lill para calcular  $f(1)$ , siendo  $f(x) = x^3 + 2x - 4$ . Comenzamos con la  $S$ -poligonal, moviéndonos una unidad hacia la derecha por  $x^3$ . Ahora, según lo que vimos, podemos considerar que el término siguiente es  $+0x^2$  o  $-0x^2$ . Tomemos por ejemplo  $+0x^2$ . Entonces corresponde girar a la derecha *en el lugar*  $90^\circ$ . Como el coeficiente que sigue tiene el mismo signo, volvemos a girar a la derecha  $90^\circ$ ; y en esta instancia ya hemos dado medio giro ( $180^\circ$ ) en sentido horario, por lo que *quedamos mirando hacia la izquierda*, y corresponde entonces avanzar en esa dirección una cantidad de 2 para llegar al punto  $(-1, 0)$ . Por último, al tener un cambio de signo, corresponde girar  $90^\circ$  hacia la izquierda, lo que produce *bajar* una cantidad de 4.

Para construir la  $T$ -poligonal, se procede de manera análoga al caso anterior. El detalle es el mismo: cuando salimos desde el origen con la semirrecta que forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $x$ , consideramos la prolongación del término nulo  $+0x^2$  como una semirrecta perpendicular al segmento anterior en la dirección pertinente, para encontrarnos con ella y formar el primer segmento de  $T$ . Para el resto de la construcción se prosigue como siempre, obteniendo así el diagrama de la figura.

#### §4. Una demostración del Método de Lill

Esperamos que los ejemplos previos hayan contribuido a convencer al lector de la validez del método de Lill. No queremos dejar de mencionar que no encontramos una demostración del método en los textos consultados: el libro (Kalman, 2009) dedica su atención a un caso particular del método: cuando los extremos de las poligonales coinciden; es decir, la situación de haber encontrado una raíz del polinomio en cuestión. Por otro lado el libro (Turnbull, 1947), si bien desarrolla el método en general, sólo alcanza a ofrecer una demostración de un caso particular, tal como hicimos en la Sección 3.1. Vamos entonces a proporcionar una demostración propia del resultado.

La demostración que daremos es por inducción en el grado del polinomio y se basa sobre la posibilidad de determinar *la naturaleza del ángulo*  $\theta$  sin requerir de toda la poligonal  $S$ . En concreto, queremos ser capaces de determinar si  $\tan \theta$  será una magnitud positiva o negativa, sin tener a disposición el comienzo de las poligonales. Veremos que esto es un hecho inherente a la construcción de las poligonales  $S$  y  $T$ .

Observamos primero un hecho conocido:  $\tan \theta > 0$  para  $\theta$  en el primer y tercer cuadrante y  $\tan \theta < 0$  para  $\theta$  en el segundo y cuarto cuadrante. En segundo lugar, observamos que la poligonal  $S$  está compuesta por una sucesión de segmentos verticales y horizontales, por lo que las rectas que contienen los segmentos de  $S$ , son todas rectas o bien verticales, o bien horizontales.

Finalmente observamos la mecánica con la que se construye  $T$  a partir de las consideraciones anteriores: una vez que tenemos  $S$ , elegimos un ángulo  $\theta$  apropiado para comenzar a construir la  $T$ -poligonal. Si por ejemplo,  $\theta < 0$  como en la Figura 12, tenemos que la semirrecta que da inicio a  $T$  tiene pendiente negativa, y el primer segmento de  $T$  se forma al encontrarse esta recta con una recta vertical (aquella que contiene al segundo segmento de  $S$ ), y esto será así incluso en el caso en el que  $f$  tenga coeficientes nulos, como hemos visto en §3.4.

Luego, corresponde girar  $90^\circ$  hacia la derecha o hacia la izquierda respecto de esta semirrecta inicial, e ir al encuentro de una recta horizontal *viajando* sobre una recta de pendiente positiva, para formar así el siguiente segmento de  $T$ . Al volver a girar  $90^\circ$  grados, volvemos a obtener una recta de pendiente negativa y el proceso se repite.

Entonces todos los segmentos de  $T$  que se encuentran con rectas verticales lo harán con pendiente negativa, y todos los segmentos de  $T$  que se encuentran con rectas horizontales lo harán con pendiente positiva.

Como podemos ver en la figura, el mismo comportamiento ocurriría si  $\theta$  produjese una semirrecta en sentido opuesto, hacia el segundo cuadrante. Una observación similar tiene lugar cuando  $\tan \theta > 0$ . Estamos en presencia del siguiente resultado:

**Proposición 4.1.** *Si  $\theta$  es tal que  $\tan \theta < 0$ , los segmentos de  $T$  que se encuentran con rectas verticales, están contenidos en rectas de pendiente negativa, y los que se encuentran con rectas horizontales, están contenidos en rectas de pendiente positiva. Un resultado análogo se obtiene para  $\tan \theta > 0$ , esto es, los segmentos de  $T$  que se encuentran con rectas verticales, estarán contenidos en rectas de pendiente positiva, y los que se encuentran con rectas horizontales, estarán contenidos en rectas de pendiente negativa.*

Teniendo a disposición el resultado anterior, procedemos a dar una demostración del método de Lill.

**Teorema 4.2** (El método de Lill). *Sea  $f$  un polinomio de grado  $n > 1$  y consideremos la  $S$ -poligonal asociada a  $f$ . Dado un número real  $\alpha = \tan \theta$ , con  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2)$  consideremos la  $T$ -poligonal asociada a  $\theta$ .*

*Entonces la distancia entre los extremos finales de  $S$  y  $T$ , medida como corresponde, coincide con  $f(\tan \theta)$ .*

*Demostración.* La Proposición 3.1 muestra que el resultado es válido si  $n = 1$ .

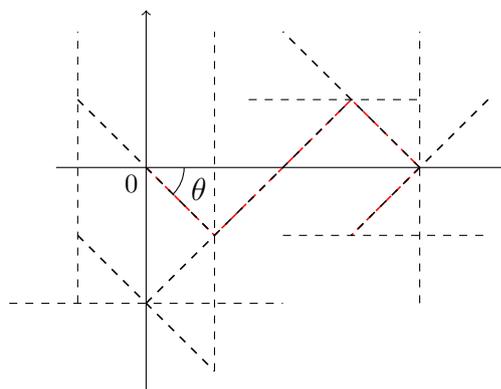


FIGURA 12. Comportamiento de las rectas que contienen a los segmentos de  $T$ . En rojo una posible  $T$ .

Supongamos entonces que el resultado vale para todo polinomio de grado menor que  $n$ , y sea  $f$  un polinomio de grado  $n > 1$ . Consideremos un posible final para el diagrama de Lill de  $f$ , como se muestra en la Figura 13. Debemos ver que la distancia de  $D$  a  $E$ , medida como corresponde, coincide con  $f(\tan \theta)$ . Para esto, debemos conocer el signo del segmento  $BE$  que se corresponde con  $a_0$ , el último coeficiente de  $f$ . Tenemos dos casos para considerar: cuando  $a_0 < 0$  y cuando  $a_0 > 0$ . Consideremos primero el caso  $a_0 < 0$ . Bajo este supuesto, como el sentido de la medición es el mismo que el del segmento  $BE$ , queremos ver que  $f(\tan \theta) = -|DE|$ . En la figura tenemos que  $|DE| = |BE| - |BD|$ , y por otro lado  $|BD| = |CB| \tan \theta$ .

La clave está en advertir que podemos aplicar el método de Lill al polinomio que tiene el mismo diagrama que  $f$  hasta el anteúltimo segmento. Para hacer esto debemos replicar la idea de Horner una vez. En efecto, llamando  $a = \tan \theta$  y escribiendo  $f$  en forma descendente, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
 f(a) &= a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \cdots + a_2 a^2 + a_1 a + a_0 \\
 (*) \quad &= (a_n a^{n-1} + a_{n-1} a^{n-2} + \cdots + a_2 a + a_1) a + a_0 \\
 &= h(a) a + a_0,
 \end{aligned}$$

donde  $h$  es un polinomio de grado  $n - 1$  y cuyo diagrama de Lill coincide con el diagrama de Lill de  $f$  hasta el paso previo a la construcción de los últimos segmentos de  $S$  y  $T$  en la figura. Luego podemos calcular la distancia de  $C$  a  $B$  usando el método de Lill, ya que aplicando la hipótesis inductiva para  $h$ , tenemos que esta distancia, medida como corresponde, coincide con  $h(\tan \theta)$ .

Así, tenemos que  $|BD| = |CB| \tan \theta = |h(\tan \theta)|$ . Ahora suceden dos cosas interesantes que nos permiten concluir la demostración: la primera, es que como estamos bajo el supuesto de que  $a_0 < 0$ , el diagrama nos dice que el segmento  $BE$  tiene el mismo signo que el segmento anterior, pues fue construido girando a la derecha respecto de este. Esto nos indica que aplicando el método de Lill para  $h$ , resulta ser  $h(\tan \theta) > 0$ . La segunda es que la  $T$ -poligonal para  $f$  está incidiendo

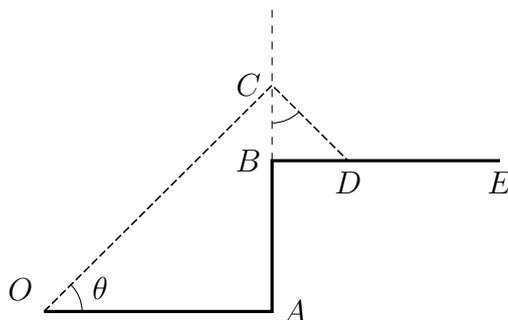


FIGURA 13. Un posible final de diagrama para un polinomio  $f$  cualquiera

en la recta horizontal que contiene a  $BE$  con pendiente negativa; esto implica, por 4.1, que  $\tan \theta > 0$ . Luego

$$\begin{aligned} -|DE| &= -(|BE| - |BD|) \\ &= -(|a_0| - |h(\tan \theta)| |\tan \theta|) \\ &= -(-a_0 - h(\tan \theta) \tan \theta) \\ &= a_0 + h(\tan \theta) \tan \theta \\ &= f(\tan \theta), \end{aligned}$$

donde en el último paso se ha usado (\*). El caso  $a_0 > 0$  es similar, concluyendo así la demostración.  $\square$

Por una cuestión de espacio no hemos considerado todos los posibles diagramas de Lill para esta elección de  $S$ , ni tampoco las posibles poligonales  $S$  que podríamos haber considerado, pero es posible demostrar en cada caso el resultado de manera análoga, y se deja como ejercicio para el lector.

## §5. Conclusiones

Es claro que no estamos ni cerca de haber agotado el potencial del método de Lill. Muchas cuestiones han quedado fuera de este artículo. Por ejemplo, es posible hacer un tratamiento de raíces sucesivas, *aplicando doblemente* el método sobre un mismo diagrama (ver (Kalman, 2009)).

Por otro lado, programar la construcción de las poligonales es un ejercicio interesante, no solo desde la programación, sino desde lo visual: encontramos muy didáctico observar los applets de la página de Kalman (<http://dankalman.net/ume/lill/animation1.html>), donde podemos ver el método de forma animada. Una construcción similar podría hacerse, por ejemplo, en GeoGebra para explorar las raíces de polinomios de manera interactiva.

Hemos visto como el método de Lill conjuga varios tópicos de matemática elemental de una forma elegante, novedosa, pero además no trivial. El proceso de construcción y análisis de diagramas dio lugar al surgimiento de enriquecedores debates en los que el despliegue de estos tópicos nos permitieron no solo aprender, sino que constituyeron momentos lúdico-creativos que hallamos formativos para el quehacer matemático. Creemos que el método de Lill abre las puertas para tratar un montón de cuestiones matemáticas de forma interesante, ya sea a la hora de trabajar en el aula, como en un curso de formación de profesores. Esperamos compartir con el lector el interés y la que generó en nosotros el método de Lill.

## Bibliografía

Childs, L. N. (2009). *A Concrete Introduction to Higher Algebra*. Springer, New York.

Kalman, D. (2009). *Uncommon Mathematical Excursions. Polynomia and Related Realms*. The Mathematical Association of America (Incorporated).

Turnbull, H. (1947). *Theory of Equations*. Oliver and Boyd, Edinburgh; Interscience, New York.

JAVIER PEDRO GARCÍA

*Ciclo Básico Común, Universidad de Buenos Aires – Departamento de Matemática y Estadística, Universidad Torcuato Di Tella*

✉ *javgrzgarcia@gmail.com*

---

Recibido: *1 de abril de 2019*.

Aceptado: *27 de junio de 2019*.

Publicado en línea: *28 de agosto de 2019*.

---