Editorial

El 18 de marzo de 2019, los matemáticos David Harvey y Joris Van Der Hoeven anunciaron que descubrieron un nuevo algoritmo para multiplicar dos números naturales, el cual se presume que requiere la mínima cantidad de operaciones posibles [D. Harvey and J. Van Der Hoeven. *Integer multiplication in time* $O(n \log n)$. 2019. hal-02070778]. Sin entrar en detalles finos, podemos pensar que "realizamos una operación" cada vez que "multiplicamos dos números de una cifra", o podría ser "multiplicamos dos números de dos cifras", hablar de 1 o 2 cifras no cambia la esencia del problema.

Recordemos brevemente algo de la historia de este problema. En 1960, en la Universidad Estatal de Moscú, se llevaba a cabo un seminario sobre *Problemas de matemática en cibernética* dirigido por el muy destacado matemático Andréi Kolmogórov (reconocido por sus notables trabajos, principalmente en probabilidad, topología y análisis de Fourier). Allí, A. Kolmogórov pone en el centro de la escena el problema de comprender cuántas operaciones requiere multiplicar dos números de n cifras cada uno.

Considerando que realizamos una operación cada vez que multiplicamos dos números de una cifra resulta que, usando el método tradicional que aprendemos en nuestra niñez, para multiplicar 374×726 necesitamos multiplicar todos los dígitos entre sí, así que terminamos realizando 9 operaciones. En general, multiplicar dos números de n cifras con el método tradicional requiere n^2 operaciones.

Volviendo al seminario, los presentes eran completamente conscientes del carácter fundacional que tiene determinar si existe un método o algoritmo para multiplicar que sea más eficiente que el tradicional. Aparentemente, según nos cuenta Anatoly Karatsuba en [*The complexity of computations*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Vol 211 (1995)], A. Kolmogórov creía que no había mejor método. A. Karatsuba sospecha que, tal vez, esto se debía a que hay indicios de que el método tradicional (o uno muy similar) era usado por babilonios y egipcios más de 3500 años atrás, así que si hubiera un algoritmo mejor tal vez ya debería haber algún indicio de él. La cuestión es que A. Karatsuba, uno de los alumnos de A. Kolmogórov presentes en el seminario, luego de una semana intensa de trabajo, encontró un método mejor, que requiere básicamente $n^{1,58}$ operaciones, en lugar de n^2. ¿Cómo es el método? Básicamente consiste en lo siguiente.

Supongamos que a y b tienen 4 cifras, es decir

$$a = a_1 \times 10 + a_0$$
$$b = b_1 \times 10 + b_0.$$

El método tradicional se basa en que si realizamos los siguientes 4 productos:

$$\begin{array}{ccc} & a_1b_0 & a_0b_0 \\ a_1b_1 & a_0b_1 & \end{array}$$

entonces obtenemos ab pues

$$ab = a_1b_1 \times 100 + (a_1b_0 + a_0b_1) \times 10 + a_0b_0.$$

En cambio el método de Karatsuba se basa en que si conocemos los siguientes 3 productos

$$a_1b_1 \qquad (a_1 + a_0)(b_1 + b_0) \qquad a_0b_0$$

entonces obtenemos ab pues

$$ab = a_1b_1 \times 100 + \big((a_1 + a_0)(b_1 + b_0) - a_1b_1 - a_0b_0\big) \times 10 + a_0b_0.$$

Esta reducción de 4 a 3 multiplicaciones, aplicada repetidas veces en números grandes, provoca que el algoritmo de Karatsuba necesita solamente n^q con $q = \log_2(3)$ operaciones (en lugar de las n^q con $q = \log_2(4) = 2$ que necesita el algoritmo tradicional). Conviene aclarar que parte de la esencia de lo que estamos discutiendo radica en que, en principio, es computacionalmente más sencillo sumar o restar que multiplicar. Es por ello que no nos preocupa que en el algoritmo de Karatsuba necesitemos hacer unas restas que en el método tradicional no son necesarias. Sin embargo, por otro lado, la tecnología se ha desarrollado a tal punto que actualmente hay procesadores con una arquitectura en la que el costo de multiplicar es similar al de sumar.

El inesperado descubrimeinto de A. Karatsuba impulsó un enorme desarrollo del problema de determinar exactamente cuántas operaciones son necesarias para multiplicar dos números de n cifras cada uno. En 1971, Arnold Schönhage y Volker Strassen mejoran el método de Karatsuba y desarrollan un algoritmo que requiere

$$n \log_2(n) \log_2(\log_2(n))$$

operaciones. Además conjeturaron que debía haber un método mejor que el de ellos, el cual requiriera solo $n \log_2(n)$ operaciones. Este año, casi 50 años más tarde, David Harvey y Joris Van Der Hoeven encontraron un algoritmo como el conjeturado en 1971. Este método combina resultados diversos de matemática. Dicho muy rápidamente transforma el problema de multiplicar dos naturales a y b en un problema de multiplicar dos polinomios muy especiales en varias variables sobre los números complejos. Estos polinomios tienen de particular que pueden ser multiplicados muy eficientemente gracias a herramientas que provee la teoría de transformadas rápidas de Fourier.

Este descubrimiento es muy importante pues la cantidad de operaciones necesarias para casi cualquier problema de matemática depende de la cantidad de operaciones necesarias para multiplicar dos números naturales. Es como si este problema constituyera una unidad de medida básica que existe en la naturaleza. Es por ello que, si bien estamos celebrando este descubrimiento, cabe señalar que todavía no se ha demostrado que este algoritmo sea el mejor posible, y por lo tanto esta unidad de medida básica no está completamente determinada.

Este primer número del año cuenta con dos trabajos principales. En uno de ellos se aborda la enseñanza de la estadística en la escuela media, la cual es de suma importancia. En su trabajo, Aldana González nos muestra cómo es posible introducir la teoría de los contrastes de hipótesis haciendo uso de métodos de simulación. El artículo es interesante para el lector que tenga curiosidad por entender mejor cómo la ciencia saca conclusiones a partir de datos de una muestra, y es especialmente útil para el docente que busca ejemplos concretos, con datos reales y en sintonía con la intuición, para tratar estos temas en el aula de la escuela media. En el segundo artículo se describe la experiencia de un equipo con integrantes de diferentes unidades académicas de la Universidad Nacional de La Plata, trabajando en la enseñanza de la matemática en aulas que incluyen a estudiantes sordos. La experiencia abordada comienza con la inscripción, en 2017, de una alumna sorda en la carrera de Licenciatura en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y luego se nutre con la inclusión de un estudiante de Licenciatura de Turismo de la Facultad de Ciencias Económicas.

Como siempre, contamos con las curiosidades del número 2019 y los problemas para pensar.

En febrero del año que viene se llevará a cabo en Lisboa la *Conferencia de Estudio* vinculada al ICMI Study 25 "Profesores de Matemática trabajando y Aprendiendo en Grupos Colaborativos". El tema es de central importancia en la labor docente en general y particularmente en lo referente a la formación continua. En este número Cristina Esteley nos presenta detalles de la conferencia e invita a toda la comunidad a participar.

Leandro Cagliero

Nota: Es muy importante para la RevEM contar con la colaboración de ustedes a través del envío de contribuciones de calidad para publicar. Solicitamos enviar los artículos preferentemente a través del sistema en la página web, pero si tienen inconvenientes pueden hacerlo a la dirección de correo electrónico que figura abajo.

Página web: https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index

Correo electrónico: revm@famaf.unc.edu.ar