Misceláneas

Matrices Nilpotentes

Recordemos que una matriz cuadrada A de n filas y por tanto n columnas se dice nilpotente, si alguna potencia de A es igual a la matriz nula, esto es, si es posible encontrar un número natural $k \geq 1$ de manera que $A^k = 0$.

Ejemplos de matrices nilpotentes son:

(i)=la matriz nula

$$(ii) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (iii) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(iv) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (vi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Recordemos que dos matrices cuadradas A, B del mismo número de filas se dicen conjugadas si es posible encontrar una matriz invertible P de manera que

$$A = P^{-1}BP$$

Por ejemplo si

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calculando la inversa de P y las multiplicaciones indicadas se tiene que

$$(iii) = P^{-1}(ii)P.$$

Esto es, (ii) es conjugada a (iii). Este no es un hecho casual, se demuestra que si A es una matriz no nula, nilpotente de dos filas, siempre A es conjugada a la matriz (ii).

Para esto, construir un vector $v = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \neq 0$ de manera que

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = Av = A \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \neq 0.$$

La matriz $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se calcula del modo siguiente, a, c son las soluciones de

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

b, d son las soluciones de

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Con un poco de esfuerzo, aunque con las mismas técnicas, se demuestra que si A es una matriz distinta de la matriz nula, cuadrada de tres filas y nilpotente, entonces A es conjugada a una de las matrices $(iv), (v)$.

Para el caso de una matriz A nilpotente, un teorema nos dice que es conjugada a su forma de Jordan[1]. Por cierto, en este texto no definiremos matrices en la forma de Jordan, para sugerimos al lector algunos de los libros de Gentile; libro de Larrotonda de álgebra, libro de Hoffman-Kunze, Algebra Lineal; wikipedia, http://www.wikipedia.org; o pregunte en google: Forma de Jordan.

Para finalizar deseamos comentar que las matrices nilpotentes deparan sorpresas agradables, hay problemas no resueltos alrededor de ellas. Un problema es el siguiente.

Fijamos una matriz nilpotente A. Calculamos el centralizador de A. Esto es, calculamos

$$\{B \text{ matriz} : AB = BA\}$$

El problema es: Para cada matriz nilpotente B que conmuta con A calcular su forma de Jordan.

Para el caso de la matriz (ii), un cálculo directo permite verificar que las matrices que conmutan con (ii), son las matrices

$$\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \text{ números arbitrarios}\}.$$

[1] Camile Jordan, matemático francés (1838, 1922)