Una propiedad de la cicloide

Mabel N. Avio, Edgardo N. Güichal, María F. Lusente

Un poco de historia:

Desde la antigüedad, los matemáticos sabían que muchas curvas interesantes podían ser definidas y dibujadas mediante sencillos instrumentos mecánicos. De estas "curvas mecánicas", las cicloides son las más notables.

Esta curva que fue denominada la "Helena" de los geómetras, por las controversias a que dió origen durante el siglo XVII, fue relacionada con algunos problemas de mecánica, especialmente con la construcción del péndulo ideal. Huygens había descubierto que un punto ideal provisto de masa, que oscilase sin rozamiento bajo la acción de la gravedad en una cicloide vertical, tendría una oscilación independiente de la amplitud del movimiento. En una trayectoria circular, como la del péndulo ordinario, esa independencia es sólo aproximada, lo que se tenía como un grave inconveniente para su utilización en los relojes de precisión.

Mersenne, quien probablemente había tomado conocimiento de esta curva a través de Galileo, le propuso su estudio a Roberval, cuando éste llegó a París, en 1628.

En esta nota queremos destacar una propiedad particular de la cicloide, de la cual se podrán deducir dos importantes aplicaciones.

Definición: La cicloide es la curva descripta por un punto fijo de una circunferencia, cuando ésta rueda sin deslizarse, a lo largo de una recta.

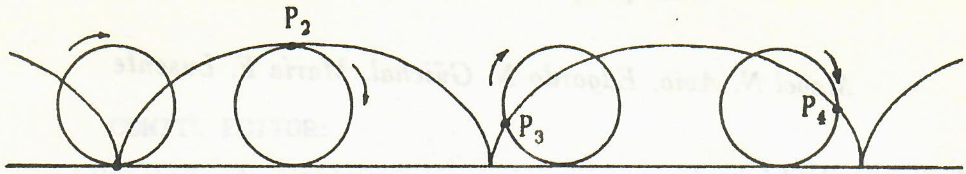

Fig. 1

En la Fig. 1 vemos cuatro posiciones del punto P, perteneciente a la circunferencia rodante.

El aspecto general de la cicloide es el de una serie de arcos que se apoyan sobre la recta. Pueden obtenerse variaciones de esta curva eligiendo el punto P, ya sea en el interior del círculo encerrado por la circunferencia (como sobre un rayo de una rueda) o en la prolongación de un radio (como en el reborde de la rueda de un tren). Ver Fig. 2.

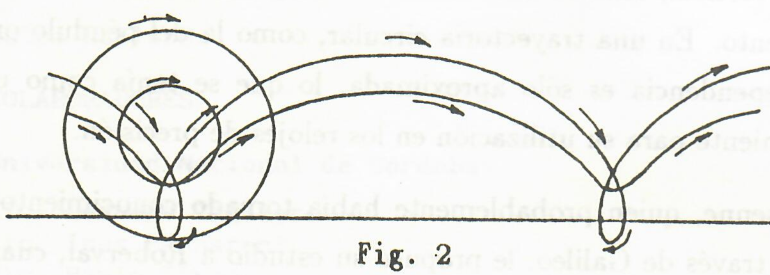
Fig. 2

También se puede hacer rodar la circunferencia sobre otra circunferencia, en lugar de una recta, obteniéndose curiosos resultados según la relación que haya entre sus respectivos radios. Tolomeo, quien vivió en el siglo II, las utilizó en forma muy ingeniosa buscando describir los movimientos aparentes de los planetas del sistema solar, postulando un universo esencialmente geocéntrico.

En todos estos casos las nuevas curvas reciben nombres que las distinguen de la primera que hemos mencionado: cicloide acortada, cicloide alargada (o trocoides, como las llamó Roberval, derivando el nombre de la palabra griega que significa "rueda"), hipocicloide, epicicloide, etc., reservándose el nombre de cicloide para aquélla.

Una propiedad de la cicloide: Entre las muchas propiedades interesantes de la cicloide, queremos destacar aquí una, para lo cual consideraremos en lo que sigue, únicamente el arco OPB_0, de la cicloide, generada por la circunferencia C_0, de radio r (ver Fig. 3), es decir que C_1 representa la posición de la circunferencia C_0, luego de que ésta ha recorrido un trayecto igual a la mitad de su longitud. .

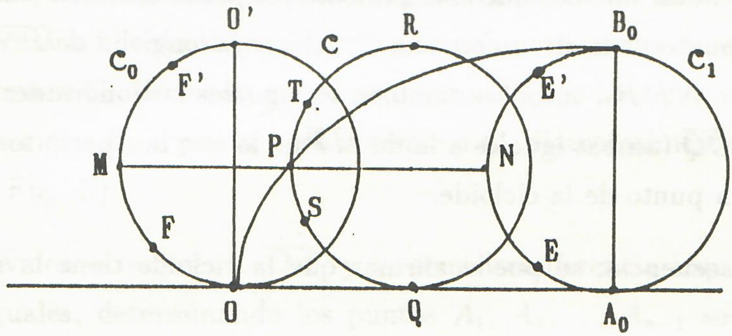

Fig. 3

Si C denota una posición intermedia cualquiera de la circunferencia, que determina el punto P de la cicloide y trazamos por P una paralela a la recta sobre la que aquella se desplaza, queda determinado el segmento $\overline{MN}$, por la intersección de dicha recta con las mitades izquierdas de las circunferencias C_0 y C_1 y es claro que la longitud del segmento $\overline{MN}$ es igual a la longitud de $\overline{OA_0}$ es decir πr, cualquiera sea el punto P. Más aún, se observa de inmediato que la longitud del segmento $\overline{MP}$ es igual a la longitud de $\overline{OQ}$, que por otra parte es igual a la longitud del arco PSQ de la circunferencia C, pues C_0 se desp'aza sobre la recta sin resbalar.

Como ya hemos visto que la longitud de $\overline{MN}$ es igual a la longitud de la semicircunferencia que genera la cicloide, llegamos a la conclusión de que la longitud de $\overline{PN}$ es igual a la longitud del arco PTR de la circunferencia C, donde R es el punto diametralmente opuesto a Q.

Por otra parte, es claro que las longitudes de los arcos MFO, PSQ y NEA_0 sobre las circunferencias C_0, C y C_1, respectivamente, son iguales y análogamente, se observa que son iguales las longitudes de los arcos $MF'0'$, PTR y $NE'B_0$, sobre las mismas circunferencias.

Se debe notar además que el argumento recíproco también vale, ya que si P es un punto de la circunferencia C, tal que la longitud de $\overline{PN}$ es igual a la del arco $NE'B_0$, entonces también son iguales las longitudes del arco PSQ y de $\overline{OQ}$ (ambas iguales a la de $\overline{MP}$), lo que nos permite asegurar que P es un punto de la cicloide.

En consecuencia, se puede afirmar que la cicloide tiene la siguiente propiedad:

Propiedad (P)

Cualquiera sea el punto P, perteneciente al arco OPB_0 de la cicloide generada por la circunferencia C_0, de radio r, la longitud del segmento $\overline{PN}$, es igual a la longitud del arco $NE'B_0$ sobre la circunferencia C_1 y en consecuencia la suma de las longitudes del segmento $\overline{PN}$ y la del arco NEA_0 sobre la circunferencia C_1, tiene el valor constante πr.

Recíprocamente, si P es un punto sobre una circunferencia C, tangente a la recta sobre la que se desplaza C_0 y que está ubicada "entre" C_0 y C_1 y la longitud de $\overline{PN}$, paralelo a dicha recta, es igual a la longitud del arco $NE'B_0$, sobre la circunferencia C_1, entonces P pertenece al arco de la cicloide generada por la rotación de C_0.

Esta propiedad de la cicloide tiene dos importantes consecuencias:

1) permite dar una construcción geométrica sencilla de la curva;

2) permite calcular fácilmente la medida del área encerrada por un arco de la curva y la recta sobre la que rueda la circunferencia que la genera.

Construcción Geométrica: Se pueden obtener tantos puntos como se deseen, situados sobre un arco de cicloide, por medio de la siguiente construcción geométrica:

Se dibuja un segmento $\overline{OA}$, de longitud igual a la de la circunferencia que generará la ciloide, digamos $2\pi r$, y en su punto medio A_0, se dibuja la circunferencia C_1, de modo que el segmento $\overline{OA}$ sea tangente a C_1 en A_0. Denotemos con B_0 el punto perteneciente a C_1 diametralmente opuesto a A_0. (ver Fig. 4.)

Se dividen el segmento $\overline{OA_0}$ y la semicircunferencia izquierda en n partes iguales, determinando los puntos A_1, A_2, ..., A_{n-1} sobre el segmento $\overline{OA_0}$ (de derecha a izquierda) y los puntos B_1, B_2, ...,B_{n-1} sobre la semicircunferencia izquierda B_0A_0 (desde B_0 hacia A_0), respectivamente.

Por cada punto $B_j (j = 1, 2, ..., n-1)$ se traza una recta paralela al segmento $\overline{OA}$ y se determina sobre esta recta el punto C_j (a la izquierda de B_j) de modo que la longitud de $\overline{C_jB_j}$ sea igual a la de $\overline{A_jA_0}$. Llamaremos además $C_0 = B_0$ y $C_n = 0$.

La propiedad (P) nos asegura que los puntos C_j (j = 0, 1, 2, ..., n) pertenecen a un arco de cicloide.

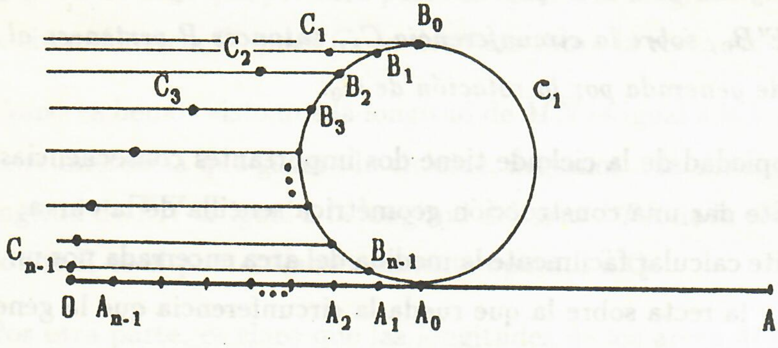

Fig. 4

Repitiendo una construcción similar (simétrica) del lado derecho de C_1, se pueden obtener puntos que pertenecen a la otra mitad del arco de la cicloide.

Area encerrada por un arco de cicloide : Tanto la definición del concepto de medida del área encerrada por una curva plana, como su posterior cálculo efectivo, están en la base misma del cálculo diferencial e integral. Sin embargo, en el caso de la cicloide, podemos apelar a un argumento intuitivo, basado en la propiedad (P), que nos permitirá determinar un número que nos resultará muy natural aceptar como medida del área de la región A, encerrada por un arco de cicloide y la recta sobre la que se desplaza la circunferencia que la genera. Su cálculo fue intentado ya por Galileo y obtenido en forma precisa por Roberval (1634) y Torricelli (1643).

En general, para una región plana F, denotaremos con $m(F)$ la medida de su área, sin entrar en demasiados detalles sobre una definición general, ya que sólo nos veremos involucrados con la región A ya definida, partes de la misma y círculos.

Mirando la Fig. 5, podemos aceptar que

$m(A) = m(A_1) + m(A_2) + (A_3)$

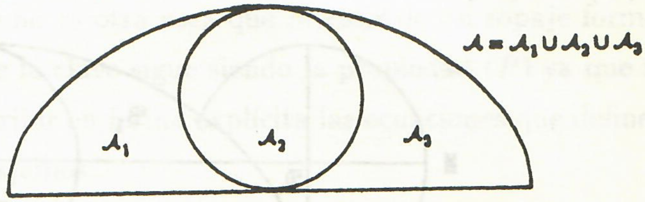

Fig. 5

Pero A_2 es un círculo de radio r, de modo que $m(A_2) = \pi r^2$ y por razones de simetría, se tiene que $m(A_1) = m(A_3)$. En consecuencia, nuestro problema se reduce a determinar $m(A_1)$. Para ello, observemos la siguiente figura

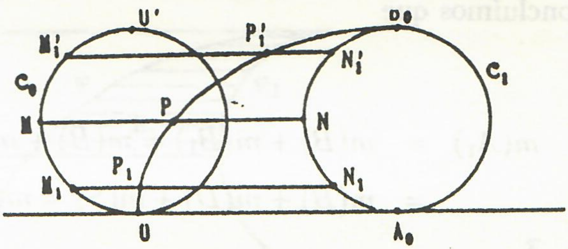

Fig. 6

El punto M es aquí el punto medio de la semicircunferencia izquierda de C_0 y el segmento $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{OA_0}$.

Sean M_1 y M_1' dos puntos sobre dicha semicircunferencia, simétricos respecto del segmento $\overline{MN}$. Trazando paralelas a éste, que pasen por M_1 y por M_1', determinamos los puntos N_1 y N_1' sobre C_1, P_1 y P_1' sobre la cicloide.

Siguiendo los argumentos utilizados para probar la propiedad (P) es fácil ver que las longitudes de los segmentos $\overline{M_1P_1}$ y $\overline{P_1'N_1'}$ son iguales.

A medida que M_1 se desplace desde M hacia o, el punto M_1' se desplazará desde M hacia o′ en forma simétrica y esto nos permite afirmar, teniendo en cuenta la observación anterior, que $m(B_1) = m(D \cup D') = m(D) + m(D')$.

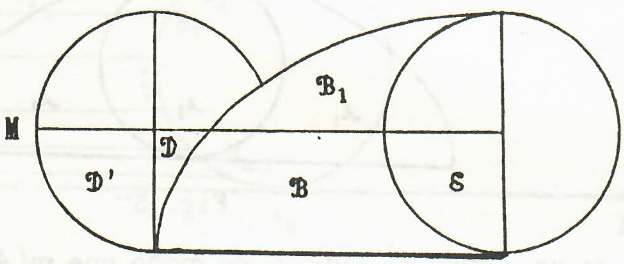

Fig. 7

Por otra parte, es claro que la región D' es congruente con S, con lo cual concluímos que

$$\begin{aligned} m(A_1) &= m(B) + m(B_1) = m(B) + m(D) + m(D') = \\ &= m(B) + m(D) + m(S) = m(B \cup D \cup S) \end{aligned}$$

Pero $D \cup B \cup S$ es un rectángulo de base πr y altura r, lo que nos lleva a afirmar que

$$m(A_1) = \pi r r = \pi r^2$$

Luego

$$\boxed{m(A) = 3\pi r^2}$$

Para finalizar (y para llevar paz a nuestras conciencias) veamos el argumento que nos permite probar en forma rigurosa la parte más crítica de nuestros cálculos, es decir, que $m(B_1) = m(D_1)$ donde $D_1 = D \cup D'$ (ver Fig. 7), usando las propiedades de la integral definida aunque, de hecho, se podrá ver que no es otra cosa que revestir de un ropaje formal las ideas ya vistas y que la clave sigue siendo la propiedad (P) ya que ni siquiera es necesario escribir en forma explícita las ecuaciones que definen las curvas con que trabajamos.

En efecto, pensemos a y como variable independiente y notemos con φ_0, φ_1 y ψ las funciones de y definidas en el intervalo $[0, 2r]$ cuyos gráficos nos dan respectivamente, las circunferencias C_0 y C_1 y la cicloide.

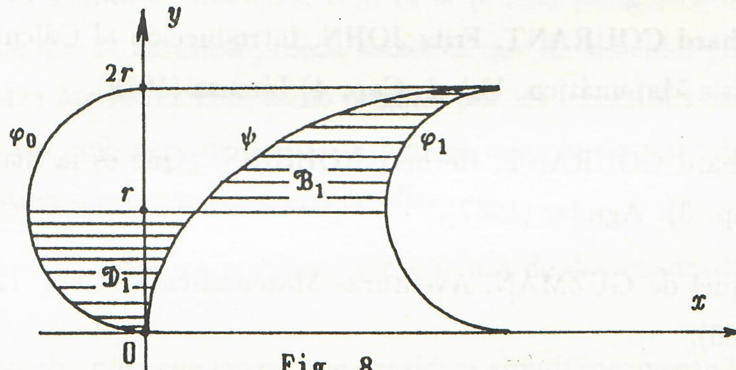

Fig. 8

Sean $\quad x(y) = \varphi_1(y) - \psi(y); \quad x_1(y) = \psi(y) - \varphi_0(y).$

La propiedad (P) se traduce ahora de la siguiente forma:

(P') $\quad x(y) = x_1(2r - y)$ para todo $y \in [0, r]$ pues los valores y y $2r - y$ son simétricos respecto del punto medio del intervalo $[0, 2r]$.

Se tiene entonces que

$$
\begin{aligned}
m(D_1) &= \int_0^r x_1(y)dy = \quad \text{(haciendo el cambio de variable u = 2r-}y\text{)}\\
&= -\int_{2r}^{r} x_1(2r-u)du = \\
&= \int_r^{2r} (2r-u)du = \quad \text{(usando la propiedad}(P')\text{)}\\
&= \int_r^{2r} x(u)du = m(B_1) \qquad Q.E.D.
\end{aligned}
$$

Bibliografía

1 Richard COURANT, Fritz JOHN. Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático. Vol. 1, Cap. 4) Limusa (1979).

2 Richard COURANT, Herbert ROBBINS. ¿Qué es la matemática? (Cap. 3). Aguilar (1967).

3 Miguel de GUZMAN. Aventuras Matemáticas. (Cap. 12). Labor (1986).

4 E. KASNER, J. NEWMAN. Matemáticas e Imaginación (II). Biblioteca Científica Salvat, Vol. 71 (1987).

5 Hugo STEINHAUS. Instantáneas Matemáticas. Biblioteca Científica Salvat, Vol. 62 (1987).

Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca.