Revista de Educación Matemática
Volumen 32, N°2 (2017), páginas 5 – 18
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

UN CAMINO HACIA LA DERIVADA: SECUENCIA DE ACTIVIDADES PARA CONSTRUIR EL CONCEPTO DE VELOCIDAD INSTANTÁNEA EMPLEANDO LA VELOCIDAD MEDIA

Rocío Díaz Martín, Martín Moroni, Fredy Restrepo

§1. Introducción

La siguiente propuesta tiene por objetivo introducir conceptos básicos del análisis diferencial. Está destinada a estudiantes de los últimos años de nivel secundario, de nivel terciario o de los primeros años de nivel universitario. Puede ser trabajada tanto en cursos de matemática como de física.

Proponemos un problema de semi-realidad (Skovsmose, 2000) que pretendemos modelizar (Bassanezi, 1994) y pensar junto al uso del software GeoGebra. Hemos elegido este programa por ser de código abierto, con una interfaz fácil de usar y porque conecta geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo diferencial e integral. Su manejo posibilitará gran dinámica en la formulación de conjeturas y en la visualización de resultados.

Nuestro planteo supone que la noción de función ha sido tratada previamente. A partir del trabajo con promedios y áreas buscaremos que surjan ideas, conceptos y resultados que permitan introducir la noción de derivación. Para ello requerimos particularmente que se haya pensado con anterioridad, al menos de manera intuitiva, la premisa que el área bajo la curva de velocidad en un cierto intervalo de tiempo representa la distancia recorrida en dicho período de tiempo.

La secuencia que presentamos consta de tres partes, cada una se inicia con el enunciado de una actividad y seguidamente proponemos un modo de resolución y uso de la tecnología. Las tres actividades están encadenadas y conviene seguirlas en orden ya que forman parte de un mismo problema. Al exponer una posible resolución también imaginamos posibles anticipaciones e intervenciones del docente.

Cabe destacar que la elaboración de la presente secuencia está inspirada en el trabajo realizado por Viola y Nieto (2016). Allí el problema que se plantea consiste en obtener datos sobre la distancia recorrida por un automóvil contando solamente con datos sobre su velocidad. Luego de leer dicho artículo imaginamos una posible continuación de las actividades que allí se proponen y formulamos el problema que procedemos a detallar.

§2. Secuencia del problema

Parte 1

Enunciado de la actividad:

> Los colectivos interurbanos no pueden exceder los 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Si un chofer supera este límite de velocidad suena inmediatamente una alarma en todo el colectivo. El pasado lunes, en uno de los controles a los colectivos, se descubrió que la unidad N°68 tenía desactivada dicha alarma. Las autoridades de regulación citan a Enrique, chofer de dicho colectivo, para interrogarlo, pues pretenden descubrir si ha cometido la imprudencia de exceder los límites de velocidad reglamentados. Enrique asegura no haber desactivado la alarma y pide disculpas por no haberse fijado en el estado del dispositivo. Desde que empezó su turno sólo ha hecho un viaje, ha ido de Córdoba Capital a La Falda. Asegura no haber superado el límite permitido y para justificarse comenta que empezó su turno a las 12:00 hs en Córdoba Capital y llegó a las 14:15 hs a la ciudad de La Falda.
>
> ***Si ustedes fueran los responsables de hacer el control, ¿creen que Enrique excedió o que no excedió el límite de velocidad de los 90*** $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ***durante el viaje de Córdoba Capital a La Falda?***

En el planteo hay una intencionalidad clara en propiciar una situación problema que interpele a los estudiantes desde una semi-realidad (Skovsmose, 2000) que tenga un alto componente de plausibilidad. Pretendemos que esta condición invite a los estudiantes a aceptar el desafío y de esta forma consolidar el primer peldaño hacia un escenario de investigación, como propone Skovsmose (2000). Por otra parte, quisimos presentar el problema bajo términos que otorguen gran protagonismo al estudiante en lo que respecta a la construcción de saberes. Bajo estas condiciones, los docentes afrontan altos niveles de incertidumbre dado que son desplazados de su "zona de confort" (Penteado, 1999) para convertirse en receptores de propuestas y preguntas por parte de los estudiantes que, de antemano, pueden ser impredecibles. En este sentido, queremos hacer notar que la pregunta formulada al final del enunciado tiene un grado de apertura alto, si consideramos la clasificación de tareas propuesta por Ponte (2005).

En esta instancia proponemos discutir el problema, entender qué pregunta, buscar el dato de la distancia entre Córdoba Capital y La Falda (78.8 km), llegar a la idea de *velocidad media*, pero concluir que no se puede saber si el chofer es ”inocente” pues puede haber excedido la velocidad máxima reglamentada en algún tramo del recorrido. Es fundamental promover una discusión que lleve a percibir que la velocidad media es un promedio que puede no representar la realidad. Pretendemos que se empiece a pensar en la *velocidad instantánea* sin introducir este término. Un puente posible en este sentido podría ser asociarla a la velocidad que marca el velocímetro del colectivo.

A partir de los datos que da explícitamente el problema (tiempo) y los investigados por los alumnos (distancia Córdoba - La Falda) podría calcularse la velocidad media en el intervalo de tiempo considerado y luego representarse con el uso del software, tal como mostramos en la Figura 1:

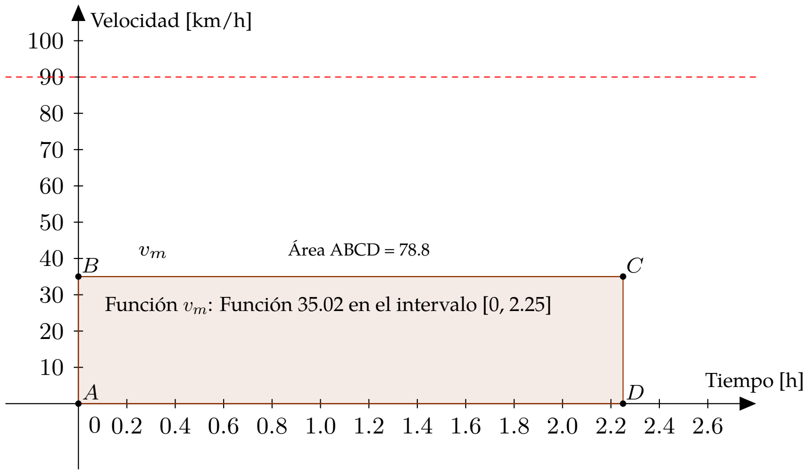


FIGURA 1. Gráfico que representa la velocidad media.

A la hora de hacer los cálculos y el gráfico de la velocidad media surge la necesidad de trabajar con intervalos de tiempo no enteros medidos en horas. Entonces, el trabajo en la unidad de horas representa una dificultad extra a tener en consideración, debiéndose pensar los minutos como fracciones de hora (por ejemplo 30 minutos son media hora, 15 minutos son un cuarto de hora, 10 minutos son $\frac{1}{6}$ de hora, etcétera). El valor hallado para la velocidad media (que denotamos v_m) es el cociente entre 78.8 km y 2.25 h, es decir, 35.02 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ aproximadamente. Ésta puede representarse explorando comandos de GeoGebra que permiten introducir funciones a trozos. Por ejemplo, se puede usar el comando *Función* cuya sintaxis es

Función [<*fórmula de la función*>, <*valor inicial del intervalo*>, <*valor final del intervalo*>]

y aplicado a nuestro caso queda $v_m(x) = \textit{Función}[35.02, 0, 2.25]$. Además, para verificar que la distancia recorrida (área bajo la curva) es la correcta, podría construirse un rectángulo cuyos vértices sean los puntos $A = (0, 0)$, $B = (0, 35.02)$, $C = (2.25, 35.02)$ y $D = (2.25, 0)$ utilizando el comando *Polígono* (ubicado en la barra de herramientas del software) y luego calcular su área con el comando *Área* de GeoGebra (haciendo click en la figura construida). Si ya se ha trabajado la noción de integración, podría utilizarse directamente el comando *Integral* cuya sintaxis es

Integral [<*función*>, <*extremo inferior del intervalo*>, <*extremo superior del intervalo*>]

y que en nuestro caso queda *Integral* $[v_m, 0, 2.25]$.

Como dijimos anteriormente, debería quedar claro que con los datos aportados hasta el momento por el problema no es posible concluir respecto de la actuación del colectivero.

La necesidad de contar con más información sobre la situación da pie a la segunda parte de esta secuencia.

Parte 2

Enunciado de la actividad:

> Las autoridades no están convencidas de la inocencia de Enrique y se ponen a investigar. Se encuentran con varios reclamos por parte de los pasajeros que aseguran que dicho colectivero "maneja muy rápido". Pero sin pruebas no pueden estar seguros de los hechos reales. Deciden recorrer las terminales de las localidades intermedias para tener más datos del viaje de Enrique. Encuentran lo siguiente:
> - Llega a Villa Carlos Paz a las 12:45 hs y vuelve a salir a las 12:55 hs.
> - Llega a Cosquín a las 13:30 h y vuelve a salir a las 13:35 hs.
> - Llega a Valle Hermoso a las 13:55 hs y vuelve a salir a las 14:00 hs hasta detenerse en La Falda.
>
> ***¿Qué nuevas conclusiones pueden sacar los reguladores?***
> ***¿Son suficientes?***

La propuesta ahora consiste, en primer lugar, en buscar nuevamente las distancias entre las localidades para trabajar con valores reales de distancias y tiempos utilizados para recorrerlas. Estos valores son de fácil acceso y nosotros elegimos aquellos que arroja Google Maps: Córdoba Capital - Villa Carlos Paz: 35.8 km, Villa Carlos Paz - Cosquín: 23 km, Cosquín - Valle Hermoso: 16.8 km y Valle Hermoso - La Falda: 3.2 km. Luego, pretendemos que se refine el cálculo de velocidades medias considerando los nuevos datos (ver Figura 2) y compararlas con la primera parte.

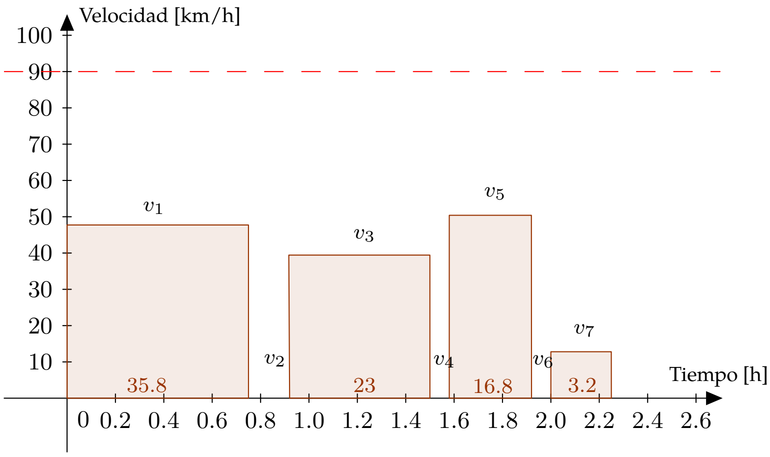


FIGURA 2. Gráfico que muestra un refinamiento de velocidades medias.

En la Figura 2 la letra v denota velocidad media y cada subíndice indica un tramo del recorrido del colectivo:

- v_1: velocidad media durante el recorrido Córdoba - Villa Carlos Paz (su valor está dado por el cociente entre los 35.8 km y tres cuartos de hora, es decir, alrededor de 47.73 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$),
- v_2: velocidad media durante el reposo en la terminal de Villa Carlos Paz (su valor es cero),
- v_3: velocidad media durante el recorrido Villa Carlos Paz - Cosquín (su valor está dado por el cociente entre los 23 km y siete doceavos de hora, es decir, alrededor de 39.43 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$),
- $v4$: velocidad media durante el reposo en la terminal de Cosquín (su valor es cero),
- v_5: velocidad media durante el recorrido Cosquín - Valle Hermoso (su valor está dado por el cociente entre los 16.8 km y un tercio de hora, es decir, 50.4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$),
- v_6: velocidad media durante el reposo en la terminal de Valle Hermoso (su valor es cero) y
- v_7: velocidad media durante el recorrido Valle Hermoso - La Falda (su valor está dado por el cociente entre los 3.2 km y un cuarto de hora, es decir, 12.8 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$).

Nuevamente, utilizando alguno de los comandos de GeoGebra mencionados anteriormente, es conveniente verificar que los cálculos de las velocidades medias son correctos, es decir, que el área bajo cada curva de velocidad media es la distancia entre cada una de las localidades (en la Figura 2 los números ubicados dentro de cada rectángulo indican tales valores). A su vez, se puede comprobar que la suma total de las áreas bajo las curvas de velocidades medias arroja el valor 78.8, es decir, el valor de la distancia total entre Córdoba y La Falda.

Seguidamente sugerimos discutir sobre la continuidad de la velocidad en función del tiempo. Una vez convencidos de que la función de velocidad respecto del tiempo debe ser continua, proponemos que los estudiantes esbocen una curva de la velocidad del colectivo durante las dos horas y cuarto que duró el viaje y que sea, precisamente, continua. Para tal fin planteamos a los alumnos que tracen dicha función sobre el mismo gráfico utilizado anteriormente para representar velocidades medias. Será sumamente necesario utilizar el hecho, ya conocido, que la distancia recorrida en un cierto intervalo de tiempo es el área bajo la curva velocidad en dicho intervalo.

Esta etapa es más compleja y es conveniente una intervención activa del docente quien puede alentar a trabajar en grupos. Para resolver lo planteado (trazar una posible curva de velocidad que sea continua y que esté en correspondencia con los datos aportados por el problema) sugerimos se exploren comandos en GeoGebra como el que posibilita la construcción de polígonos. Por cada intervalo de tiempo en que el colectivo va de una localidad a otra puede construirse un polígono con las siguientes dos características:

- Uno de sus lados debe ser uno de dichos intervalos de tiempo (ya que en cada localidad el colectivo sale del reposo, por lo que la velocidad de inicio es cero y al finalizar cada tramo del viaje el colectivo estaciona en una terminal, por lo que la velocidad final será cero también).

- El polígono debe tener igual área a la proporcionada por la velocidad media en el intervalo temporal elegido.

Al mismo tiempo, la poligonal resultante deberá representar una función velocidad, esto es, deberá ser una función y, más aún, deberá ser una función continua. A la vez, se podría remarcar que encierra un área total de valor 78.8, es decir, la distancia total recorrida por el colectivo. Un ejemplo de una tal función de velocidad se muestra en la Figura 3 al unir los puntos marcados en el gráfico. Para esto se utilizó el comando *Poligonal* de GeoGebra. Esperamos que haya variedad en las propuestas para la función velocidad por parte de los estudiantes.

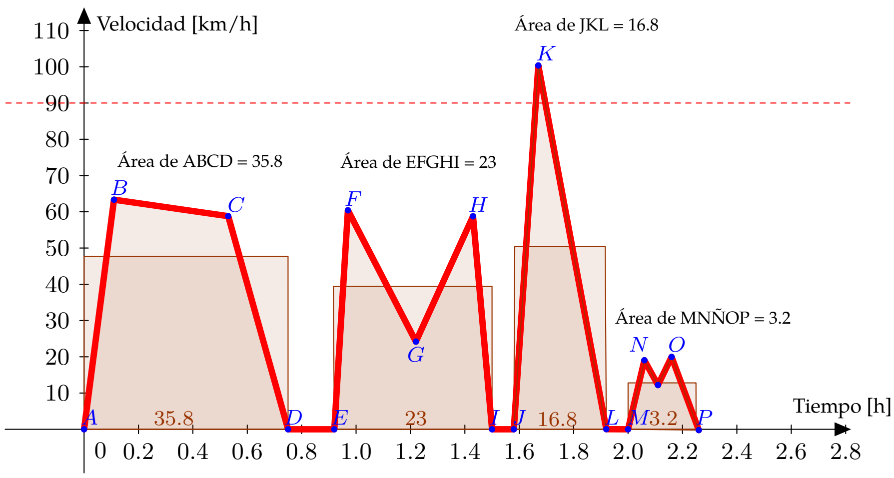


FIGURA 3. Velocidad como función continua.

Una vez que todos los grupos hayan hecho sus propuestas sería oportuno hacer un análisis comparando las gráficas de velocidades continuas obtenidas por los estudiantes. Debería ser notorio que no existe una única función de velocidad que respete las condiciones dadas (ser una curva continua y encerrar ciertos valores de área) sino que, por el contrario, se pueden construir infinitas. Este análisis permitirá obtener nuevas conclusiones para determinar si Enrique excedió o no el límite máximo permitido para la velocidad.

Debemos dar una respuesta a las preguntas de esta parte de la secuencia:

> ***¿Qué nuevas conclusiones pueden sacar los reguladores?***
> ***¿Son suficientes?***

Como manifestamos anteriormente, hay un crisol de posibilidades para representar la función de velocidad. Cotejando nuevamente los gráficos de los estudiantes pretendemos que éstos sean clasificados en dos grupos: aquellos en los que la velocidad supera los 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ en algún instante de tiempo (nuestra gráfica de la Figura 3 estaría en esta categoría) y aquellos donde la velocidad no supera los 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ en ningún punto. Podría darse el caso en que alguno de los dos grupos es vacío y en dicho caso debería surgir el desafío de construir entre todos los alumnos una función de velocidad que cumpla con la cualidad faltante.

A partir del análisis anterior, concluimos que los datos aún no son suficientes para determinar si Enrique superó o no el límite de velocidad reglamentado. Esto motiva a solicitar nuevos datos.

Previamente a ingresar en la última parte de la secuencia, nos interesa hacer notar que lo desarrollado hasta este momento permite avanzar hacia el planteo de la siguiente pregunta:

¿La curva de velocidad corta a las curvas de velocidades medias?

Para poder dar respuesta a esta pregunta se propone que se esboce una curva de velocidad (Figura 3) superpuesta al gráfico de velocidades medias (Figura 2). Al realizar una puesta en común, en todos los gráficos se evidenciará que si bien las funciones de velocidad de distintos estudiantes pueden variar, todas cortarán a las curvas de velocidades medias (ver las cruces marcadas en la Figura 4). Entonces, de la comparación entre los gráficos de los estudiantes es posible obtener la siguiente conclusión:

"La velocidad media en un intervalo de tiempo es siempre alcanzada por la función velocidad en dicho intervalo de tiempo"

.

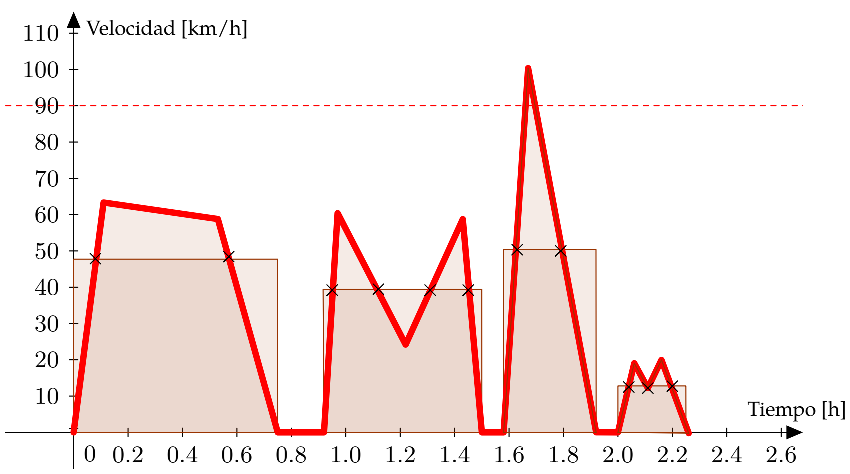


FIGURA 4. Una función velocidad y las velocidades medias en distintos intervalos de tiempo.

Vayamos a la última parte de la secuencia.

Parte 3

Enunciado de la actividad:

> Las autoridades de regulación de los colectivos continúan la investigación y buscan los reclamos efectuados por escrito por parte de algunos pasajeros. Llaman a aquellos que han dejado sus datos. Al hacer las entrevistas se encuentran con que uno de los pasajeros ha tomado fotos del paisaje con su celular. Todas las fotos tienen la hora a la que han sido tomadas. Tres fotos llamaron la atención de las autoridades. Se trata de fotos de la Ruta 20, del trayecto Córdoba - Carlos Paz, donde pudieron identificar las distancias entre los paisajes. En la primera foto, tomada a las 12:30 hs, aparece un cartel con la inscripción "desvío a 10 km". En la segunda foto, con hora 12:35, se puede ver el puente del desvío y sobre él una publicidad de la fábrica de cemento que dice que se encuentra a 5 km. La tercera, sacada a las 12:38 hs, es la foto de la fábrica de cemento.
>
> ***Esta nueva información ¿permite absolver o condenar a Enrique?***

Es con esta última parte de la secuencia donde pretendemos alcanzar una conclusión definitiva, es decir, determinar si Enrique superó o no el límite de velocidad de 90 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Quizás sea conveniente pausar la lectura y pensar si con esta nueva información Enrique es "culpable o inocente". A continuación daremos su resolución.

Procedamos como en las actividades anteriores calculando nuevas velocidades medias de acuerdo a los nuevos datos. A partir de la información otorgada por la primera y segunda foto sabemos que el colectivo recorrió 10 km en 5 minutos ($\frac{1}{12}$ de hora). Entonces, en dicho intervalo de tiempo la velocidad media del colectivo fue el cociente entre 10 km y $\frac{1}{12}$ h, es decir, 120 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. De los datos sobre la segunda y tercera foto obtenemos que el colectivo viajó 5 km en 3 minutos ($\frac{1}{20}$ de hora). Por lo tanto, entre que se tomó la segunda foto y la tercera, la velocidad media fue de 100 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

De las discusiones surgidas a lo largo esta secuencia, sabemos que la velocidad media en cierto intervalo de tiempo no es necesariamente la función de velocidad del colectivo durante dicho intervalo de tiempo. Pero en la Parte 2 de esta secuencia de trabajo concluimos que la función de velocidad en un intervalo de tiempo siempre toma, en algún punto (instante de tiempo), el valor de la velocidad media en tal intervalo temporal. Esto permite deducir que Enrique superó los 90 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ ya que la función de velocidad del colectivo alcanzó los 120 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ en algún instante de tiempo entre las 12:30 hs y las 12:35 hs y también tomó el valor de 100 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ en algún instante de tiempo entre las 12:35 hs y las 12:38 hs.

Si bien ya hemos develado el misterio, el trabajo con los estudiantes puede continuar. Por ejemplo, se podría discutir sobre la redundancia de los datos en esta parte. Por otro lado, con el fin de revisitar lo realizado en la Parte 2, se podrían representar las velocidades medias en un nuevo gráfico así como trazar posibles curvas de velocidad del colectivo entre la hora 12:30 y la hora 12:38. Proponemos que, si se opta por graficar la información otorgada en esta parte de la actividad, se proceda de forma análoga a lo sugerido en la Parte 2.

Como cierre de la secuencia planteamos discutir con los estudiantes en torno al siguiente interrogante:

> ***¿Cómo podrían obtener la velocidad del colectivo en un instante preciso de tiempo?***
> ***¿Qué propuestas imaginan?***
> ***¿Qué datos requieren sus métodos?***

Durante toda la secuencia se ha trabajado con velocidades medias y con el trazado de posibles curvas de velocidad. La necesidad de contar con nuevos datos para resolver el interrogante (*¿Superó Enrique el límite de velocidad reglamentado?*) ha hecho surgir cada una de las partes de esta propuesta de trabajo. Necesitábamos saber cómo había sido la función de velocidad en cada instante. Al considerar datos con una mayor precisión en el tiempo comenzamos a acercamos a la idea de *límite* y hemos podido convencernos que el colectivo alcanzó ciertos valores de velocidad en ciertos rangos de tiempo (por ejemplo tomó el valor 120 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ en algún instante de tiempo entre las 12:30 hs y las 12:35 hs). En este sentido, entendiendo la velocidad como *tasa de cambio o variación* de la posición respecto del tiempo, para conocer la velocidad en un instante de tiempo, por ejemplo a las 12:35 hs, podríamos requerir los datos sobre sucesivas posiciones del colectivo en tiempos cercanos a las 12:35 hs (por derecha o por izquierda). El valor al que *tiendan* los cocientes entre distancias recorridas en intervalos de tiempo entre instantes sucesivos que se acerquen a las 12:35 hs, es decir, las velocidades medias en los intervalos considerados, será el valor de la velocidad en dicha hora, es decir, la *velocidad instantánea*. Si bien contar con infinitos datos de la realidad es imposible (esta secuencia no terminaría), mientras más información sobre tiempos y posiciones del colectivo tengamos, más nos podremos *aproximar* al valor real de velocidad instantánea, o sea, al valor que marcó el velocímetro del colectivo en cierta hora. Posteriormente podremos hablar de la función *velocidad* como la derivada de la función posición.

En resumen, consideramos que la secuencia propuesta es un camino que nos permitirá introducir la derivación como un proceso de límite de cocientes que indican tasas de cambio, resaltando su carácter local. Imaginamos que en posteriores actividades se podría continuar pensando en la interpretación geométrica de la derivada de una función como la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función en un punto. Teniendo presente esta secuencia se podría reconstruir la pendiente de la recta tangente a la curva de velocidad desde el concepto de aceleración.

§3. Comentarios sobre la matemática: Integrar para derivar

Esta secuencia puede ser también trabajada en cursos donde se haya introducido la noción de integración. Creemos que nuestra propuesta puede aportar una relación entre integración y derivación. Ésta se puede dar a partir de demostrar (no formalmente en una primera etapa) el *Primer Teorema Fundamental del Cálculo* a través del *Teorema del Valor Medio para Integrales* como procedemos a enunciar y vincular a continuación.

El Teorema del Valor Medio para Integrales expresa, en términos más generales, la conclusión de la Parte 2. Es decir, enmarcado dentro de las actividades realizadas anteriormente, puede visualizarse en el hecho que la función de velocidad (que es continua) en un intervalo de tiempo siempre corta a la velocidad media en dicho intervalo (ver Figura 4).

El Teorema del Valor Medio se enuncia típicamente en términos que no involucran una integral. Establece que si una función F es derivable sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ de la recta real, entonces existe algún punto t_0 en el intervalo abierto (a, b) tal que

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(t_0).$$

Pero,

¿Qué quiere decir "función derivable"?
¿Qué representa el miembro derecho de la igualdad?

Recordemos que a partir de la secuencia propuesta aún no sabemos qué quiere decir "función derivable", ni entendemos la notación F'. Sin embargo, nosotros podemos llegar a una expresión equivalente a la anterior a partir de lo realizado en la Parte 2 y que sí entendamos.

Pensemos que la función F representa la posición del colectivo, y que los valores a y b son los extremos de un intervalo de tiempo. Así, en nuestro problema, el miembro izquierdo de la igualdad es la velocidad media del colectivo en dicho intervalo de tiempo (ya que $F(b) - F(a)$ indica la distancia que se recorrió entre la hora a y la hora b, y $b - a$ expresa el tiempo que tomó recorrerla). Sabemos que la velocidad media calculada en un intervalo de tiempo es siempre alcanzada por la función de velocidad en algún punto de dicho intervalo. Entonces, denotando con la letra v la función de velocidad continua, nuestro resultado es que existe un instante t_0 entre a y b tal que:

"la velocidad media entre a y b es igual a $v(t_0)$".

La versión para integrales (áreas en nuestro caso) aparece cuando expresamos la distancia recorrida entre los tiempos a y b como el área (o la integral) comprendida por la curva de velocidad entre los tiempos a y b. Si el estudiante conoce la noción de integración puede expresar esto con la siguiente notación

$$\int_a^b v(t)\, dt\,.$$

Luego, podrá escribir la velocidad media entre los tiempos a y b como el cociente

$$\frac{\int_a^b v(t)\, dt}{b - a}\,.$$

Finalmente, la versión del Teorema del Valor Medio para Integrales se resume, en nuestro contexto, en que existe algún instante de tiempo t_0, entre a y b, que satisface la igualdad

$$\frac{\int_a^b v(t)dt}{b-a} = v(t_0)\,.$$

La existencia de un instante t_0 entre a y b que satisface esta igualdad coincide con la existencia de las cruces en la Figura 4. En conclusión, la Parte 2 de nuestra secuencia da cuenta de una versión visual del Teorema del Valor Medio. Recordemos que no hubo demostración formal, sino que la conclusión se obtuvo a partir de la comparación entre los gráficos que debían proponer los estudiantes.

Pasemos ahora a vincular este resultado con el Primer Teorema Fundamental del Cálculo y comencemos a introducir la *derivada*. Para ello retomamos la discusión final dada en la Parte 3. Imaginamos que ésta puede desembocar en considerar un proceso de límite en el miembro izquierdo de la última igualdad:

Supongamos que queremos saber la velocidad que registró el velocímetro del colectivo a la hora 12:35, o sea en el punto

$$b = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{12} = \tfrac{7}{12}.$$

Consideremos instantes sucesivos (crecientes) de tiempo a_n menores que b que se acerquen cada vez más b (es decir, cuando n tienda a infinito, a_n tienda a b). Cabe aclarar que la formalidad de la escritura dependerá del curso en el que se esté trabajando, pero los conceptos (de sucesión, de límite, etc.) sí deberían aparecer. Obtenemos, entonces, la velocidad instantánea en el punto b a partir de considerar

$$\lim_{a_n \to b} \frac{\int_{a_n}^b v(t)dt}{b-a_n} = v(b)\,.$$

(Puede pensarse que se llega al mismo resultado si se consideran instantes de tiempo decrecientes mayores que b que se acercan a b). Nuevamente subrayamos que la formalidad en las expresiones deberá adaptarse a cada curso. Este procedimiento de tomar límite o de ver a dónde tienden los cocientes que reflejan la variación de cierta cantidad o función en el tiempo o en la variable de la cual depende la función (en nuestro caso, el cociente es entre distancia recorrida y tiempo utilizado para recorrerla), lleva el nombre de *derivación*. En nuestro caso estamos *derivando* una función que depende del tiempo y que arroja áreas. En estos términos y dicho en forma rápida, lo que estamos haciendo en el lado izquierdo de la fórmula anterior es *"derivar la integral de la velocidad (por izquierda)"* y como resultado obtenemos el integrando (la función velocidad) evaluada en el extremo al que se está tendiendo. Hemos obtenido el Primer Teorema Fundamental del Cálculo que se enuncia como sigue:

> ***Sea v una función integrable sobre el intervalo $[a, b]$. Se define sobre $[a, b]$ la función***
> $$F(x) := \int_a^x v(t)dt$$
> ***Si v es continua en un punto c de $[a, b]$, entonces F es derivable en c y***
> $$F'(c) = v(c)$$
> ***(si $c = a$ ó $c = b$, se entiende como la derivada a derecha o izquierda respectivamente).***

El planteo que hemos presentado es coincidente, por ejemplo, con el del libro clásico de Apostol (1967), "Calculus". Allí se propone la integración como una apertura al Cálculo, para luego desarrollar el concepto de continuidad y, posteriormente, la derivación. En particular, en el capítulo 5 de dicho texto, titulado "Relación entre integración y derivación", es notable la reconstrucción de la derivada empleando las ideas intuitivas del teorema del valor medio para la integral.

§4. Comentarios finales

En las dos primeras partes de la secuencia, con la pérdida de la posibilidad de respuesta "única y lineal", propia del paradigma epistemológico del euclideanismo (Salinas & Alanis, 2009), intentamos propiciar un escenario cercano al de una investigación. Consideramos que así el estudiante vivencia una educación matemática que no opera como una introducción ciega al pensamiento matemático y a la matemática más formal, sino que le permite reconocer sus propias capacidades en el área y lo hace consciente de la forma en cómo la matemática funciona (Skovsmose, 2000).

Nos atrevemos a anticipar que la multiplicidad de ideas, representaciones, preguntas y relaciones que se deberían registrar, dejarán en claro que esta actividad es abierta, según la clasificación del grado de estructura de Ponte (2005). Esto es así pues no se delimitan de antemano cuáles serán los contenidos o herramientas, propios del Cálculo, para llegar a la respuesta "correcta". De este modo se logra una instancia de socialización de saberes entre el estudiante y el problema y, a su vez, entre los mismos estudiantes, los cuales justificarán las soluciones obtenidas. Resaltamos que estas prácticas de socialización propician la dimensión crítica de la educación matemática que anhela Skovsmose (2000),

> ***"un sujeto crítico tiene que ser también un sujeto que actúa" y "es también un sujeto reflexivo"*** *(p. 23).*

El uso de la computadora se presenta como un reorganizador de contenidos, saberes y construcciones cognitivas, dando lugar a un "pensar con", "conocer con" los diferentes dispositivos tecnológicos y desarrollando la capacidad de interpretación y reinterpretación de datos y resultados. Esto da pie a la formulación de conjeturas, que sólo aparecen gracias a la herramienta que posibilita un trabajo matemático con énfasis en la visualización y en la experimentación (Villarreal, 2004). De este modo, la actividad pretende responder a una corriente epistemológica cuasi-empírica. En este sentido entendemos que el conocimiento matemático no sólo se concentra en aspectos formales sino que incluye el estudio de la práctica matemática y su relación con otras ramas del conocimiento, en este caso particular, con la física. Como mencionan Gravemeijer & Doorman (1999):

> ***"Si los estudiantes tienen la experiencia del proceso de reinventar la matemática como expansión del sentido común, entonces no van a experimentar dicotomía entre la experiencia de la vida diaria y la matemática. Ambas serán parte de una misma realidad."*** *(p. 127, traducción propia)*

Como discusión final subrayamos que no es casual el planteo de un escenario en el que se desarrolle primero la noción de integración y posteriormente el de diferenciación, así como tampoco lo es el contexto de la cinemática. Conocer la historia de cómo surgen las nociones invita a que sus significados se integren a experiencias donde la actividad matemática es parte fundamental del aprendizaje (Salinas & Alanis, 2009). Valoramos esta postura que supera el argumento típico de que la historia sirve como factor motivacional (pues capta el interés del estudiante o muestra una *cara humana* de la matemática), ya que recurre a ella como *herramienta cognitiva y argumento evolutivo* al servicio del aprendizaje, influyendo en el establecimiento del orden y la manera en que las nociones serán tratadas en el aula (en este caso vinculadas al Cálculo).

A futuro pretendemos implementar esta secuencia para, posteriormente, modificarla en base a las conclusiones y observaciones que se manifiesten durante su trabajo.

Agradecimientos

Este texto ha sido elaborado a partir de una propuesta surgida en el curso *Introducción a la docencia universitaria* dictado en 2015 por Leticia Losano, Fernanda Viola y Enrique Coleoni en la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación de la Universidad Nacional de Córdoba, y a partir de charlas informales con Ivan Medri. Queremos agradecer a los editores de esta revista ya que sus sugerencias fueron siempre muy claras y ayudaron a mejorar el enfoque del texto.

Referencias

Apostol, T. (1967). *Calculus*. Barcelona: Editorial Reverté.

Bassanezi, R. (1994). *Modelling as a teaching-learning strategy.* For the Learning of Mathematics, 14(2), 31–3.

Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). *Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example.* Educational Studies in Mathematics, 39, 111–129.

Ponte, J. P. (2005). *Gestão curricular em Matemática, In GTI (Ed.)*, O professor e o desenvolvimento curricular, Lisboa: APM, 11–34.

Penteado, M. G. (1999). *Novos Atores, Novos Cenários: Discutindo a Inserção dos Computadores na Profissão Docente. En. M. A. V. Bicudo (Ed.).* Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. São Paulo, Editora UNESP, 297–313.

SALINAS, P. & ALANÍS, J. A. (2009). *Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12(3), 355–382.

SKOVSMOSE, O. (2000). *Escenarios de investigación*. Revista EMA, 6(1), 3–26.

VILLARREAL, M. (2004). *Transformaciones que las tecnologías de la información y la comunicación traen para la Educación Matemática.* Yupana. Revista de Educación Matemática de la Universidad Nacional del Litoral. 1, 41–55.

VIOLA, F. & NIETO, E. (2016). *Estudiando el cambio: una propuesta para la introducción del concepto de integral en el nivel secundario.* Memorias de la VI Reunión Pampeana de Educación Matemática, 6, 154–64.

ROCÍO DÍAZ
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FAMAF), *Universidad Nacional de Córdoba* (UNC).
Av. Medina Allende s/n , Ciudad Universitaria (X5000HUA) Córdoba, Argentina.
(✉) rpd0109@famaf.unc.edu.ar,

MARTÍN MORONI
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FAMAF), *Universidad Nacional de Córdoba* (UNC).
Av. Medina Allende s/n , Ciudad Universitaria (X5000HUA) Córdoba, Argentina.
(✉) moroni@famaf.unc.edu.ar,

FREDY RESTREPO
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FAMAF), *Universidad Nacional de Córdoba* (UNC).
Av. Medina Allende s/n , Ciudad Universitaria (X5000HUA) Córdoba, Argentina.
(✉) restrepo@famaf.unc.edu.ar

Recibido: *30 de marzo de 2017*.
Aceptado: *17 de abril de 2017*.
Publicado en línea: *11 de octubre de 2017*.

¿Aprender integrales antes que derivadas?

Nota editorial por Leandro Cagliero

Las últimas secciones del artículo *Un camino hacia la derivada: secuencia de actividades para introducir un vínculo entre velocidad media y velocidad instantánea* nos invitan a reflexionar sobre la posibilidad de enseñar el concepto de integración antes que el de derivación.

Aunque en la actualidad lo habitual es al revés –primero se estudia derivación y luego integración–, hay voces que sostienen que puede ser conveniente empezar estudiando el concepto de integral definida y luego el de derivadas. De hecho hay algunos cursos en los que se enseña de ese modo. Tal como lo indican los autores, Tom Apostol (1923 – 2016) introduce, en su clásico libro (Apostol, 1967), el concepto de integración incluso antes que el de continuidad de funciones. En la introducción de su libro, T. Apostol sostiene "La disposición de este libro ha sido sugerida por el desarrollo histórico y filosófico del Cálculo y la Geometría Analítica. Por ejemplo, se estudia la integración antes de la diferenciación. Aunque esta manera de ordenar la materia del curso sea poco frecuente, es históricamente correcta y pedagógicamente adecuada. Además, es el mejor camino para hacer patente la verdadera conexión entre la derivada y la integral". Aunque no demasiados, hay algunos libros más actuales que abordan primero las integrales, como por ejemplo (Wilson, 1979). Por otro lado, mucho tiempo antes, en una época en que la interrelación entre los dos conceptos era pulida día a día, Richard Courant (1888 – 1972) enfatiza la importancia de enseñar ambos conceptos como una unidad y señala en el prefacio que, en este libro, "El lector observará particularmente un claro distanciamiento con la desactualizada tradición de tratar el cálculo diferencial separado del cálculo integral", (Courant, 1934).

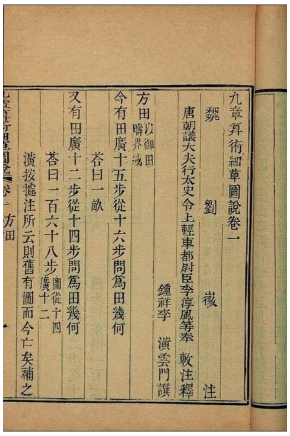
Aunque es claro que R. Courant no está tan preocupado por el orden en que deben ser tratados estos dos conceptos, sino en que deben enseñarse como una unidad, el libro presenta primero el concepto de integración seguido por el concepto de derivación.

Siguiendo hacia atrás en la historia, y ya que mencionamos el objetivo de R. Courant de presentar el Cálculo como una unidad, no podemos dejar de mencionar la muy destacada obra (Agnesi, 1748) de Maria Gaetana Agnesi (1718–1799), matemática y filósofa italiana, profesora de la Universidad de Bologna. Se considera (Navarro, 2011) que este libro es la primera obra que conjuga los dos problemas del cálculo y, según la Academia de Ciencias de Francia, es el tratado de análisis más completo de esa época (Encyclopædia Britannica, www.britannica.com/biography/Maria-Gaetana-Agnesi). En este libro, cuyo título es magnífico, ella escribe en un lenguaje accesible y contribuye a reunir las ideas de Newton y de Leibniz dedicando el segundo tomo al "método de las tangentes" y el tercero al "cálculo integral". En https://archive.org/details/analyticalinstit00agnerich" hay una versión digital en inglés de este hermoso libro. Agradezco a Juan Carlos Pedraza por señalarme esta estupenda obra.

Volviendo al debate sobre el orden en que deben estudiarse las derivadas y las integrales, en (Parrott, 1999) se reflexiona sobre una experiencia, llevada a cabo en Australia, en la que se enseña primero integración y luego diferenciación en el ámbito universitario. Aunque los hechos muestran que es mayoritario el apoyo a que derivación debe enseñarse antes que integración, el debate es largo y muy rico y no hay un concenso unánime. A continuación resumimos muy brevemente algunos argumentos.

La Medalla Fields, máximo galardón que otorga la comunidad matemática internacional, ostenta en una de sus caras el rostro de Arquímedes (imagen de Wikipedia)

A favor de "integración primero": sin dudas este orden respeta el curso de los acontecimientos históricos y, siendo así, es natural pensar que por algo la humanidad aprendió a calcular áreas mucho antes que velocidades instantáneas. Los fundamentos del cálculo integral eran conocidos por las civilizaciones antiguas. El "método de exhaución", considerado precursor de los métodos del cálculo infinitesimal actual, era conocido por las antiguas civilizaciones. Este método está presente en los libros *El Método de los Teoremas Mecánicos*, de Arquímedes (Grecia, aprox. 220 AC) y en *Los nueve capítulos sobre arte matemático*, editado por Liu Hui (China, aprox. 263). En ellos se calculan, con este método, el área del círculo y de un rectángulo con un segmento de parábola, el volumen de una esfera y el área de ciertos cascos de esfera. Más allá del curso cronológico, es claro que el problema de calcular áreas es central en matemática y es probable que los estudiantes interesados en matemática se sientan fácilmente atraidos por el desafío de obtener áreas debajo del gráfico de funciones.


九章算術細草圖說卷一
魏 劉 徽 注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 敕注釋
鍾祥李 潢雲門譔
方田以御田疇界域
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
荅曰一百六十八步 圖從十四廣十二
潢按據注所云則舊有圖而今亡矣補之
九章算術細草圖說 卷一 方田

Una página de *Los nueve capítulos sobre arte matemático*, Liu Hui (imagen de Wikipedia)

A favor de "derivación primero": a pesar de que el concepto de recta tangente no es tan intuitivo y familiar como el de área, las técnicas básicas de derivación no son muy complicadas y así los estudiantes acceden a la posibilidad de calcular la derivada de numerosas funciones. Si se enseña primero integración, los estudiantes pueden calcular relativamente pocas áreas debajo de curvas, mientras que en contraste, si aprenden a calcular áreas a traveś de primitivas, las posibilidades son mucho mayores. Además, hay diversas aplicaciones de otras ciencias, no muy complicadas, que conducen al estudiante a "sentir la necesidad" de saber derivar. Por otro lado, en algunos cursos de Análisis I, el rigor matemático ocupa un papel destacado entre los objetivos del curso y es probablemente más sencillo ejercitar el rigor iniciando con límites y derivadas que con el cálculo de áreas; aunque es sabido que una de las mayores dificultades en el aprendizaje del análisis se presenta en los argumentos rigurosos del concepto de límite.

Además de los argumentos generales expuestos anteriormente, es natural considerar el contexto y los objetivos del curso de Cálculo o Análisis en consideración: es muy diferente la discusión para clases en la escuela secundariao para cursos de carreras de Profesorado o Ingeniería o de Licenciatura en Matemática. Además, el acceso al cálculo con computadora abre puertas que hace unos años no existían. Es digna de considerar la posibilidad de comenzar calculando áreas debajo de gráficos de funciones con la ayuda de la computadora para evaluar sumas de Riemann, especialmente en el ámbito de profesorados y escuelas secundarias en donde se abordan elementos básicos del Cálculo Diferencial.

Referencias

Agnesi, M. (1748). *Instituzioni analítiche ad uso della gioventú italiana*. In Milano, nella Regia-ducal corte.

Apostol, T. (1967). *Calculus*. Editorial Reverté, Barcelona.

Courant, R. (1934). *Differential and Integral Calculus*. Blackie and Son Limited, London and Glasgow.

Navarro, J. (2011). *Mujeres matemáticas: de Hipatia a Emmy Noether*. Serie "El mundo es matemático", RBA Editores, Barcelona.

Parrott, P. (1999). *Integration First?* Educational Studies in Mathematics, 39, 111–129. The Challenge of Diversity: Proc. Δ99 Symp. Undergrad. Math., The Δ99 Committee, Toowoomba, 1999, pp. 155–159 (http://www.sci.usq.edu.au/staff/spunde/delta99/Papers/parrott.pdf).

Wilson, R. (1979). *Much Ado about Calculus*. Springer-Verlag, New York.