Enseñanza de Modelos Discretos en Dinámica Poblacional

Saleme Noelia (*) - Berrondo Luis A (*) – Navarro Silvia I. (**)
Juarez Gustavo A. (**)

Resumen

Partiendo del estudio realizado sobre la teoría de las ecuaciones en diferencias y de sus aplicaciones interdisciplinarias, hemos implementado contenidos en asignaturas tales como modelos matemáticos, matemática aplicada en las carreras de profesorado y licenciatura en Matemáticas, resultando de utilidad en asignaturas de carreras como Física y en Ciencias de la Salud, tanto en investigación como en la transferencia en el aula. Aquí pretendemos mostrar esa iniciativa desarrollada en propuestas de ejemplos correspondientes a la modelización en dinámica poblacional, redactando los mismos en términos de la modelización dinámica discreta utilizando ecuaciones en diferencias y sistemas de ecuaciones en diferencias que aportan a la enseñanza aplicada de la matemática, e incorporando el software desarrollado para resolver problemas con valores iniciales discretos.

Introducción

La enseñanza de las progresiones aritméticas y geométricas en el nivel medio suele tener como única aplicación la matemática financiera, con contenidos de interés simple, interés compuesto, periodos, descuentos, amortizaciones, etc. Para ello proponemos ampliar las aplicaciones con la presentación de problemas de dinámica poblacional, permitiendo expresar información sobre el crecimiento de poblaciones a partir de ciertos factores, logrando realizar una generalización a las ecuaciones en diferencia.

En el marco del proyecto de investigación *Tratamiento Discreto de la Modelización Dinámica Poblacional mediante Ecuaciones en Diferencias*, ejecutado en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, se propicia la enseñanza e investigación de las Ecuaciones en Diferencias desde un enfoque aplicado, contando como principal herramienta a los modelos matemáticos, en donde las ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constante de orden uno o dos y los sistemas de ecuaciones en diferencias con dos y tres sucesiones incógnitas se utilizan en biología y en ciencias de la salud.

Con ello, modelar el crecimiento poblacional de un determinado lugar, de una especie animal o bien de alguna bacteria o vegetal, teniendo en cuenta diversos factores que afectan la misma a lo largo de un determinado periodo, se puede simular mediante ecuaciones en diferencias y sistema de ecuaciones en diferencias con valores iniciales. La aplicación de tales ecuaciones permite dar la idea de simulación dinámica a un problema de la vida cotidiana, permitiendo al alumno acceder a tales conocimientos.

METODOLOGIA

Se procedió a seleccionar problemas de Dinámica Poblacional que involucre ecuaciones en diferencias (EED), es decir, que se representan mediante modelos dinámicos discretos. Estos problemas se asocian con EED lineales con coeficientes constantes de primer y segundo orden y con sistemas de ecuaciones en diferencias (SEED) con dos incógnitas y tres incógnitas. Una vez planteado el modelo matemático se procede a la simulación del problema con valor inicial discreto (PVID) asistido con el software realizado por integrantes del proyecto antes mencionado. Mostraremos ejemplos elaborados con aplicaciones y en cada caso distinguiremos la forma recursiva de cada problema así como el uso del software.

Problema 1

Consideremos una población que inicialmente tiene 2000 habitantes, y que por crecimiento Natural (nacimiento – defunción) crece a una tasa del 5% anual. Además consideramos otra variación de la misma, dada por el movimiento migratorio que produce un crecimiento de 100 individuos al año. Expresemos la población que habrá dentro de 10 años. Modele el problema y calcule cuánto crece la población teniendo en cuenta el movimiento migratorio.

Solución:

Llamamos a la población para un tiempo *t* como P_t y a la población inicial P_0, sabemos que: $P_0 = 2000$. Consideremos primero la variación dada por el crecimiento natural. Si deseamos calcular la población al primer año, tendríamos:

$$P_1 = P_0 + P_0 \times 0{,}05$$

$$P_1 = 1{,}05 \times P_0$$

Así en forma recurrente podemos expresar la población para un determinado año en términos de la población del año anterior. En particular si este crecimiento se estima durante diez años tendríamos que:

$$P_{10} = 1{,}05 P_9$$

Tal resultado representa una Progresión Geométrica.

Expresando en términos de P_0 resulta: $P_{10} = P_0 (1{,}05)^{10}$

Recordemos que utilizando ecuaciones en diferencia podemos escribir:

$$x_{n+1} = a x_n \quad \text{con } n = 1,2,3,....; \ a \neq 0$$

En tal caso la solución es una progresión geométrica, y para expresarlo en función del primer término: $x_n = a^n x_0$

Por otro lado, la población inicial de 2000 habitantes, que crece a una tasa natural de crecimiento de 5% anual, tiene la otra variación dada por el *movimiento migratorio*, llamemos *M* a este, tal que: *M* = *I* – *E* (*I*: *inmigrante*, *E*: *emigrante*) y para nuestro caso es *M*>0.

Como M es un valor fijo durante estos 10 años, dado por M = 100 personas, determinemos el modelo matemático a partir de lo expresado antes. Como ahora, queremos calcular cuánto crece la población en 10 años considerando el movimiento migratorio:

$$P_1 = P_0(1{,}05) + M$$

Para P_2:

$$P_2 = P_1(1{,}05) + M$$

Por lo tanto

$$P_{10} = P_9(1{,}05) + M$$

Esto es una EED de primer orden completo o una progresión geométrica modificada.

Recordemos que una EED lineal de primer orden tiene la forma:

$$x_{n+1} - ax_n = R(n) \quad \text{con} \quad a \neq 0$$

Y una sucesión geométrica modificada está definida por:

$$x_{n+1} - ax_n = b \quad \text{con} \quad a \neq 0;\ n = 0,1,2,3,\ldots$$

En consecuencia el modelo matemático que representa el problema dado es

$$P_{i+1} = 1{,}05P_i + M$$

Que junto al valor inicial dado determina el PVID. $\begin{cases} P_{i+1} - 1{,}05P_i = 100 \\ P_0 = 2000 \end{cases}$

Para plantear problemas con ecuaciones en diferencia y buscar una solución hemos utilizado el software EED, el cual nos permite encontrar la solución de la ecuación en diferencias, estimar los posibles valores de la sucesión para los valores estipulados según ciertas condiciones iniciales, como así también observar gráficamente el comportamiento de esta población.

La siguiente imagen nos muestra el uso del software, en el cual encontraremos la solución general de la EED planteada. Acompaña a la misma los posibles valores poblacionales simulados para los primeros diez años. Para ello procedemos de la siguiente manera.

Se elige como actividad inicial las ecuaciones en diferencias lineales de primer orden en la primera solapa de las herramientas de la pantalla inicial, es decir en cálculos. Luego se carga la ecuación en diferencias del PVID. Y se busca la solución general en el icono del enésimo término de una sucesión, esto es X_n. Así el software entrega la solución del problema y el valor de equilibrio. Para completar el PVID se inserta el valor inicial y se indica la cantidad de términos que se desea conocer de la sucesión solución.

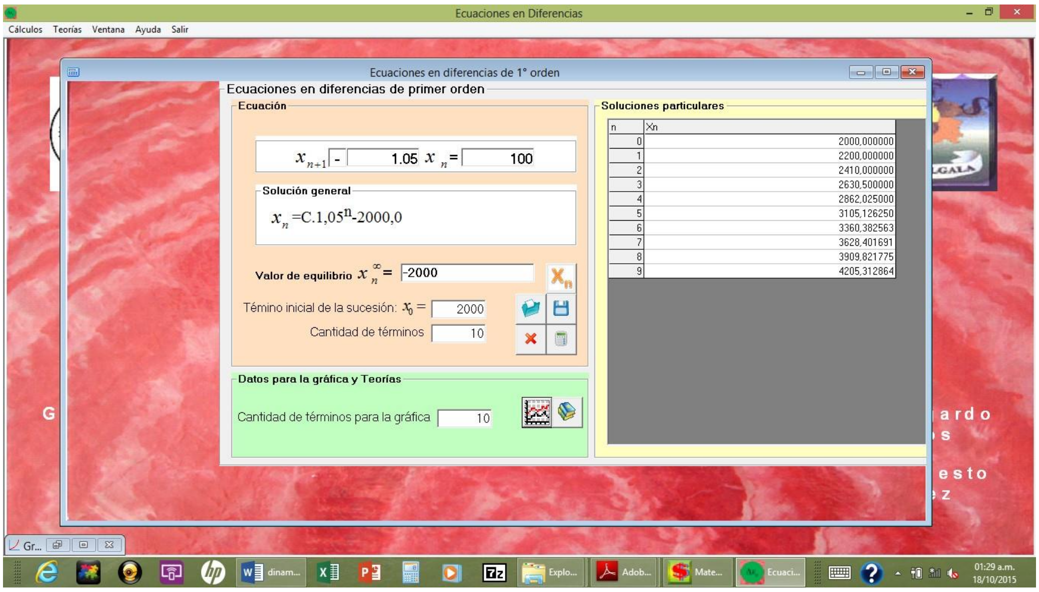

Figura 1: pantalla del software con el desarrollo del problema 1.

Con un icono de la derecha se tiene la posibilidad de conocer esa cantidad de términos de la sucesión. Allí se tiene la primera idea del comportamiento de la sucesión dada por esta lista de términos. (Ver figura 1).

Para obtener una representación gráfica se procede a indicar la cantidad de términos que se desea representar y en una pantalla distinta se tiene la gráfica. Continuando con el uso de este software se obtuvo la gráfica correspondiente, (ver figura 2).

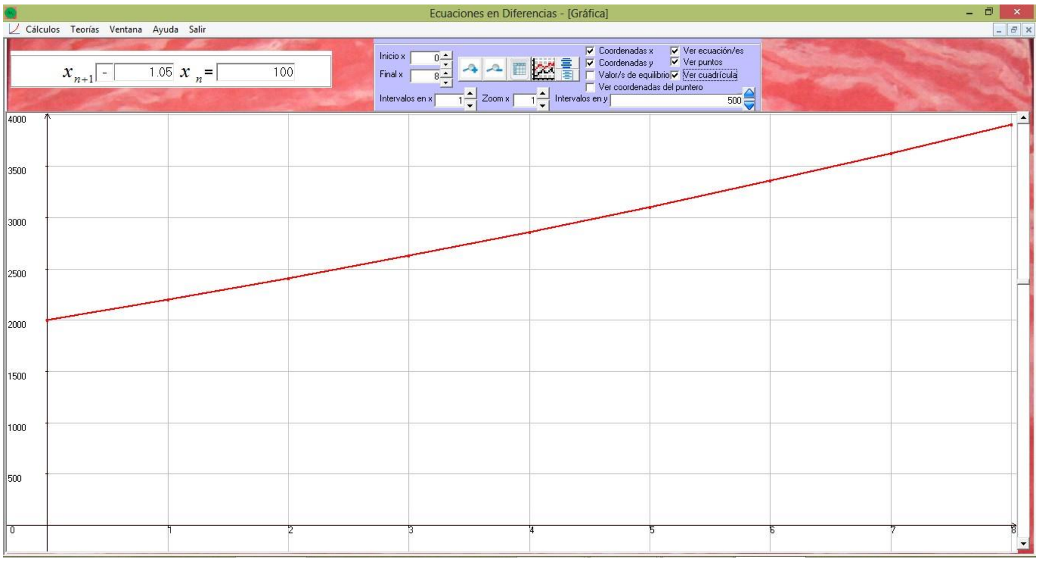

Figura 2: Gráfica de la sucesión solución del PVID que modela el problema 1.

Este software no solamente permite obtener soluciones y gráficas para EED de primer orden sino también es posible hallar soluciones de EED de segundo orden y de sistemas de EED.

Problema 2

La población de un país en un determinado año es de 60 millones y la de su capital 8 millones. Supóngase que a partir de allí, hasta un cierto año, un 3% de la población de la capital se marcha de la ciudad y un 0,4% de la población del resto del país se instala en la Capital. Estudie el comportamiento demográfico de tal población según el movimiento migratorio dado.

En este problema intervienen dos poblaciones, la de la Capital que denotamos con x_n, y la del resto del país expresada como y_n, en el año *n*-ésimo. Para determinar la población del *n*+1-ésimo año debe tenerse en cuenta los siguientes aspectos:

La cantidad de la población que sale de la Capital es $0{,}03x_n$.

La cantidad de población que permanece en la Capital es $(1-0{,}03)x_n$.

La cantidad de población que entra a la capital es $0{,}004y_n$.

La cantidad de población que permanece fuera de la Capital es $(1-0{,}004)y_n$.

Con estos datos podemos escribir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_{n+1} = & (1-0{,}03)x_n + 0{,}004y_n \\ y_{n+1} = & 0{,}03x_n + (1-0{,}004)y_n \end{cases}$$

Este problema representa un sistema de ecuaciones en diferencias lineales de primer orden homogéneo. Pero además los coeficientes tienen particularidades, si observamos todos los coeficientes son números entre cero y uno, y la suma de los coeficientes que están encolumnados suman uno.

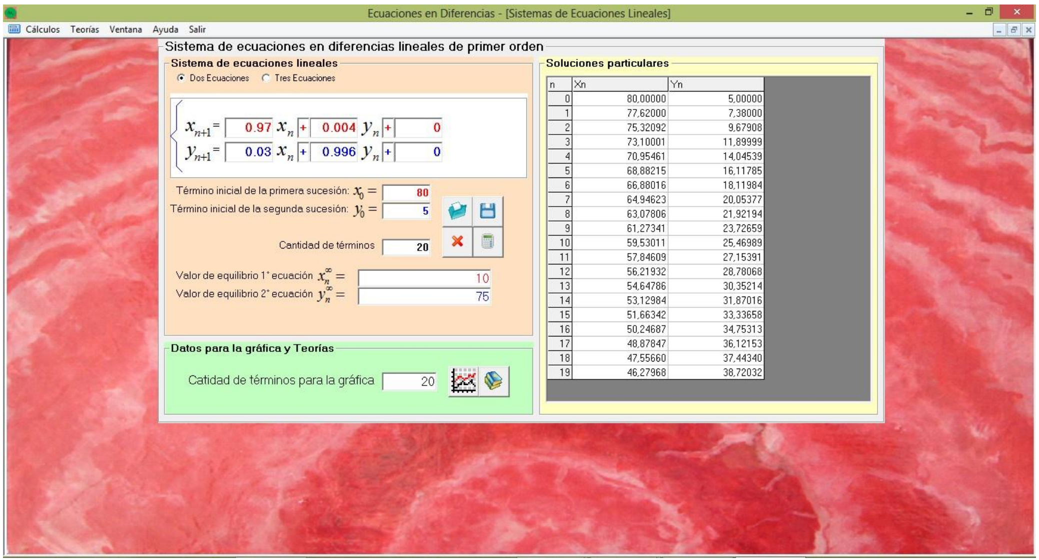

Figura 3. Simulación numérica de las poblaciones del problema 2.

Usando el software mencionado, los posibles resultados de crecimientos con estas condiciones en los primeros 20 años se muestran en la tabla. Ver fig. 3.

La gráfica correspondiente al problema para los 18 primeros años se observa en la figura 4.

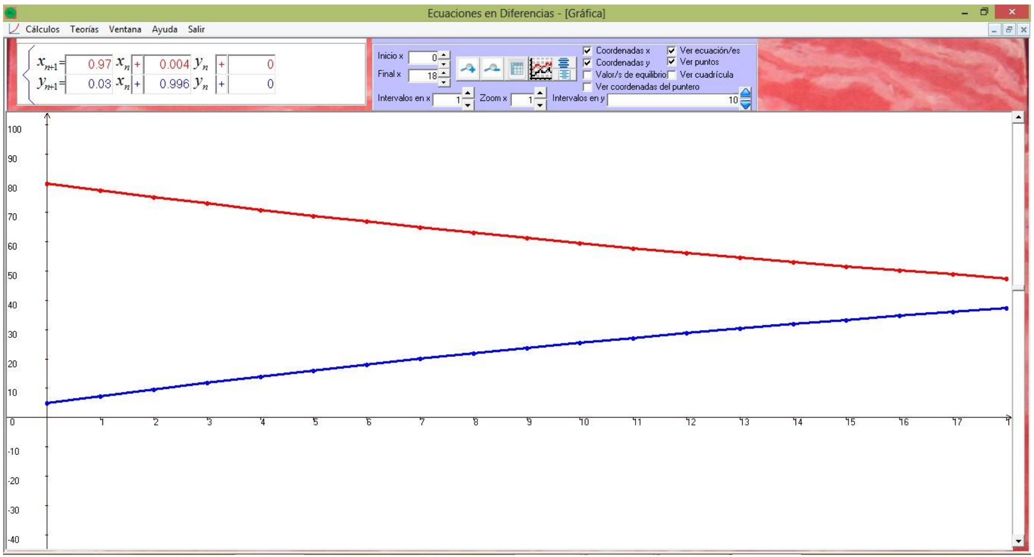

Figura 4. Comportamiento del modelo para los primeros diez años.

Más aún si observamos que el programa calculó los valores de equilibrio, nos podemos interesar para saber cuándo alcanza estos valores, para ello solicitamos la gráfica para más años. Esto es considerando 20, 50, 100, 150 años. En cada caso podemos solicitar ver los valores de equilibrio y su aproximación de los tamaños poblacionales a tales valores de equilibrio. Esto se ve en la figura 5.

La propuesta del ejemplo 2 se puede complementar con poblaciones más generales donde la cantidad no se conserva inalterable numéricamente, esto es por mortalidad o nacimientos, o movimientos migratorios. Por ello se puede presentar la forma discreta de los clásicos modelos de presa depredador, mutualismo o simbiosis, que la ecología lo menciona siempre en forma continua, recurriendo a ecuaciones diferenciales que requieren del cálculo o análisis matemático, los conceptos de derivada e integrales. Más aun, dentro del software se prevé modelos cuadráticos y de dos o tres ecuaciones.

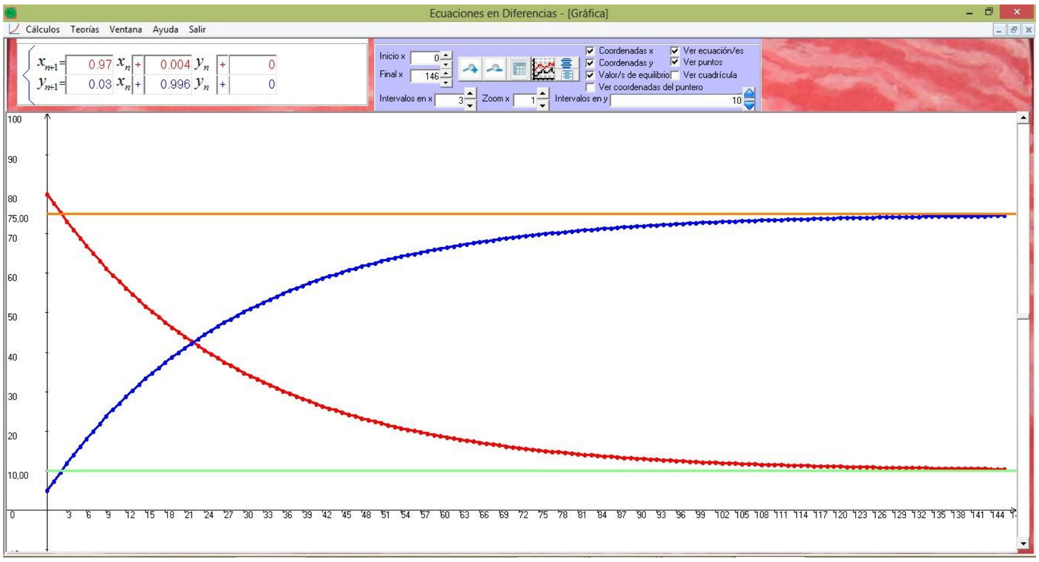

Figura 5. Para 150 años se observa que ya se logró el equilibrio

Problema 3

La población de una determinada especie crece durante un cierto tiempo a un ritmo acelerado debido a condiciones favorables dada por disponibilidad de cierto recurso, sea esto espacio o alimento. Posteriormente el crecimiento tiene un ritmo más lento consecuencia de la adaptación al recurso que determina tal crecimiento, logrando alcanzar un valor que se mantiene constante por el periodo restante de nuestra observación, conocido como *valor de equilibrio*. Este modelo se conoce como *logístico*.

Supóngase una especie que cuenta inicialmente con seis ejemplares y crece a una tasa a de 0,3% proporcional a la cantidad de población existente y a la que resta para alcanzar el valor de equilibrio K de cincuenta ejemplares.

De tal manera que $N_{t+1} - N_t = (K - N_t)aN_t$

O bien en forma recurrente como $N_{t+1} = (1 + Ka)N_t - aN_t^2$. En la figura 6 se muestra la página de carga de información para lograr definir el modelo logístico discreto anterior.

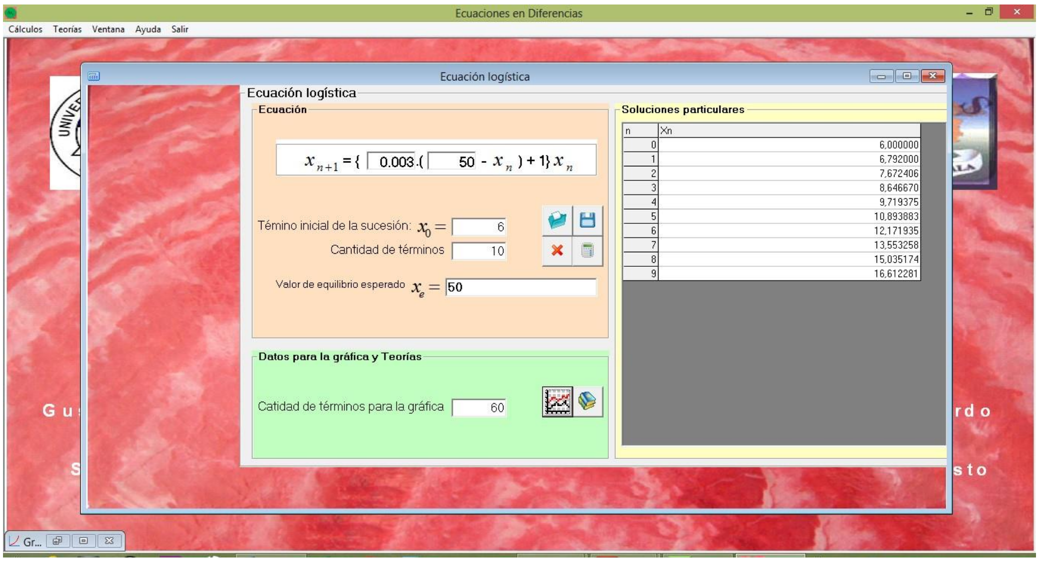

Fig 6: Simulación numérica del modelo logístico discreto del problema 3

En los diez valores numéricos se ve que todavía no se logra el valor de equilibrio por lo que gráficamente se simula hasta 60, y se muestra en la figura 7.

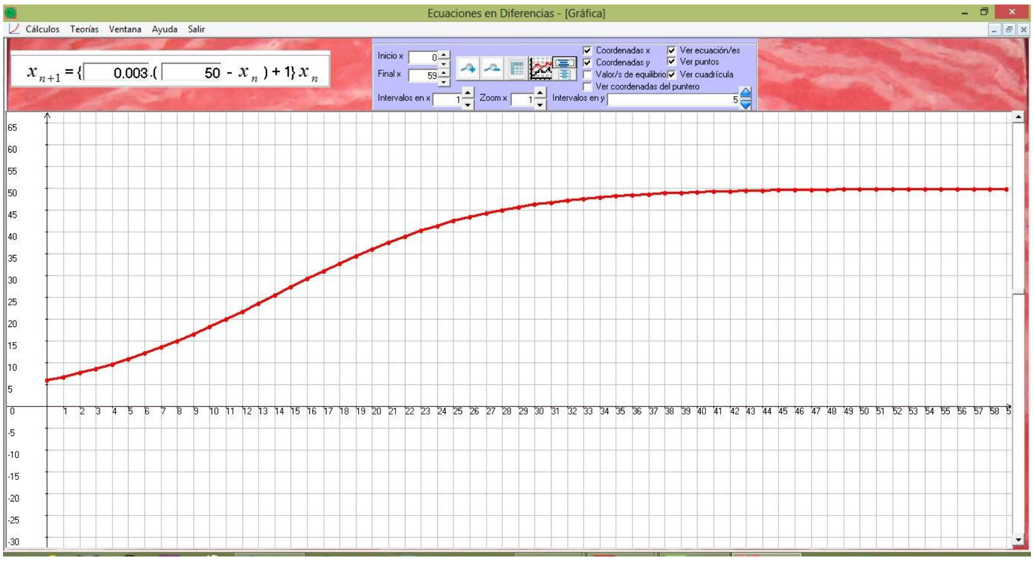

Fig 7: Simulación del modelo logístico mostrando el alcance del valor de equilibrio

CONCLUSIÓN

Los diferentes resultados alcanzados en la enseñanza de las ecuaciones en diferencias se ven complementados por las aplicaciones en dinámica poblacional y por el recurso de la simulación de modelos matemáticos dinámicos discretos que permiten analizar comportamientos de tales problemas, para su más inmediata interpretación de resultados. Esto en procura de aportar a la enseñanza aplicada y difundiendo la enseñanza de las ecuaciones en diferencias en la formación de profesores y en el nivel medio y superior, dentro de los modelos dinámicos anticipando a los modelos continuos dados mediante ecuaciones diferenciales, considerando la necesidad del cálculo infinitesimal que estos últimos requieren.

REFERENCIAS

[1] Bassanezi Carlos Rodney (2002): *Ensino-aprendizagem com modelagem matematica.* Editora Contexto. Brasil.

[2] Habermann Richard. (1998).*Mathematical Models: Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow*. SIAM.

[3] Juarez G.A., Navarro S.I. (2005). *Ecuaciones en diferencias*. Editorial Sarquis. Catamarca.

[4] Juarez G.A., Navarro S.I. (2012). *Progresiones Geométricas de Oro*. Revista Aportes Científicos en Phymath. Número 2. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Catamarca.

[5] Juarez G. A., Navarro S. I. (2011). *Problemas Discretos con Valores Iniciales*. Revista en Educación Matemática. Unión Matemática Argentina. Número 26. Volumen 2. pp: 3-13.

[6] Valdez L. E., Juarez G.A., Navarro S. I., Barros L.E. (2014) *Implementación de software para la enseñanza de Ecuaciones en Diferencias con valores iniciales.* Revista en Educación Matemática. Unión Matemática Argentina. Número 29. Volumen 1. Año 2014.

(*) Facultad de Ciencias de la Salud – Universidad Nacional de Catamarca

(**) Facultad de Ciencias Exactas y Naturales – Universidad Nacional de Catamarca

juarez.catamarca@gmail.com