La Matemática Financiera desde un enfoque de las Ecuaciones en Diferencias

Luis Ernesto Valdez – Efraín Omar Nieva – Luis Edgardo Barros

Eje temático: Matemática aplicada

Resumen

Usualmente, se presenta a la Matemática Financiera, la parte de la Matemática que estudia el movimiento del dinero a través de un determinado tiempo, en una relación directa con las sucesiones geométricas y aritméticas. En esta nota se presenta la Matemática Financiera utilizando Ecuaciones en Diferencias; lo que posibilita implementar estas ecuaciones y desde la modelización, como una alternativa para el aprendizaje de la Matemática Financiera en los alumnos de nivel medio y de nivel superior. Por último, se describe un sofware, de nuestro desarrollo, que permite calcular eficazmente.

Palabras claves: Ecuaciones en Diferencias, Modelización, Matemática Aplicada, Matemática Financiera.

Introducción

Desde distintos ejemplos simples de movimiento de dinero, se puede aplicar conceptos y soluciones de las Ecuaciones en Diferencia de primer orden con coeficientes constantes, dando con esto, un nuevo marco teórico y práctico en la educación secundaria y superior en la enseñanza de la Matemática Aplicada.

Es por eso que este trabajo propone, como una ejemplificación de lo indicado en el párrafo anterior, mostrar una manera diferente de enseñar el movimiento de dinero a través de un determinado periodo el tiempo.

Problema 1

Durante un año y desde el mes de Enero, una persona decide ahorrar $100 cada mes, iniciándose con un capital de $500. Se solicita realizar el planteamiento general del problema con un modelo matemático que represente lo acumulado mes a mes.

Una manera de plantear una resolución es de la siguiente forma iterativa:

Mes	Ahorro Acumulado
Ahorro inicial	500
Enero	$M_1 = 500 + 100 = 600$
Febrero	$M_2 = 600 + 100 = 700 = M_1 + 100$
Marzo	$M_3 = 700 + 100 = 800 = M_2 + 100$
Abril	$M_4 = 800 + 100 = 900 = M_3 + 100$
Mayo	$M_5 = 900 + 100 = 1000 = M_4 + 100$
Junio	$M_6 = 1000 + 100 = 1100 = M_5 + 100$
Julio	$M_7 = 1100 + 100 = 1200 = M_6 + 100$
Agosto	$M_8 = 1200 + 100 = 1300 = M_7 + 100$
Septiembre	$M_9 = 1300 + 100 = 1400 = M_8 + 100$
Octubre	$M_{10} = 1400 + 100 = 1500 = M_9 + 100$
Noviembre	$M_{11} = 1500 + 100 = 1600 = M_{10} + 100$
Diciembre	$M_{12} = 1600 + 100 = 1700 = M_{11} + 100$

En definitiva y generalizando, el monto del n-simo período se escribe:

$$M_n = M_{n-1} + 100$$

O sea que, el monto de un período cualquiera es igual a la suma del monto del período anterior y 100.

Ahora, en este caso podemos decir que estamos en presencia de una ecuación donde un término cualquiera lo relaciona con los términos siguientes de una sucesión. Esta ecuación se la conoce con el nombre de ***Ecuación en diferencias***[1]***(EED)***.

Trabajando con la variable $\boldsymbol{x_n}$ con subíndice y generalizando, podemos escribir:

$$x_n = x_{n-1} + b \Rightarrow x_n - x_{n-1} = b$$

Teniendo en cuenta los exponentes de las variables, concluímos que hemos obtenido una ***Ecuación en Diferencias lineal de primer orden***.

Problema 2

Una persona obtiene un préstamo de $9000 (Capital inicial) y lo tiene que devolver en 9 meses con el 8% mensual de interés y con capitalización simple. Se solicita modelice el problema y calcule el monto que tendrá que devolver en el tiempo estipulado.

Primero diremos que la capitalización simple es aquella donde los intereses que se generan en un período, se calculan siempre en base al capital original o inicial.

Por otro lado, el 8% que es equivalente a decir $\frac{8}{100} = 0,08 = i$ denominado también *tasa de interés* y cada interés mensual I_n es el producto del capital y la tasa, o sea $I_n = 9000 \times 0,08 \cdot$

Teniendo en cuenta la definición, el monto es la suma del capital prestado y los intereses, lo que significa que el monto en el mes nueve (M_9) se lo puede expresar:

$$M_9 = 9000 + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8 + I_9$$

Donde, por supuesto, como se indicó anteriormente, cada $I_n = 0,08 \times 9000 = 720$

Agrupando, se tiene:

[1] Gustavo J.; Navarro, S (2005). Ecuaciones en Diferencias. Pág. 2

$$M_9 = \left(9000 + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8\right) + I_9$$

Observando el paréntesis, éste es el monto hasta el período o mes ocho (M_8), lo que significa que:

$$M_9 = M_8 + 720$$

Que es lo mismo que:

$$M_9 - M_8 = 720$$

Esta expresión es también una ***Ecuación en diferencias lineal de primer orden***, cuyo término independiente es 720.

Lo que en definitiva y para un período ***n*** cualquiera, esta expresión queda:

$$M_n - M_{n-1} = 720$$

El valor del monto, se calculará más adelante.

Problema 3

Un ahorrista coloca un capital de $2000 a el 10% mensual, por doce meses y con capitalización compuesta. Se solicita modelice el problema.

Antes de modelizar, se tendrá en cuenta que la capitalización compuesta es aquella donde el monto de un período cualquiera, se calcula en función del monto del período anterior[2]. Ahora, para el período o mes uno, el monto se calcula solo en base al capital, lo que significa que:

$$M_1 = 2000 + 2000 \times 0{,}1 = 2000 \times \left(1 + 0{,}1\right) = 2000 \times 1{,}1$$

Ahora, para el período o mes dos, se tiene:

[2] Valdez, L. (2009). Matemática Financiera Pág. 42

$$M_2 = M_1 + M_1 \cdot 0,1 = M_1 \cdot 1,1$$

Para el período tres:

$$M_3 = M_2 + M_2 \cdot 0,1 = M_2 \cdot 1,1$$

Siguiendo este razonamiento, podemos armar la siguiente tabla:

Período	Monto por periodo
1	$M_1 = 2000 \times 1,1$
2	$M_2 = M_1.1,1$
3	$M_3 = M_2.1,1$
4	$M_4 = M_3.1,1$
5	$M_5 = M_4.1,1$
6	$M_6 = M_5.1,1$
7	$M_7 = M_6.1,1$
8	$M_8 = M_7.1,1$
9	$M_9 = M_8.1,1$
10	$M_{10} = M_9.1,1$
11	$M_{11} = M_{10}.1,1$
12	$M_{12} = M_{11}.1,1$

En definitiva, el monto en el período ***n*** se pude expresar en término del anterior de la siguiente forma:

$$M_n = 1,1 \times M_{n-1}$$

Haciendo un pasaje de términos, queda:

$$M_n - 1,1 \times M_{n-1} = 0$$

Lo que también es una ***Ecuación en Diferencias lineal con un coeficiente constante***, cuyo valor del término independiente es 0, lo que se denomina ***homogénea***.

Problema 4

Una persona tiene una deuda de $1500 a saldar en 60 días con una opción de descuento del 1% diario por pago anticipado. El deudor abona dicha deuda 10 días antes de su vencimiento. Se solicita dar un modelo matemático para este problema.

Observamos que al pagar la deuda antes del vencimiento y al aplicarle un descuento, el monto se actualizará, y la operación es compuesta. Con estos fundamentos podemos asegurar que:

Para el primer día de adelanto, tenemos un monto que es la diferencia entre el capital de la deuda y el descuento, lo que significa que:

$$M_1 = 1500 - 1500 \times 0,01 = 1500.(1 - 0,01) = 1500 \times 0,99$$

Para el segundo día, el monto con el descuento se calcula en base al monto del período anterior:

$$M_2 = M_1 \cdot 0,99$$

Para el día tres, y siguiendo el mismo razonamiento, se tiene:

$$M_3 = M_2 \cdot 0,99$$

En el mismo orden de ideas, podemos construir la siguiente tabla para los diez días:

Período	Monto por periodo
1	$M_1 = 1500 \times 0,99$
2	$M_2 = M_1.0,99$
3	$M_3 = M_2.0,99$
4	$M_4 = M_3.0,99$

Período	Monto por periodo
5	$M_5 = M_4.0,99$
6	$M_6 = M_5.0,99$
7	$M_7 = M_6.0,99$
8	$M_8 = M_7.0,99$
9	$M_9 = M_8.0,99$
10	$M_{10} = M_9.0,99$

Lo que significa en definitiva que:

$$M_n = M_{n-1} \times 0,99$$

Que es lo mismo que:

$$M_n - 0,99 \cdot M_{n-1} = 0$$

También es una ***Ecuación en Diferencia de primer orden lineal homogénea***.

En base a los ejemplos, se presentan tres tipos de E***cuaciones en Diferencias lineales de primer orden***:

1. $x_n - x_{n-1} = b$: E***cuación en Diferencias lineal de primer orden con coeficiente constante, no homogénea***;
2. $x_n - a.x_n = 0$: ***Ecuación en Diferencias lineal de primer orden con coeficiente constante, homogénea***.

Ahora, teniendo en cuenta las definiciones de Sucesiones o Progresiones, el primer caso es una ***progresión aritmética***, donde la diferencia de progresión es ***b*** y en el segundo caso, es una ***progresión geométrica***, donde la constante ***a*** es la razón. Esto significa que las sucesiones aritméticas y geométricas, son casos especiales de ***Ecuaciones en diferencias de primer orden con coeficientes constantes***[3].

3. $x_n - ax_{n-1} = b$: es una ***sucesión geométrica modificada***[4] e igualmente es una ***Ecuación en Diferencias lineal de primer orden con coeficientes constantes, no homogénea***.

Ahora, ¿Cómo se determina la solución de una Ecuación en Diferencias de estos tipos?

Analizando el primer caso y partiendo de un valor inicial x_0, se tiene:

$$x_1 = x_0 + b$$

$$x_2 = x_1 + b = x_0 + b + b = x_0 + 2b$$

Siguiendo el mismo orden de ideas podemos afirmar que:

$$x_n = x_0 + n.b$$

Sustituyendo x_0 por *C*:

$$x_n = C + n.b \text{ ; donde } C \text{ es un valor inicial}$$

En el ***problema 1***: $M_n - M_{n-1} = 100$ tiene la forma de la ***Ecuación en diferencias*** $x_n - x_{n-1} = 100$, la solución general es $M_n = C + n.100$.

Ahora, el valor inicial es el ahorro inicial C= $ 500, y la cantidad de meses es ***n=12***, lo que significa que:

$$M_{12} = \$500 + 12 \times \$100 = \$1700$$

---

[3] Juárez, G; Navarro I. (2005) – Ecuaciones en Diferencias - Pág. 5
[4] Juárez, G; Navarro I. (2005) – Ecuaciones en Diferencias – Pág. 9

En el ***problema 2***: la solución general es también de la forma: $x_n = x_0 + n.b$ y $x_0 = 9000$, por ser el capital inicial, ***n*** el número de períodos que es 8 y $b = 9000 \times 0,08$ (interés mensual), podemos obtener el monto el que es:

$$x_9 = 9000 + 9.0,08 \times 9000 = 15480$$

Ahora, para el caso de la ***sucesión geométrica*** $x_n - a.x_{n-1} = 0$, determinemos la solución y también partimos de un valor inicial x_0, tenemos:

$$x_1 = a.x_0$$

$$x_2 = a.x_1 = a.a.x_0 = a^2.x_0$$

$$x_3 = a.x_2 = a.a.a.x_0 = a^3.x_0$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = a.x_{n-1} = a^n.x_0$$

Reemplazando, queda determinada la solución general: $x_n = C.a^n$ si $x_0 = C$.

En el ***problema 3***: el típico de ***monto compuesto***, $M_n = 1{,}1.M_{n-1}$, lo que se encuadra en una progresión geométrica $x_n - a.x_{n-1} = 0$, la solución general es:

$$M_n = 1{,}1^n.C$$

Haciendo *C*=\$2000 y como cantidad de períodos es n=12, se tiene:

$$M_{12} = 1{,}1^{12} \times \$2000 = \$6276,86$$

En el ***problema 4***: se realiza el mismo razonamiento, dado que la solución general de esta ecuación es $M_n = C \times 0,99^n$. Hacemos *C*=\$1500 y *n*=10 y tenemos la solución del problema:

$$M_{10} = \$1500 \times 0,99^{10} = \$1356,57$$

Ahora, para el caso de las ***sucesiones geométricas modificadas,*** $x_n - a.x_{n-1} = b$, la solución general, estará dada con el siguiente razonamiento[5]:

$$x_1 = a.x_0 + b$$

$$x_2 = a.x_1 + b = a.(a.x_0 + b) + b = a^2.x_0 + a.b + b = a^2 x_0 + b.(1+a)$$

$$x_3 = a.x_2 + b = a.\left[a^2 x_0 + b.(1+a)\right] + b = a^3 x_0 + b.\left(a^2 + a + 1\right)$$

$$x_4 = a.x_3 + b = a.\left[a^3.x_0 + b\left(a^2 + a + 1\right)\right] = a^4 x_0 + b.\left(a^3 + a^2 + a + 1\right)$$

Siguiendo el mismo orden de ideas, concluimos por inducción que:

$$x_n = a^n.x_0 + \left(1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1}\right).b$$

Pero, teniendo en cuenta que la sucesión

$$1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{1-a^n}{1-a} \Leftrightarrow a \neq 1 \\ n \Leftrightarrow a = 1 \end{cases}$$

Lo que significa que si $a \neq 1$ se tiene:

$$x_n = a^n x_0 + b.\frac{1-a^n}{1-a} \Rightarrow x_n = a^n x_0 + \frac{b}{1-a} - \frac{b.a^n}{1-a}$$

Lo que significa que:

$$x_n = a^n \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}$$

[5] Juárez, G.; Navarro S.(2005) – Ecuaciones en Diferencias – Pág. 9

Ahora, haciendo $D = x_0 - \frac{b}{1-a}$, tenemos la solución general de la ecuación en diferencias $x_n - ax_{n-1} = b$

$$x_n = D.a^n + \frac{b}{1-a}$$

Para a=1, es $x_n = D.a^n + n.b$

Problema 5

Un inversionista deposita al final de cada uno de 12 meses, una suma fija de $500, con el 10% mensual de interés con capitalización compuesta. Determinar un modelo matemático y calcular el monto final que obtendrá el inversionista al cumplir un año de aportes.

Analizando desde el mes 1 al 12, se acumula al final de cada período, los siguientes montos:

Período	Monto
1	$M_0 = 500 \times 1{,}1^{11}$
2	$M_1 = 500 \times 1{,}1^{10}$
3	$M_2 = 500 \times 1{,}1^{9}$
4	$M_3 = 500 \times 1{,}1^{8}$
5	$M_4 = 500 \times 1{,}1^{7}$
6	$M_5 = 500 \times 1{,}1^{6}$
7	$M_6 = 500 \times 1{,}1^{5}$

Período	Monto
8	$M_7 = 500\times 1,1^4$
9	$M_8 = 500\times 1,1^3$
10	$M_9 = 500\times 1,1^2$
11	$M_{10} = 500\times 1,1^1$
12	$M_{11} = 500\times 1,1^0$

El monto final (S_n) acumulado en n-períodos es:

$$S_{11} = M_0 + M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6 + M_7 + M_8 + M_9 + M_{10} + M_{11}$$

El cual es:

$$S_{11} = 500.1,1^{11} + 500\times 1,1^{10} + 500\times 1,1^9 + 500\times 1,1^8 + 500\times 1,1^7 + 500\times 1,1^6 + 500\times 1,1^5 + 500\times 1,1^4 + \\ +500\times 1,1^3 + 500\times 1,1^2 + 500\times 1,1^1 + 500\times 1,1^0$$

Extrayendo factor común a 1,1 hasta el penúltimo término, se tiene:

$$S_{11} = 1,1\times(1,1^{10}\times 500 + 1,1^9\times 500 + 1,1^8\times 500 + 1,1^7\times 500 + 1,1^6\times 500 + 1,1^5\times 500 + \\ +1,1^4\times 500 + 1,1^3\times 500 + 1,1^2\times 500 + 1,1^1\times 500 + 500) + 500$$

Ahora, si se observa lo que está en el paréntesis, es la suma parcial hasta el mes o período 10 y reemplazando:

$$S_{11} = 1,1.S_{10} + 500$$

Lo que significa que estamos en presencia de una ***Ecuación en Diferencias de primer orden con coeficiente constante no homogénea***:

$$S_n - 1,1.S_{n-1} = 500$$

La solución general es:

$$S_n = \left(x_0 - \frac{500}{1-1{,}1} \right).1{,}1^n + \frac{500}{1-1{,}1} \Rightarrow S_n = \left(x_0 - \frac{500}{-0{,}1} \right).1{,}1^n + \frac{500}{-0{,}1}$$

Ahora, como la cuota es $500, que es el valor inicial, se tiene que para n=11 (período 12):

$$S_{11} = (500 + 5000) \times 1{,}1^{11} - 5000 = 10692{,}14$$

Este problema es el típico de ***Imposición vencida*** con cuota constante.

Ahora, Comparando los cálculos con los Software Ecuaciones en Diferencias 1.3.4[6] y Matemática Financiera 4.0.0[7], se tiene:

[6] Juárez, G; Navarro, S; Valdez, L.; Barros, L. (2013 – 2016). Software "Ecuaciones en Diferencias 1.3.4"

[7] Valdez, L. (2013 – 2016). Software "Matemática Financiera 4.0.0" http://matematicafinanciera.wirez.com.ar

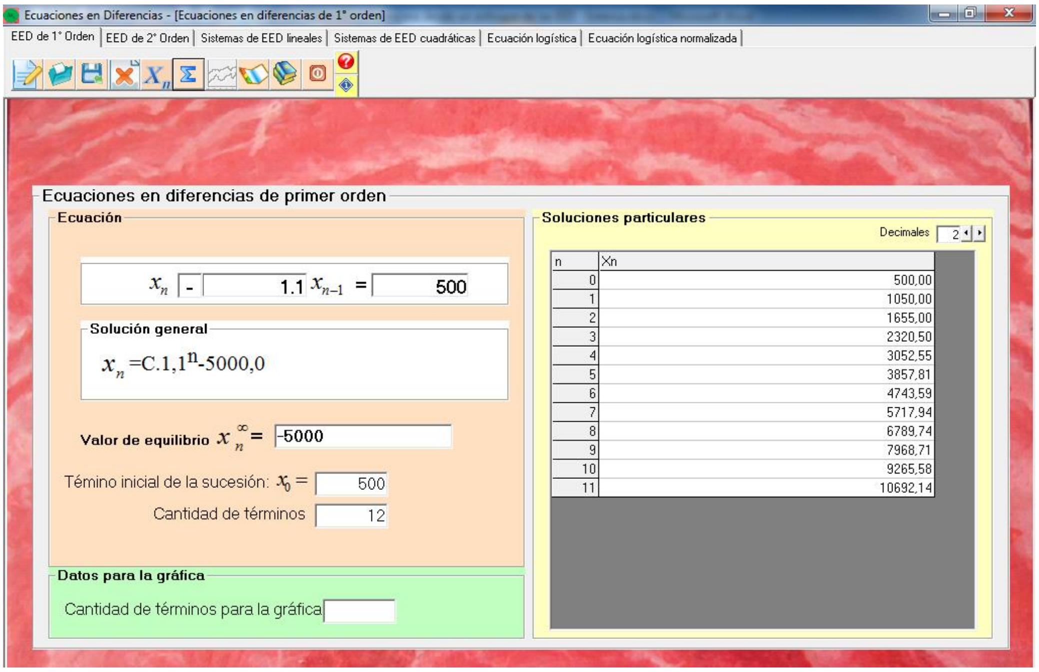

Figura 1- vista del software EED para el desarrollo del problema 5

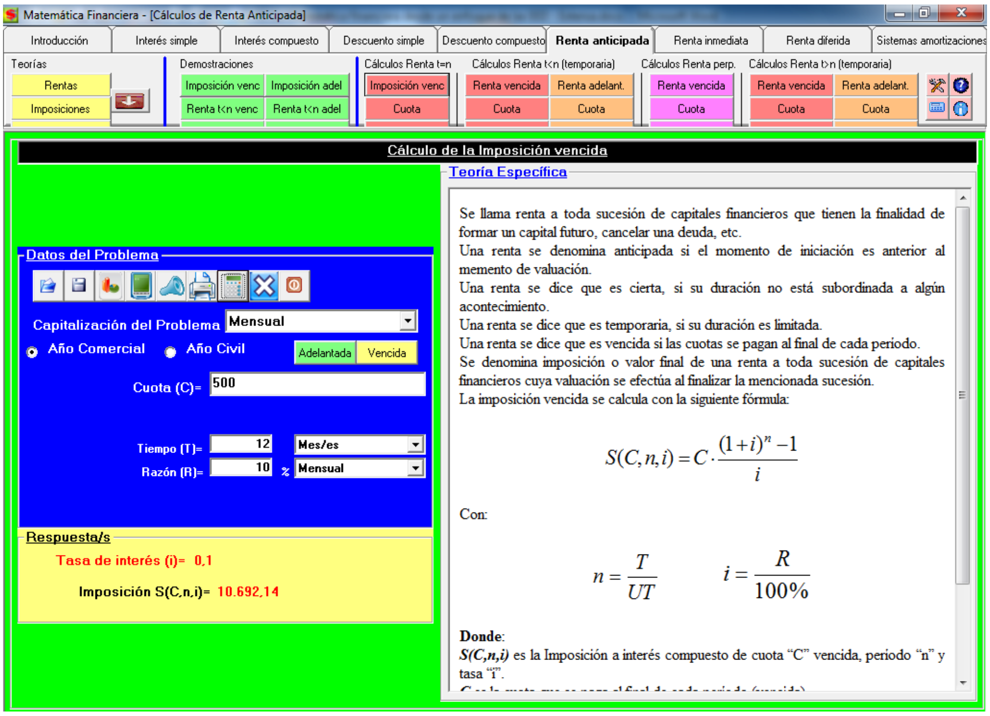

Figura 2: vista de la pantalla de trabajo del software Matemática Financiera para el problema 5.

En definitiva, utilizando las ecuaciones en diferencias de primer orden lineales con coeficientes constantes $x_n - a.x_{n-1} = b$ se puede calcular la ***Imposición vencida***, haciendo la constante ***a*** como el factor de capitalización *(1+i)*, ***b*** la cuota y el subíndice ***n*** es el número de períodos disminuido en uno.

Y por supuesto, la solución general es el valor de la imposición:

$$x_n = \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right).a^n + \frac{b}{1-a}$$

Problema 6

Ahora, en el mismo problema anterior, suponiendo que la cuota se depositara al inicio de cada mes (adelantada). El razonamiento es el mismo, pero cada cuota se capitalizaría por un período más, el monto final acumulado es:

$$S_{11} = M_0 + M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6 + M_7 + M_8 + M_9 + M_{10} + M_{11}$$

En definitiva es:

$$S_{11} = 500.1,1^{12} + 500\times 1,1^{11} + 500\times 1,1^{10} + 500\times 1,1^{9} + 500.1,1^{8} + 500\times 1,1^{7} + 500\times 1,1^{6} + 500\times 1,1^{5} + \\ + 500.1,1^{4} + 500\times 1,1^{3} + 500\times 1,1^{2} + 500\times 1,1^{1}$$

Sacando factor común 1,1 hasta el penúltimo término, se tiene:

$$S_{11} = 1,1\times (1,1^{11}\times 500 + 1,1^{10}\times 500 + 1,1^{9}\times 500 + 1,1^{8}\times 500 + 1,1^{7}\times 500 + 1,1^{6}\times 500 + \\ + 1,1^{5}\times 500 + 1,1^{4}\times 500 + 1,1^{3}\times 500 + 1,1^{2}\times 500 + 500\times 1,1) + 500\times 1,1$$

Lo que está en el paréntesis es la suma parcial hasta el período o mes 11, o sea

$$S_{12} = 1,1.S_{11} + 1,1\times 500$$

La solución general es:

$$S_n = \left(x_0 - \frac{1,1.500}{1-1,1} \right).1,1^n + \frac{1,1.500}{1-1,1} \Rightarrow S_n = \left(x_0 - \frac{550}{-0,1} \right).1,1^n + \frac{550}{-0,1}$$

Ahora, como la cuota es 500 y, por ser adelantada se multiplica por 1,1; este es el valor inicial, con lo que se tiene para n=11 (período 12):

$$S_{11} = \left(550 + 5500\right)\times 1,1^{11} - 5500 = 11761,35$$

En definitiva, este es el problema típico de ***Imposición adelantada*** con cuota constante.

O sea que para calcular una imposición adelantada, también se utiliza una ecuación en diferencias lineal de primer orden con coeficientes constantes $x_n - a.x_{n-1} = b$, donde la constante ***a*** es el factor de capitalización, la constante ***b*** es el producto entre la cuota y el factor de capitalización y ***n*** es el número de períodos disminuidos en uno.

Problema 7

Una persona obtiene un préstamo, debiendo abonar para su cancelación, cuotas de \$1.200 al inicio de cada mes durante 2 años, cobrando la entidad financiera un interés anual del 24%. Se solicita modelizar el problema y determinar el valor de dicho préstamo, teniendo en cuenta que la operación financiera se basa en una ley compuesta.

Inicialmente, se observa que la tasa es anual y las cuotas son mensuales, lo que significa que la tasa (*i*) y el tiempo se la deben expresarse en función de meses, por lo tanto se tiene que $i = \frac{0,24}{12} = 0,02$ y los 2 años equivalen a 24 meses.

Por otro lado, el valor real del préstamo es al inicio del primer período, por lo que cada cuota que tiende a extinguir dicha deuda se actualiza a ese período, entonces estamos en presencia de lo que se denomina una amortización, que la denotaremos con V_n. En consecuencia, el factor constante que actualiza a cada cuota es $\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1,02} = 0,98039$, entonces en el período ***n*** se tiene un monto compuesto $M_n = C \times 0,98039^n$

Ahora, el valor del préstamo es:

$$V_{23} = M_0 + M_1 + M_2 + ... + M_{21} + M_{23}$$

Entonces:

$$V_{23} = 1200 \times 0,98039^0 + 1200 \times 0,98039^1 + 1200 \times 0,98039^2 + ... + 1200 \times 0,98039^{23}$$

Sacando factor común la constante $0,98039$ desde el segundo término, tenemos:

$$V_{23} = 1200 + 0,98039.\left(1200 + 1200 \times 0,98039^{1} + 1200 \times 0,98039^{2} + ... + 1200 \times 0,98039^{22}\right)$$

Lo que está en el paréntesis es V_{23-1}, por lo que para el período ***n*** se tiene una ecuación en diferencias de primer orden lineal:

$$V_n = 0,98039.V_{n-1} + 1200 \Rightarrow V_n - 0,98039.V_{n-1} = 1200$$

Teniendo en cuenta la solución general:

$$V_n = \left(x_0 - \frac{1200}{1-0,98029}\right).0,98039^{n} + \frac{1200}{1-0,98029} \Rightarrow V_{23} = \left(1200 - \frac{1200}{1-0,98029}\right).0,98039^{23} + \frac{1200}{1-0,98029}$$

$$V_{23} = 23150,64$$

Si se comparan los cálculos usando el software Matemática financiera 4.0.0[8] con la fórmula de amortización adelantada y se tiene el mismo resultado.

8 Valdez, L. (2013 – 2016). Software “Matemática Financiera 4.0.0” http://matematicafinanciera.wirez.com.ar

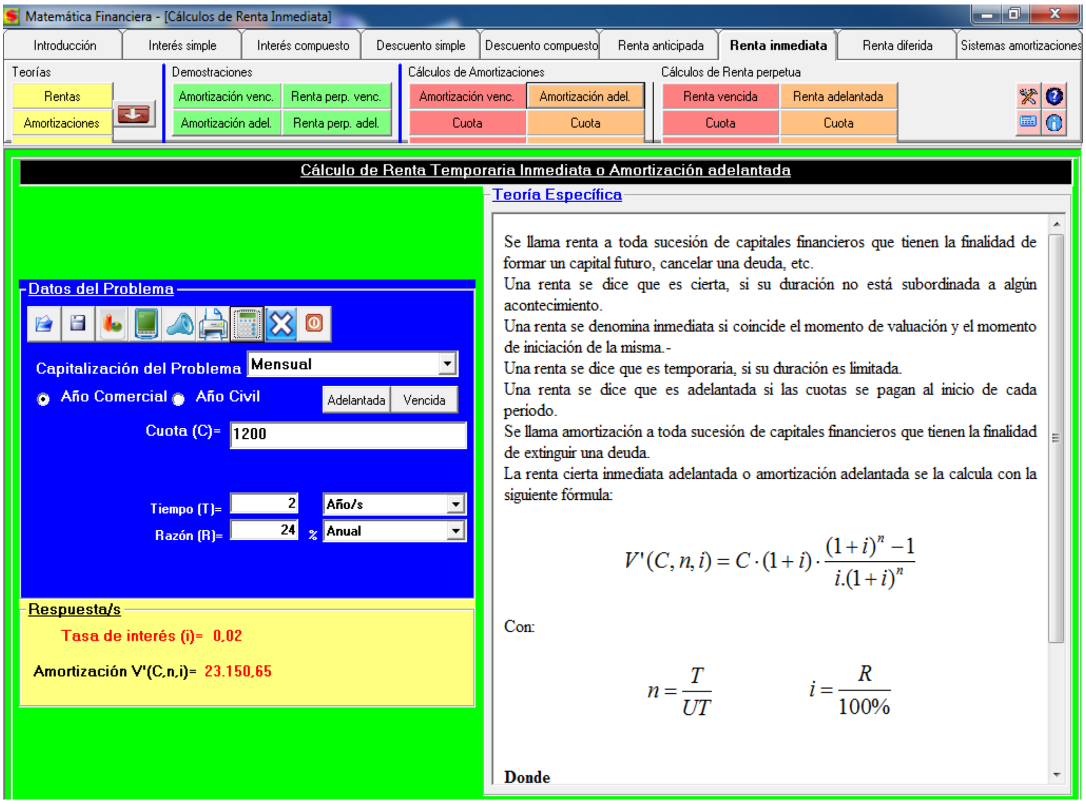

Figura 3: problema 7 con el software Matemática Financiera 4.0.0

Problema 8

Calcular la amortización con datos similares a los del problema anterior, pero con cuota vencida.

El razonamiento es parecido, pero las cuotas se actualizan por un período más, dado que se pagan al final de cada uno de ellos, entonces:

$$V_{23} = 1200.0,98039^{1} + 1200.0,98039^{2} + 1200.0,98039^{3} + \ldots + 1200.0,98039^{24}$$

Sacando factor común la constante $0,98039$ desde el segundo término, tenemos:

$$V_{23} = 1200 \times 0,98039 + 0,98039.\left(1200 \times 0,98039^{1} + 1200 \times 0,98039^{2} + \ldots + 1200 \times 0,98039^{23}\right)$$

Lo que está en el paréntesis es V_{23-1}, por lo que para el período ***n*** se tiene una ecuación en diferencias de primer orden lineal:

$$V_n = 0,98039.V_{n-1} + 1200 \times 0,98039 \Rightarrow V_n - 0,98039.V_{n-1} = 1176,468$$

$$V_n = \left(x_0 - \frac{0,98039 \times 1200}{1-0,98039} \right).0,98039^{n} + \frac{0,98039 \times 1200}{1-0,98039}$$

$$V_{23} = \left(0,98039 \times 1200 - \frac{1176,468}{1-0,98039} \right).0,98039^{23} + \frac{1176,468}{1-0,98039} = 22696,71$$

En definitiva y en base a los Problemas 7 y 8, para calcular una amortización, ya sea vencida o adelantada, se puede utilizar una ecuación en diferencias lineal de primer orden con coeficientes constantes $x_n - a.x_{n-1} = b$, donde la constante ***a*** es el factor de actualización, la constante ***b*** es la cuota, la que debe estar multiplicada por el factor de actualización si es ***vencida,*** y ***n*** es el número de períodos disminuido en uno.

Por otro lado, teniendo en cuenta la solución general:

$$x_n = \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right).a^{n} + \frac{b}{1-a}$$

x_n es el valor de la amortización, x_0 la cuota inicial (multiplicada por el factor de actualización si es ***vencida***) y el resto de las constantes con las mismas consideraciones anteriores.

Conclusiones

En un análisis final podemos hacer la siguiente comparación en estos casos particulares:

Matemática Financiera	Con Ecuaciones en Diferencias
Monto compuesto $C_n = C_0.(1+i)^n$	**Ecuación**: $x_n - a.x_{n-1} = 0$ (EED lineal homogénea) **Solución**: $x_n = x_0.a^n$, *siendo* x_0 *el capital y **a** el factor de capitalización y **n** el número de períodos.*
Valor actual en el Descuento compuesto $V_n = N.(1-i)^n$	**Ecuación**: $x_n - x_{n-1}.a^n = 0$ (EED lineal homogénea) **Solución**: $x_n = x_o.a^n$, *siendo* x_0 *el valor nominal, **a** el factor de descuento (1-i) y **n** el número de períodos.*
Imposición Vencida $S_{(n,i)} = C.\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ ***Imposición Adelantada*** $S'_{(n,i)} = C.(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$	**Ecuación**: $x_n - a.x_{n-1} = b$ (EED lineal no homogénea con coeficientes constantes) **Solución**: $x_n = \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right).a^n + \frac{b}{1-a}$, *siendo* x_n *la imposición,* x_o *y **b** valor de la cuota que, para el caso que la cuota sea **adelantada**, estará multiplicada por el factor de capitalización; **a** factor de capitalización y **n** el número de períodos disminuido en 1.-*
Amortización Vencida $V_{(n,i)} = C.\frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n}$ ***Amortización Adelantada*** $V'_{(n,i)} = C.(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n}$	**Ecuación**: $x_n - a.x_{n-1} = b$ (EED lineal no homogénea con coeficientes constantes) **Solución**: $x_n = \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right).a^n + \frac{b}{1-a}$, *siendo* x_n *la amortización,* x_o *y **b** valor de la cuota que, para el caso de que sea **vencida**, debe ir multiplicado por el factor de actualización; **a** factor de actualización y **n** el número de períodos disminuido en 1.-*

Con todo esto, podemos afirmar la aplicabilidad sencilla de las ***Ecuaciones en Diferencias*** en situaciones problemática concretas de Matemática Financiera, con lo que nos lleva a concluir la importancia que tienen en la resolución de problemas y, por ende, en la educación, lo se podría pensar en su implementación en el nivel medio y en los profesorados.

Referencias bibliográficas

- Barros, Luis E. (1999). Apunte de Clase Análisis Matemático I y II.
- Juarez, Gustavo A. Navarro, Silvia I. (2005). Ecuaciones en Diferencias con aplicaciones a modelos en dinámica de sistemas. Ed. Sarquís Catamarca.
- Juárez Gustavo A. Navarro, Silvia I.; Barros, Luis E.; Valdez, Luis E. (2013-2016). Software "Ecuaciones en Diferencias" Versión 1.3.4.
- Juárez, Gustavo A.; Navarro, Silvia I. (2011). Problemas discretos con valores iniciales – Revista UMA Vol. 26 N° 2 – FAMAF.
- Piskunov, N (1984). Cálculo Diferencial e Integral. Ed. Mir.
- Sadovky, Patricia (2005). Enseñar Matemática Hoy, miradas, sentidos y desafíos. Ed. Zorzal.
- Valdez Luis, Juarez Gustavo, Navarro Silvia, Barros Luis (2014) *Implementación de software para la enseñanza de las ecuaciones en diferencias con valores iniciales*. Revista de Educación Matemática. Unión Matemática Argentina. Volumen 29 N° 1.
- Valdez, Luis (2007). Matemática Financiera. Editorial Científica Universitaria.-
- Valdez, Luis (2016). Software "Matemática Financiera" Versión 4.0.0.
- Valdez, Luis (2016). Sitio web http://matematicafinanciera.wirez.com.ar.

Luis Ernesto Valdez. Instituto de Estudios Superiores Andalgalá. Catamarca. Luis_valdez@arnet.com.ar
Efraín Omar Nieva. Facultad de Ciencias Económica. Universidad Nacional de Catamarca.
Luis Edgardo Barros. Instituto de Estudios Superiores Andalgalá. Catamarca.