Geometría Axiomática de la Convexidad
Parte II: Axiomática de Cápsula convexa

Juan Carlos Bressan

Resumen

En la Parte I estudiamos una axiomática de segmentos, en la que definimos los convexos y estudiamos sus propiedades conjuntistas. Ello nos permitió definir la cápsula convexa para subconjuntos del espacio y demostrar algunas de sus propiedades.

En esta Parte II, tomaremos como concepto primitivo el de cápsula convexa que caracterizaremos mediante cuatro axiomas independientes que resultan de propiedades de la cápsula convexa dadas en la Parte I. Los segmentos se definirán a partir de la cápsula convexa y obtendremos como teorema los tres axiomas de la axiomática de segmentos de la Parte I. De esta forma ambos sistemas axiomáticos resultarán equivalentes. Ello permitirá asegurar que toda proposición de la Parte I también puede demostrarse en el sistema axiomático de la Parte II y viceversa. En tal sentido, utilizando la axiomática de cápsula convexa, probaremos los diversos teoremas en este sistema axiomático, prescindiendo de las demostraciones hechas en la primera parte.

En un Apéndice, un axioma independiente de los anteriores permitirá estudiar la separación de convexos mediante semiespacios.

La numeración de los parágrafos, definiciones, proposiciones y figuras continúa la de la Parte I del trabajo.

PARTE II

Axiomática de Cápsula convexa

8- Un sistema axiomático de cápsula convexa equivalente al de segmentos

Ahora vamos a ver que tomando ciertas proposiciones sobre la cápsula convexa de la axiomática de segmentos desarrollada en la Parte I de este trabajo, podemos obtener un nuevo sistema axiomático equivalente al anterior, pero que tenga como término primitivo un operador de cápsula convexa. En este caso los segmentos serán términos definidos y todo axioma del primer sistema será una proposición del segundo, mientras que todo axioma del segundo sistema será una proposición del primero.

Sea X un conjunto con $card\ X \geq 2$ y $conv : P(X) \to P(X)$ una función que a cada conjunto $A \subseteq X$ le asigna otro conjunto $conv\ A \subseteq X$ llamado *cápsula convexa* de A. Los siguientes cuatro axiomas caracterizan este **sistema axiomático de cápsula convexa**.

C.1. Para todo $A \subseteq X$, $conv\ (conv\ A) \subseteq conv\ A$.

C.2. Para todo $A \subseteq X$, $conv\ A = \bigcup \{ conv\ F : F\ \ finito \wedge F \subseteq A \}$.

C.3. Para todo $x \in X$, $conv\ \{x\} = \{x\}$.

C.4. Si $a \in X$ y $F \neq \phi$ es un subconjunto finito de X, entonces

$$conv(\{a\} \cup F) \subseteq \bigcup \{ conv\{a, y\} : y \in conv\ F \}.$$

Observemos que **C.1** es la proposición 4.4 (i) en donde se reemplazó la igualdad por una inclusión. Por otra parte, **C.2** es la proposición 4.3; además **C.3** es la tercera de las propiedades de 4.4 (iv). El axioma **C.4** es un caso particular del Corolario 5.3, en donde reemplazamos el conjunto $D \neq \phi$ por un conjunto finito $F \neq \phi$, la igualdad por una inclusión y por la cuarta propiedad de 4.4 (iv) $conv\{a, y\} = [a, y]$. En consecuencia, todos los axiomas del operador cápsula convexa se deducen en la axiomática de segmentos estudiada en la Parte I.

Ahora, comenzaremos probando algunas propiedades de la cápsula convexa que nos permitirán ver la equivalencia entre ambos sistemas axiomáticos.

Proposición 8.1. Si $A \subseteq B \subseteq X$, entonces $conv\ A \subseteq conv\ B$.

Demostración. Supongamos $A \subseteq B \subseteq X$ y sea $x \in conv\ A$. Así por **C.2** existe $F \subseteq A$ y F finito tal que $x \in conv\ F$. Puesto que $A \subseteq B$ resulta $F \subseteq B$ y, por **C.2**, $conv\ F \subseteq conv\ B$. Luego $x \in conv\ B$ y $conv\ A \subseteq conv\ B$.

Proposición 8.2. Para todo $A \subseteq X$, $A \subseteq conv\ A$.

Demostración. Si $x \in A$, entonces por **C.2** $conv\{x\} \subseteq conv\ A$. Pero por **C.3** $conv\{x\} = \{x\}$. Luego, $x \in conv\ A$.

Como corolario de 8.1 y 8.2 vemos que en **C.1** se puede reemplazar la inclusión por la igualdad.

Proposición 8.3. Para todo $A \subseteq X$, $conv\ (conv\ A) = conv\ A$.

Demostración. Por 8.2 $A \subseteq conv\ A$. Luego, por 8.1 $conv\ A \subseteq conv\ (conv\ A)$. Pero, por **C.1** $conv\ (conv\ A) \subseteq conv\ A$. Luego, $conv\ (conv\ A) = conv\ A$.

Proposición 8.4. Si $A, B \subseteq X$ y $A \subseteq conv\ B$, entonces $conv\ A \subseteq conv\ B$.

Demostración. Si $A \subseteq conv\ B$, entonces por 8.1 $conv\ A \subseteq conv(conv\ B)$ y por 8.3 $conv\ A \subseteq conv\ B$.

Finalmente, para demostrar que los axiomas de los segmentos se deducen en la axiomática de cápsula convexa, tendremos que definir el término *segmento cerrado* en este sistema, teniendo en cuenta la proposición 4.4 (iv).

Definición 8.5. Dados $a, b \in X$ definimos el *segmento cerrado* de extremos a, b mediante $[a,b] = conv\{a,b\}$.

Ahora veremos que los segmentos cerrados definidos en 8.5 cumplen los axiomas **S.1**, **S.2 y S.3** del sistema axiomático de segmentos.

Proposición 8.6. La función segmento cerrado definida para todo $(a,b) \in X^2$ mediante $[a,b] = conv\{a,b\}$ cumple los tres axiomas de la axiomática de segmentos:

S.1. $\{a, b\} \subseteq [a,b]$.

S.2. $[a,a] \subseteq \{a\}$.

S.3. $(\ c_1 \in [a,b_1] \wedge c_2 \in [a,b_2] \wedge x \in [c_1,c_2]\ ) \Rightarrow (\ \exists y \in [b_1,b_2]\ )[\ x \in [a,y]\ ]$.

Demostración. **S.1** es consecuencia de 8.2. Además, **S.2** es un caso particular de **C.3**, en donde reemplazamos la igualdad por una inclusión. Resta probar únicamente **S.3**; para ello tomemos $c_1 \in [a, b_1]$, $c_2 \in [a, b_2]$ y $x \in [c_1, c_2]$. Luego, por 8.5, $c_1 \in conv\{a, b_1\}$, $c_2 \in conv\{a, b_2\}$ y $x \in conv\{c_1, c_2\}$. Por 8.1, $conv\{a, b_1\} \cup conv\{a, b_2\} \subseteq conv\ \{a, b_1, b_2\}$, luego $\{c_1, c_2\} \subseteq conv\ \{a, b_1, b_2\}$; así, por 8.4 $conv\ \{c_1, c_2\} \subseteq conv\ \{a, b_1, b_2\}$ y $x \in conv\ \{a, b_1, b_2\}$. Pero por **C.4**, $conv\{a, b_1, b_2\} = conv(\{a\} \cup \{b_1, b_2\}) \subseteq \bigcup \{\ conv\ \{a, y\} : y \in conv\{b_1, b_2\}\ \}$; luego existe $y \in conv\{b_1, b_2\} = [b_1, b_2]$, tal que $x \in conv\{a, y\} = [a, y]$.

La proposición 8.6 completa la demostración de la equivalencia entre los sistemas axiomáticos de segmentos y de cápsula convexa. De allí que las proposiciones demostradas en el sistema axiomático de segmentos siguen siendo válida en la axiomática de cápsula convexa. El objetivo de este parágrafo consistió en probar la equivalencia entre ambos sistemas. En el siguiente desarrollaremos el sistema axiomático de cápsula convexa dando las definiciones y efectuando las demostraciones dentro del mismo y prescindiendo de la equivalencia antes demostrada.

9.- Desarrollo del sistema axiomático de cápsula convexa

Dentro de este contexto axiomático vamos a ver que en **C.4** se puede reemplazar la inclusión por la igualdad.

Proposición 9.1. Si $a \in X$ y $F \neq \phi$ es un subconjunto finito de X, entonces

$$conv(\{a\} \cup F) = \bigcup \{\ conv\{a, y\} : y \in conv\ F\}.$$

Demostración. Veremos que $\bigcup \{\ conv\{a, y\} : y \in conv\ F\} \subseteq conv(\{a\} \cup F)$ ya que la otra inclusión está dada en **C.4**. Por 8.1, $conv\ F \subseteq conv(\{a\} \cup F)$; por 8.2 $\{a\} \subseteq conv(\{a\} \cup F)$. Así, si $y \in conv\ F$, $\{a, y\} \subseteq conv(\{a\} \cup F)$ y por 8.4, $conv\{a, y\} \subseteq conv(\{a\} \cup F)$ y $\bigcup \{\ conv\{a, y\} : y \in conv\ F\} \subseteq conv(\{a\} \cup F)$.

Vamos a generalizar 9.1 reemplazando $F \neq \phi$ y finito, por un subconjunto $B \neq \phi$ que puede ser finito o infinito.

Proposición 9.2. Si $a \in X$ y $B \neq \phi$ es un subconjunto de X, entonces

$$conv(\{a\} \cup B) = \bigcup \{\ conv\{a, y\} : y \in conv\ B\}.$$

Demostración. Si $B \neq \phi$ es finito entonces vale la igualdad por 9.1. Supongamos que B es infinito y sea $D = \bigcup \{ conv\{a, y\} : y \in conv\ B\}$. Si $x \in D$, existe $y \in conv\ B$ tal que $x \in conv\{a, y\}$. Por 8.1 $y \in conv\ (\{a\} \cup B)$; por 8.2 $\{a, y\} \subseteq conv\ (\{a\} \cup B)$ y, por 8.4, $conv\{a, y\} \subseteq conv\ (\{a\} \cup B)$. En consecuencia, $x \in conv(\{a\} \cup B)$ y $D \subseteq conv(\{a\} \cup B)$. Por otra parte, si $x \in conv(\{a\} \cup B)$, por **C.2** existe $F \subseteq B$, F finito tal que $x \in conv(\{a\} \cup F)$; luego por **C.4** $x \in \bigcup \{ conv\{a, y\} : y \in conv\ F\}$; pero por 8.1 $conv\ F \subseteq conv\ B$, así $x \in D$ y $conv(\{a\} \cup B) \subseteq D$. En consecuencia, $conv(\{a\} \cup B) = D$

Observación 9.3. Por lo probado en 9.1 y 9.2 podríamos reemplazar el axioma **C.4**, en este sistema axiomático, por cualquiera de las proposiciones 9.1 o 9.2, obteniéndose sistemas axiomáticos equivalentes para operadores de cápsula convexa.

Proseguiremos el desarrollo de la axiomática de cápsula convexa, prescindiendo de las demostraciones ya obtenidas en la axiomática de segmentos. Hasta ahora no definimos en este sistema el término *conjunto convexo*. Por similitud con la proposición 4.4 (iii) damos la siguiente definición.

Definición 9.4. Si $A \subseteq X$, diremos que A es *convexo* si y solo si $A = conv\ A$.

Proposición 9.5. Si $x \in X$, entonces $\{x\}$ es convexo. Además X y ϕ son convexos y para todo $A \subseteq X$, $conv\ A$ es convexo.

Demostración. Por **C.3** $conv\ \{x\} = \{x\}$, luego $\{x\}$ es convexo. Por 8.2 $X \subseteq conv\ X$. Pero, $conv : P(X) \to P(X)$; luego $conv\ X \subseteq X$ y $X = conv\ X$, resultando X convexo. Tomemos $x, y \in X$, $x \neq y$; por 8.1 $conv\ \phi \subseteq conv\ \{x\}$ y $conv\ \phi \subseteq conv\ \{y\}$. Así, por **C.3**, $conv\ \phi \subseteq \{x\} \cap \{y\} = \phi$. Luego, $conv\ \phi = \phi$ y ϕ es convexo. Por 8.3, $conv\ A$ es convexo.

Proposición 9.6. $A \subseteq X$ es *convexo* si y solo si para todo F finito y $F \subseteq A$, $conv\ F \subseteq A$.

Demostración. Por **C.2** $conv\ A = \bigcup \{ conv\ F : F\ \mathit{finito} \wedge F \subseteq A\}$. Luego, si para todo F finito y $F \subseteq A$, $conv\ F \subseteq A$, entonces $conv\ A \subseteq A$. Pero, por 8.2 $A \subseteq conv\ A$. Así, $A = conv\ A$ y por 9.5 A es convexo.

Proposición 9.7. Sea $(C_i)_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos convexos de X, entonces:

(i) $\bigcap_{i\in I} C_i$ es convexo.

(ii) Si $(C_i)_{i\in I}$ es una cadena, entonces $\bigcup_{i\in I} C_i$ es convexo.

Demostración. (i) Sea $C = \bigcap_{i\in I} C_i$. Por 9.6 tendremos que ver que si $F \subseteq C$ y F es finito entonces $conv\ F \subseteq C$. Pero si $F \subseteq C$, entonces para todo $i \in I$, $F \subseteq C_i$ y, puesto que los C_i son convexos, $conv\ F \subseteq C_i$ y $conv\ F \subseteq C$. Luego, por 9.6, C es convexo.

(ii) Sea $D = \bigcup_{i\in I} C_i$. Tomemos $F \subseteq D$, con $card\ F < \infty$. Así, para cada $x \in F$, tomamos un subíndice $i \in I$, tal que $x \in C_i$. Si $J \subseteq I$ es el conjunto de los subíndices considerados, tendremos que $card\ J \leq card\ F$. Pero como $(C_i)_{i\in I}$ es una cadena, también $(C_i)_{i\in J}$ será una cadena y por ser J finito, existirá $i_0 \in J$ tal que $C_{i_0} = \bigcup_{i\in J} C_i$, Luego $F \subseteq C_{i_0}$, donde C_{i_0} es convexo. Así, $conv\ F \subseteq C_{i_0}$. Pero como $C_{i_0} \subseteq D$, luego $conv\ F \subseteq D$ y, por 9.6, D es convexo.

En 3.5 de la Parte I, definimos los convexos mediante los segmentos, mientras que en 9.4 de esta Parte II, los definimos como los conjuntos invariantes por el operador cápsula convexa. En la siguiente proposición veremos que también en esta axiomática podemos caracterizar los convexos mediante segmentos.

Proposición 9.8. Sea $A \subseteq X$, entonces A es un conjunto convexo si y solo si

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)\big([x,y] \subseteq A \big).$$

Demostración. Supongamos que $A \subseteq X$ y A es convexo. Si $F = \{x, y\} \subseteq A$, por 9.6 $conv\ F \subseteq A$ y, por 8.5, $conv\ F = [x,y]$; luego $[x,y] \subseteq A$.

Ahora supongamos que $(\forall x \in A)(\forall y \in A)\big([x,y] \subseteq A \big)$ y veremos que A es convexo. Para ello, en virtud de 9.6, tendremos que probar que si $F \subseteq A$ y F es finito entonces $conv\ F \subseteq A$. Esta demostración se hará por inducción sobre $j = card\ F$. Si $j = 0$, entonces $F = \phi$ y, por 9.5, $conv\ F = \phi \subseteq A$. Si $j = 1$, entonces $F = \{x\}$ y, por **C.3**, $conv\ F = \{x\} \subseteq A$. Si $j = 2$, entonces $F = \{x, y\}$, que por 8.5 $conv\ F = [x, y] \subseteq A$. Ahora, por hipótesis inductiva, supongamos que para $j = n$ con $n \geq 2$, vale que si $F \subseteq A$ y $card\ F = n$, entonces $conv\ F \subseteq A$. Probaremos que si $j = n+1$ y $F_1 \subseteq A$ con $card\ F_1 = n+1$, entonces $conv\ F_1 \subseteq A$. Tomemos $F \subseteq A$ con $card\ F = n$ y $F_1 = \{a\} \cup F$ con $a \in A$ y $a \notin F$; así, $card\ F_1 = n+1$. Por **C.4**, $conv\left(\{a\} \cup F\right) \subseteq \bigcup\{conv\ \{a, y\}: y \in conv\ F\}$. Pero $\{a, y\} \subseteq A$, pues $a \in A$, mientras que $y \in conv\ F \subseteq A$. Luego, $conv\ \{a, y\} = [a, y] \subseteq A$ y $conv\ F_1 \subseteq A$. De esta forma, por el principio de inducción completa, para cualquier $F \subseteq A$ con F finito, resulta $conv\ F \subseteq A$. Luego, por 9.6, A es convexo.

En 4.1 de la Parte I de este trabajo definimos la cápsula convexa de $A \subseteq X$ mediante la intersección de todos los convexos $C \subseteq X$ tales que $A \subseteq C$. En la siguiente proposición demostraremos en este sistema axiomático tal caracterización de $conv\ A$.

Proposición 9.9. Si $A \subseteq X$, entonces

$$conv\ A = \bigcap \left\{ C \subseteq X : A \subseteq C \wedge C\ convexo \right\}.$$

Demostración. Sea $\mathfrak{I} = \left\{ C \subseteq X : A \subseteq C \wedge C\ convexo \right\}$. Por 8.2 $A \subseteq conv\ A$. Pero, por 9.5, $conv\ A$ es convexo. Así, $conv\ A \in \mathfrak{I}$ y $\bigcap \mathfrak{I} \subseteq conv\ A$. Pero, por 8.1, para todo $C \in \mathfrak{I}$, $conv\ A \subseteq conv\ C$, y por 9.4, $C = conv\ C$. Así, para todo $C \in \mathfrak{I}$, $conv\ A \subseteq C$ y, en consecuencia, $conv\ A \subseteq \bigcap \mathfrak{I}$ y $conv\ A = \bigcap \mathfrak{I}$.

Como en la Parte I, de la definición 4.1 obtuvimos el corolario 4.2, en esta Parte II, de la proposición 9.9 obtenemos el corolario siguiente.

Corolario 9.10. La cápsula convexa cumple las siguientes condiciones que la caracterizan:

(i) $conv\ A$ es convexo.

(ii) $A \subseteq conv\ A$.

(iii) Si $A \subseteq B$ y B es convexo, entonces $(conv\ A) \subseteq B$.

10- Independencia en la axiomática de cápsula convexa

Puesto que los axiomas de esta Axiomática de cápsula convexa son proposiciones de la Axiomática de segmentos, podemos afirmar la consistencia del sistema axiomático que estamos estudiando. Por supuesto que una forma directa de asegurar la consistencia se logra tomando en el plano o el espacio euclidiano la cápsula convexa usual que evidentemente cumple los cuatro axiomas del sistema.

En la Parte I vimos la independencia de los axiomas de segmentos. Ahora veremos la independencia de los axiomas de cápsula convexa. Para ello tendremos que encontrar una interpretación que no satisfaga el axioma considerado pero que satisfaga todos los restantes axiomas del sistema.

10.1. Independencia de C.1. Sea X el plano euclidiano y definamos, como en 5.7, para todo $A \subseteq X$, $C(A) = \bigcup\{[x, y] : x, y \in A\}$. Si $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, donde a_1, a_2, a_3 son tres puntos no alineados del plano, resulta que $C(A) = [a_1, a_2] \cup [a_2, a_3] \cup [a_3, a_1]$, mientras que $C(C(A)) = conv\ A$, es decir, es el triángulo de vértices a_1, a_2, a_3. En consecuencia, este operador no cumple **C.1**, sin embargo, cumple los tres axiomas restantes. Resulta interesante ver que, por no cumplirse **C.1,** el axioma **C.4** se satisface con la inclusión estricta. En efecto, si A es el conjunto ya considerado y $F = \{a_2, a_3\}$ podemos escribir $A = \{a_1\} \cup F$. Así, $C(F) = [a_2, a_3]$ y $C(\{a_1\} \cup F) = C(A)$, mientras que $\bigcup\{C(a_1, y) : y \in C(F)\} = conv\ A$.

10.2. Independencia de C.2. Consideremos en el plano euclidiano X, la cápsula convexa cerrada $cconv : P(X) \to P(X);\ A \to cconv\ A$, definida por $cconv\ A = \bigcap\{C \subseteq X : A \subseteq C \wedge C\ convexo\ cerrado\}$. Como la familia de los convexos cerrados de X es interseccional, $cconv\ A$ es el menor conjunto convexo cerrado que contiene a A y, en consecuencia, el operador $cconv$ es idempotente por lo que cumple **C.1**. Por otra parte, si $F \subseteq X$ es finito, entonces F es cerrado y acotado, por lo cual $conv\ F$ también será cerrado y acotado. Así, si $F \subseteq X$ es finito, $cconv\ F = conv\ F$. De esta forma, se cumplen los axiomas **C.3** y **C.4** para la cápsula convexa cerrada, ya que los conjuntos allí considerados son finitos y en consecuencia se puede reemplazar en los mismos $conv$ por $cconv$. Esto último nos permite ver que si $A \subseteq X$, $\bigcup\{cconv\ F : F\ finito \wedge F \subseteq A\} = conv\ A$, pero $cconv\ A = cl(conv\ A)$;

así si $conv\ A$ no es cerrado entonces $\bigcup\left\{ cconv\ F : F\ \ finito \wedge F \subseteq A\right\} \neq cconv\ A$. Por ejemplo, si tomamos la corona abierta $A = \left\{ (x;y) \in R^2 : 1 < \left\|(x;y)\right\| < 2 \right\}$, entonces $\bigcup\left\{ cconv\ F : F\ \ finito \wedge F \subseteq A\right\} = conv\ A$, es decir, es el círculo abierto de centro $(0;0)$ y radio 2, pero $cconv\ A = \left\{ (x;y) \in R^2 : \left\|(x;y)\right\| \leq 2 \right\}$ es el círculo cerrado del mismo centro y radio. Evidentemente, no se cumple **C.2**.

10.3. Independencia de C.3. Consideremos un conjunto X con $card\ X \geq 2$ y $V : P(X) \to P(X);\ A \to V(A) = \phi$. Así $V(\{x\}) = \phi$, en consecuencia, no se satisface **C.3**, pero se cumplen los restantes axiomas.

10.4. Independencia de C.4. Tomemos en el plano euclidiano X, la cápsula afín $af : P(X) \to P(X);\ A \to af\ A$, con $af\ A = \bigcap\left\{ C \subseteq X : A \subseteq C \wedge C\ afín\right\}$. Si a, b_1, b_2 son tres puntos no alineados del plano X y $F = \{b_1, b_2\}$, resulta que $\bigcup\left\{ af\{a, y\} : y \in af\ \ F\right\} = (X - r) \cup \{a\}$, donde r es la recta paralela a $af\ F$, mientras que $af(\{a\} \cup F) = X$. Fácilmente se ve que se cumplen los restantes axiomas. Cabe destacar que **C.2** es propio de todas las cápsulas algebraicas, mientras que **C.4** es característico de la cápsula convexa

11. Observaciones finales de la Parte II

En lo desarrollado en esta Parte II del trabajo utilizamos una axiomática de cápsula convexa, cuyos cuatro axiomas se deducían en la axiomática de segmentos de la Parte I. Además vimos que esta axiomática es equivalente a la de segmentos y que sus axiomas son independientes. Evidentemente al contar con pocos axiomas se facilita la prueba de la independencia.

Cabe destacar que el grado de abstracción de esta segunda parte es mayor que el del sistema axiomático de segmentos, pues toma como término primitivo el de cápsula.

En los sistemas axiomáticos considerados en las dos partes de este trabajo no es posible demostrar algún resultado acerca de la separación de convexos. Debido a la importancia que tiene este tema, veremos en el apéndice la separación de convexos mediante semiespacios, que es el primer paso para poder llegar a la separación de convexos mediante hiperplanos, que requiere de un sistema axiomático mucho más complejo, como el dado en Bressan (2007).

APÉNDICE

La separación de convexos mediante semiespacios

12- El axioma de separación

Puesto que por una consecuencia de 3.6 es $conv\{a,b\}=[a,b]$, podemos enunciar este nuevo axioma, respectivamente, en la axiomática de segmentos y en la de cápsula convexa mediante las siguientes expresiones equivalentes.

S.4. $(\,c_1 \in [a,b_1] \wedge c_2 \in [a,b_2]\,) \Rightarrow [b_1,c_2] \cap [b_2,c_1] \neq \phi$.

C.5. $[\,c_1 \in conv\{a,b_1\} \wedge c_2 \in conv\{a,b_2\}\,] \Rightarrow conv\{b_1,c_2\} \cap conv\{b_2,c_1\} \neq \phi$.

La Figura 6 ilustra dicho axioma

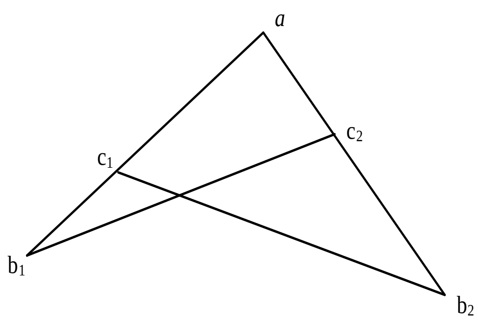

Figura 6

Este axioma que es independiente de los restantes de los sistemas axiomáticos considerados suele llamarse axioma de Pasch. Si agregamos **S.**4 al sistema axiomático de segmentos, o bien **C.5** al de cápsula convexa podemos probar la siguiente proposición, cuya demostración la haremos dentro del sistema axiomático de cápsula convexa.

Proposición 12.1. Si A y B son convexos no vacíos de X , tales que $A \cap B = \phi$, $A \cup B \neq X$ y $p \notin A \cup B$, entonces se cumple al menos una de las siguientes igualdades: (i) $A \cap conv(\{p\} \cup B) = \phi$; (ii) $B \cap conv(\{p\} \cup A) = \phi$.

Demostración. Supongamos por el absurdo que $A \cap conv(\{p\} \cup B) \neq \phi$ y $B \cap conv(\{p\} \cup A) \neq \phi$. Veremos que en ese caso $A \cap B \neq \phi$. Tomemos $b_0 \in A \cap conv(\{p\} \cup B)$ y $a_0 \in B \cap conv(\{p\} \cup A)$. Luego, por 9.2 y 9.4 existe $b \in B$ tal que $b_0 \in conv\{p, b\}$, y existe $a \in A$, tal que $a_0 \in conv\{p, a\}$. Pero por **C.5**, $conv\{a, b_0\} \cap conv\{b, a_0\} \neq \phi$. Además, $conv\{a, b_0\} \subseteq A$ y $conv\{b, a_0\} \subseteq B$. Luego, $A \cap B \neq \phi$. De esta forma, de la negación de la tesis llegamos a la negación de una de las hipótesis. En consecuencia, se cumple la tesis de la proposición.

La proposición 12.1 nos permite pensar que si tenemos en X dos convexos A y B no vacíos, disjuntos y cuya unión no sea X, podemos irlos agrandando ya sea uno o el otro hasta obtener dos convexos complementarios C y D, tales que $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$. La demostración de este resultado se hace aplicando el Lema de Zorn de la teoría de conjuntos, que enunciamos a continuación.

Lema de Zorn. Si toda cadena en un conjunto parcialmente ordenado tiene cota superior, entonces el conjunto tiene un elemento maximal.

Recordemos que en un conjunto parcialmente ordenado, una *cadena* es un subconjunto totalmente ordenado, es decir, dados dos elementos cualesquiera de la cadena siempre serán comparables por la relación de orden del conjunto.

Ahora demostraremos en este sistema axiomático, el teorema de separación de convexos mediante convexos complementarios, conocido en la convexidad desarrollada en espacios vectoriales como teorema de Kakutani.

Proposición 12.2. Si A y B son convexos no vacíos de X, tales que $A \cap B = \phi$, entonces existen C y D convexos complementarios tales que $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$.

Demostración. Comenzaremos definiendo un conjunto $\Im$ al que podamos aplicarle luego el lema de Zorn. Para ello tomemos

$$\Im = \{ (A_i, B_i) : A_i, B_i \ convexos\, de\ X \wedge A \subseteq A_i \wedge B \subseteq B_i \wedge A_i \cap B_i = \phi \}.$$

Evidentemente, $\Im \neq \phi$ ya que $(A, B) \in \Im$; además $\Im$ puede ordenarse parcialmente mediante la relación $(A_i, B_i) \prec (A_j, B_j)$ si y solo si $A_i \subseteq A_j$ y $B_i \subseteq B_j$. Tomemos una cadena $\Im_1 = \{ (A_i, B_i) \in \Im : i \in I \}$, es decir un subconjunto de $\Im$ que esté totalmente ordenado por la relación de orden parcial antes definida, y veamos que dicha cadena tiene una cota superior en $\Im$. Para ello consideramos el par ordenado

$\left(\bigcup_{i\in I} A_i , \bigcup_{i\in I} B_i \right)$ y veremos que pertenece a $\Im$. Sabemos por 9.7 (ii) que $\bigcup_{i\in I} A_i$ y $\bigcup_{i\in I} B_i$ son convexos. Resta ver que $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\cap\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)=\phi$. Supongamos que existe $x\in\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\cap\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)$, luego, existe $j\in I$, tal que $x\in A_j$ y existe $k\in I$, tal que $x\in B_k$. Pero como $\Im_1$ es una cadena resulta que $\left(A_j, B_j\right)\prec\left(A_k, B_k\right)$ o bien $\left(A_k, B_k\right)\prec\left(A_j, B_j\right)$. Supongamos, por ejemplo, que $\left(A_j, B_j\right)\prec\left(A_k, B_k\right)$; luego, $A_j \subseteq A_k$ y $B_j \subseteq B_k$. Así $x\in A_k \cap B_k$, lo cual contradice que $\left(A_k, B_k\right)\in\Im$. De esta forma la cadena $\Im_1$ tiene por cota superior el par ordenado $\left(\bigcup_{i\in I} A_i , \bigcup_{i\in I} B_i \right)$ y por el lema de Zorn existe un elemento maximal $(C,D)\in\Im$. En consecuencia, C y D son convexos resultando $A\subseteq C$ y $B\subseteq D$. Si suponemos que $C\cup D\neq X$, entonces existe $p\notin C\cup D$ y (C,D) no sería maximal. En efecto, por 12.1 tendríamos que $C\cap conv(\{p\}\cup D)=\phi$ o bien $D\cap conv(\{p\}\cup C)=\phi$. En consecuencia, $(C,D)\prec(C,conv(\{p\}\cup D))$ o bien $(C,D)\prec(conv(\{p\}\cup C),D)$. De esta forma, (C,D) no sería elemento maximal de $\Im$, lo cual contradice la maximalidad de (C,D). En consecuencia, $C\cup D=X$; y C, D son convexos complementarios tales que $A\subseteq C$ y $B\subseteq D$.

La proposición anterior permite definir un concepto débil de separación de convexos mediante semiespacios complementarios.

Definición 12.3. Diremos que $\{S_1, S_2\}$ es un par de semiespacios complementarios de X si y solo si S_1 y S_2 son convexos no vacíos de X, tales que $S_1\cap S_2=\phi$ y $S_1\cup S_2=X$.

Definición 12.4. Si A y B son convexos no vacíos de X, tales que $A\cap B=\phi$, diremos que $\{S_1, S_2\}$ es un par de semiespacios complementarios que separan A y B si y solo si $A\subseteq S_1$ y $B\subseteq S_2$, o bien, $A\subseteq S_2$ y $B\subseteq S_1$.

En la definición 12.4 no pedimos que $A\cup B\neq X$, pues si $A\cup B=X$, entonces $\{S_1, S_2\}=\{A,B\}$ es el par de semiespacios complementarios que separan A y B. Como consecuencia de 12.2 y 12.4 obtenemos la proposición siguiente.

Proposición 12.5. Si A y B son convexos no vacíos de X, tales que $A \cap B = \phi$, entonces existe un par $\{S_1, S_2\}$ de semiespacios complementarios que separan A y B.

13- Independencia de la axiomática de segmentos S.1, S.2, S.3 y S.4

Para probar la independencia de cada uno de los cuatro axiomas respecto de los restantes, es necesario que nos aseguremos que cada una de las interpretaciones utilizadas en 6.2 para probar la independencia de los axiomas **S.1, S.2, S.3**, también satisface **S.4**, para luego buscar una interpretación que satisfaga los tres primeros axiomas, pero que no satisfaga **S.4**.

La interpretación dada en 6.2.1 donde el segmento es $s(a,b) = \phi$, hace que no se satisfaga **S.1** pero se satisfagan vacíamente los restantes axiomas **S.2**, **S.3** y **S.4**. Con respecto a la independencia de **S.2**, en donde el segmento $s(a,b) = X$, evidente no satisface **S.2**, pero satisface los tres restantes axiomas **S.1**, **S.3** y **S.4**. En el caso de la independencia de **S.3**, donde X es el triángulo ab_1b_2 al que le restamos el segmento $]b_1, b_2[=: [b_1, b_2] - \{b_1, b_2\}$, también cumple **S.4**. De esta forma, las interpretaciones dadas en 6.2.1, 6.2.2 y 6.2.3 también sirven para probar la independencia de los tres primeros axiomas en la axiomática de segmentos que utilizamos en este Apéndice.

Finalmente, para probar la independencia de **S.4** respecto de los restantes axiomas tomamos tres puntos a, b, c no alineados del plano y $X = [a,b] \cup [b,c]$. De esta forma, definimos para $x; y \in X$ el segmento cerrado $x; y$ en X como la intersección del segmento $[x, y]$ del plano con X. Fácilmente se ve que esta interpretación satisface los tres primeros axiomas, pero no cumple **S.4**.

En consecuencia, queda probada la independencia de los axiomas del sistema dado por **S.1-S.4**. Por otra parte, puesto que la axiomática de cápsula convexa de la Parte II es equivalente a la de segmentos de la Parte I, y que **S.4** y **C.5** son dos expresiones equivalentes de la misma propiedad, resulta que el sistema dado por **C.1-C.5** también tiene todos sus axiomas independientes. En efecto, de suponer que **C.5** podría deducirse de **C.1-C.4**, como dichos axiomas son teoremas del sistema **S.1-S.3**, resultaría que **S.4** se deduciría de **S.1-S.3**, lo cual contradiría la independencia de **S.4** ya probada.

14- Equivalencia entre el axioma de separación y el teorema de Kakutani

Resulta interesante destacar la importancia de agregar el axioma de separación a las axiomáticas antes estudiadas, ya que el mismo conjuntamente con los axiomas anteriores, permite obtener los resultados más elementales de la separación de convexos. Además, el axioma de separación, la proposición 12.1 y el teorema de separación de Kakutani 12.2 resultan ser equivalentes, ya sea en la axiomática de segmentos dada por **S.1-S.3**, como en el sistema axiomático de cápsula convexa dado por **C.1-C.4**. Este resultado se verá en la siguiente proposición en donde probaremos las implicaciones que nos llevarán a dichas equivalencias. En la misma trabajaremos directamente con la axiomática de cápsula convexa dada por **C.1-C.4**.

Proposición 14.1. En la axiomática de cápsula convexa dada por **C.1-C.4**, los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) $[\, c_1 \in conv\{a, b_1\} \wedge c_2 \in conv\{a, b_2\}\,] \Rightarrow conv\{b_1, c_2\} \cap conv\{b_2, c_1\} \neq \phi$.

(ii) Si A y B son convexos no vacíos de X, tales que $A \cap B = \phi$, $A \cup B \neq X$ y $p \notin A \cup B$, entonces se cumple al menos una de las siguientes igualdades: (i) $A \cap conv(\{p\} \cup B) = \phi$; (ii) $B \cap conv(\{p\} \cup A) = \phi$.

(iii) Si A y B son convexos no vacíos de X, tales que $A \cap B = \phi$, entonces existen C y D convexos complementarios tales que $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$.

Demostración. Por las demostraciones de 12.1 y 12.2 sabemos que (i) implica (ii) y que (ii) implica (iii). Si demostramos que (iii) implica (i) quedará probada la equivalencia entre los tres enunciados. Para ello supongamos que $c_1 \in conv\{a, b_1\}$ y $c_2 \in conv\{a, b_2\}$, pero $conv\{b_1, c_2\} \cap conv\{b_2, c_1\} = \phi$. Luego, por (iii) existen C y D convexos complementarios tales que $conv\{b_1, c_2\} \subseteq C$ y $conv\{b_2, c_1\} \subseteq D$. De esta forma, $a \in C$, o bien, $a \in D$. Si suponemos que $a \in C$, entonces $conv\{a, b_1, c_2\} \subseteq C$, luego $c_1 \in C$, lo que contradice que $conv\{b_2, c_1\} \subseteq D$. Por otra parte, si suponemos que $a \in D$, entonces $conv\{a, b_2, c_1\} \subseteq D$; así $c_2 \in D$, lo que contradice que $conv\{b_1, c_2\} \subseteq C$. De esta forma queda demostrado que (iii) implica (i), con lo cual los tres enunciados son equivalentes.

Observación 14.2. En la demostración de 12.2 debemos usar el Lema de Zorn o algunos de los enunciados equivalentes al Axioma de elección. Evidentemente las dificultades de la demostración exigen mayores conocimientos matemáticos que las demostraciones anteriores. De allí que damos a continuación una demostración de (ii) implica (i) de la proposición 14.1 para aquel docente que no dé el teorema de separación mediante convexos complementarios. La demostración la haremos por el contrarrecíproco probando que la negación de (i) implica la negación de (ii).

Supongamos que $c_1 \in conv\{a,b_1\}$ y $c_2 \in conv\{a,b_2\}$, donde $c_1 \notin \{a,b_1\}$ y $c_2 \notin \{a,b_2\}$, ya que si $c_1 \in \{a,b_1\}$ o $c_2 \in \{a,b_2\}$, la tesis de (i) se cumpliría trivialmente. Tomemos $M = conv\{b_1,c_2\}$ y $P = conv\{b_2,c_1\}$, y supondremos que no se cumple la tesis de (i), es decir, que $M \cap P = \phi$.

Evidentemente, $a \notin M \cup P$, pues si $a \in M$, resultaría $M = conv\{a,b_1,c_2\}$, $c_1 \in conv\{a,b_1\} \subseteq M$ y $c_1 \in M \cap P$; análogamente, si $a \in P$, resultaría $P = conv\{a,b_2,c_1\}$, $c_2 \in conv\{a,b_2\} \subseteq P$ y $c_2 \in M \cap P$.

En consecuencia, M y P son convexos no vacíos de X, tales que $M \cap P = \phi$, y $a \notin M \cup P$.

Pero $c_2 \in conv\{b_1,c_2\} \cap conv\{a,b_2,c_1\}$, y $c_1 \in conv\{b_2,c_1\} \cap conv\{a,b_1,c_2\}$. Así, $c_2 \in M \cap conv(\{a\} \cup P) \neq \phi$ y $c_1 \in P \cap conv(\{a\} \cup M) \neq \phi$, lo que contradice la tesis de (ii).

15. Observaciones finales del trabajo

El material dado en este Apéndice permite ampliar lo que se puede hacer dentro de la geometría axiomática de la convexidad. Queda a criterio del profesor la selección y adaptación del contenido que pueda ser enseñado en los diversos cursos. La idea fue la de llevar a un nivel más elemental temas que tradicionalmente formaban parte de trabajos de investigación en Geometría de la Convexidad. En particular, la mayoría de resultados del presente trabajo fueron desarrollados en Bressan (1972 y 1976). En el trabajo de Bressan-Ferrazzi (2002) se prueba la equivalencia entre las familias interseccionales y la existencia de un operador de cápsula generado por dicha familia. También se destaca la diferencia entre las cápsulas de origen algebraico y topológico. El libro de Coppel (1998) hace un desarrollo exhaustivo de un sistema axiomático que toma como término primitivo el de segmento cerrado y puede tomarse como libro de referencia para estudios posteriores. Por otra parte, en Van de Vel (1993) van a encontrar diversos sistemas axiomáticos relacionados con la convexidad.

BIBLIOGRAFÍA

Bressan, J. C. (1972); Sistema Axiomático para Operadores de Cápsula Convexa, *Revista de la Unión Matemática Argentina*, 26, 131-142.

Bressan, J. C. (1976); *Sistemas Axiomáticos para la Convexidad*, Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA.

Bressan, J. C. y Ferrazzi de Bressan, A. E. (2002); Las Cápsulas en las Estructuras de la Matemática, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Clame, Volumen 15, Tomo 2, 681-686.

Bressan, J. C. y Ferrazzi de Bressan, A. E. (2009); Lógica simbólica y teoría de conjuntos, Parte I, *Revista de Educación Matemática*, UMA, 24-1, 3-16.

Bressan, J. C. y Ferrazzi de Bressan, A. E. (2009); Lógica simbólica y teoría de conjuntos, Parte II, *Revista de Educación Matemática*, UMA, 24-2, 15-27.

Coppel, W. A. (1998), *Foundations of Convex Geometry*, Cambridge University Press.

Van de Vel, M. L. J. (1993), *Theory of Convex Structure*s, North-Holland. º