Estrategias de determinante cero de W.H. Press y F.J. Dyson

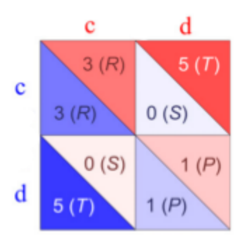
Exequiel Aguirre

Resumen

El juego del dilema del prisionero, en su versión de dos jugadores, puede ser usado como modelo para muchas situaciones del mundo real, que involucran cooperativismo y competencia. Se asume en general, que no hay una estrategia donde, unilateralmente, se pueda forzar a recibir una recompensa injusta.
En un artículo publicado por W.H. Press y F.J. Dyson, se muestra que existen estrategias con esa característica. Con dichas estrategias, un jugador puede forzar el puntaje del oponente o establecer una relación lineal entre el puntaje propio y el del oponente.
En este trabajo, se pretende explicar lo expuesto en el paper original de W.H. Press y F.J. Dyson, completando algunos cálculos y aplicarlos en una simulación.

1. Introducción

El dilema del prisionero provee un marco para entender como dar con un balance entre cooperación y competencia, y es por eso una herramienta muy útil para tomar deciciones estratégicas. Tiene aplicaciones en diversas áreas, como por ejemplo: economía, política, biología, psicología y sociología.
El juego se puede presentar de la siguiente manera:
Dos miembros de una banda criminal son capturados por la policia e interrogados, por separado. Cada criminal tiene dos opciones, cooperar con su compañero o no cooperar. De ahora en adelante nos referiremos a cada criminal como, jugador X y jugador Y. Si X e Y cooperan, ambos ganan una recompensa R, si uno de ellos no coopera recibe un pago mayor T, mientras que el jugador que coopera recibe una recompensa menor, S, usualmente cero. Si ambos no cooperan, entonces reciben una recompensa P. Para que el juego sea de interés, se debe satisfacer que $T > R > P > S$ y $2R > T + S$. Los valores usuales son (T,R,P,S)=(5,3,1,0)



El dilema del prisionero iterado, consiste en sucesivas partidas jugadas por, digamos X e Y. Aquí los jugadores podrían basar sus jugadas en las jugadas anteriores. Sería natural pensar que el jugador que es capaz de recordar más jugadas, podría confeccionar una estrategia más eficiente y así llevar ventaja. Se prueba que esto no es así, y que solo importa la última jugada[1]. Es por eso que las estrategias seran elaboradas a partir de el último resultado, sin pérdida de generalidad. Es decir, cada jugador va a basar su estrategia en el resultado xy $\in$ (cc,cd,dc,dd) donde c significa cooperar y d, no cooperar (defect en inglés). La estrategia de X, p=(p_1, p_2, p_3, p_4) son las probabilidades de cooperar en cada una de las situaciones anteriores. En forma análoga, la estrategia de Y es q=(q_1, q_2, q_3, q_4) visto desde su perspectiva yx $\in$ (cc,cd,dc,dd).

2. Resultados

2.1. Estrategias de determinante cero

Si bien es posible realizar una simulación del juego movimiento por movimiento uno podría evitar esto con una matriz de transición de Markov. Esta matriz es generada a partir de las estrategias p y q.

$$M = \begin{bmatrix} p_1q_1 & p_1(1-q_1) & (1-p_1)q_1 & (1-p_1)(1-q_1) \\ p_2q_3 & p_2(1-q_3) & (1-p_2)q_3 & (1-p_2)(1-q_3) \\ p_3q_2 & p_3(1-q_2) & (1-p_3)q_2 & (1-p_3)(1-q_2) \\ p_4q_4 & p_4(1-q_4) & (1-p_4)q_4 & (1-p_4)(1-q_4) \end{bmatrix}$$

El valor M_{ij} representa la probabilidad de pasar de un estado i a un estado j donde, i j estan asociados a una estrategia en (cc,cd,dc,dd), según la perspectiva de cada jugador. Por ejemplo, M_{32} representa la probabilidad de pasar de un estado dc a cd.
Definición: Denotemos por $S_X := (R,S,T,P)^T$, $S_Y := (R,T,S,P)^T$ los vectores de pago de los jugadores X e Y respectivamente.
Definición: Un vector columna 4x1, v_s, tal que,

$$v_s^T M = v_s^T$$

y sus componentes suman 1, es llamado vector estacionario.[2]

Notar que cualquier vector v proporcional a v_s también cumple con la condición:

$$v^T M = v^T$$

[1]Para la demostración de este resultado ver el apéndice A de [4].
[2]Para una matriz A su transpuesta es denotada por A^T.

Es decir, v es un autovector (a izquierda) asociado al autovalor 1. Afirmamos que con v y el vector de pagos asociado a cada jugador, uno puede calcular el resultado del juego.

Dado que M tiene un autovector asociado al autovalor 1, la matriz M':=M-I es singular y por ende, de determinante cero.
De álgebra lineal se tiene el siguiente resultado:

$$Adj(M')M' = det(M')I = 0$$

Donde Adj(M') es la matriz Adjunta de M'.[3]
Sea A:=Adj(M'), entonces por la igualdad anterior, tenemos que:

$$AM' = A(M-I) = 0 \Rightarrow AM = A$$

Es decir, que el elemento

$$(AM)_{ij} = \sum_{k=1}^{4} A_{ik}M_{kj} = A_{ij}$$

Ahora, sea w la n-esima fila de A, con n=1, 2, 3, 4 .

$$w := (w_1, w_2, w_3, w_4) = (A_{n1}, A_{n2}, A_{n3}, A_{n4})$$

Entonces, el j-esimo elemento del vector (wM) es,

$$(wM)_j = \sum_{k=1}^{4} w_k M_{kj} = \sum_{k=1}^{4} A_{nk}M_{kj} = A_{nj} = w_j$$

Es decir que $wM = w$, por ende, w es proporcional a v. Dado que n es arbitrario, se puede concluir que cada fila de Adj(M') es proporcional a v. [4]

Sea w, la cuarta fila de la matriz A,

$$w := (w_1, w_2, w_3, w_4) = (A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{44}).$$

Nos enfocaremos en la primera componente de w, por un momento.

$$w_1 = A_{41} = Adj(M')_{41} = (-1)^{4+1}C_{14} = -det \begin{bmatrix} p_2q_3 & p_2(1-q_3)-1 & (1-p_2)q_3 \\ p_3q_2 & p_3(1-q_2) & (1-p_3)q_2-1 \\ p_4q_4 & p_4(1-q_4) & (1-p_4)q_4 \end{bmatrix}$$

[3]Para más información sobre este resultado y las definiciones involucradas ver [2].

[4]Esta afirmación no es trivial, proviene de aplicar el teorema de Perron-Frobenius. Para más información ver [1].

Donde $(-1)^{4+1}C_{14}$ es el cofactor de M'_{41}. Este determinante no se modifica si sumamos la primera columna de M' a la segunda y tercera, obteniendo

$$w_1 = -det \begin{bmatrix} p_2q_3 & p_2(1-q_3)-1+p_2q_3 & (1-p_2)q_3+p_2q_3 \\ p_3q_2 & p_3(1-q_2)+p_3q_2 & (1-p_3)q_2-1+p_3q_2 \\ p_4q_4 & p_4(1-q_4)+p_4q_4 & (1-p_4)q_4+p_4q_4 \end{bmatrix} =$$
$$-det \begin{bmatrix} p_2q_3 & p_2-1 & q_3 \\ p_3q_2 & p_3 & q_2-1 \\ p_4q_4 & p_4 & q_4 \end{bmatrix}$$

Llamemos W_1 a esta última matriz.Un cálculo similar se puede realizar y obtener matrices W_2, W_3, W_4 correspondientes a w_2, w_3, w_4 respectivamente. Es decir que las componentes de v, son salvo un signo y una constante c, determinantes de una matriz de este tipo. Ahora sea, $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T$, entonces definimos,

$$D(p,q,f) := det \begin{bmatrix} p_1q_1-1 & p_1-1 & q_1-1 & f_1 \\ p_2q_3 & p_2-1 & q_3 & f_2 \\ p_3q_2 & p_3 & q_2-1 & f_3 \\ p_4q_4 & p_4 & q_4 & f_4 \end{bmatrix}$$

$$= -det(W_1)f_1 + det(W_2)f_2 - det(W_3)f_3 + det(W_4)f_4 = cv \cdot f$$

Notar que la segunda columna $\tilde{p} := (p_1-1, p_2-1, p_3, p_4)^T$ está solo bajo el control de X. Analogamente la tercera columna $\tilde{q} := (q_1-1, q_3, q_2-1, q_4)^T$ esta bajo el control de Y.

En su estado estacionario, podemos definir los respectivos puntajes finales, como:

$$s_X := \frac{v \cdot S_X}{v \cdot \bar{1}} = \frac{D(p,q,S_X)}{D(p,q,\bar{1})} \text{ , } s_Y := \frac{v \cdot S_Y}{v \cdot \bar{1}} = \frac{D(p,q,S_Y)}{D(p,q,\bar{1})}$$

Donde el vector $\bar{1} := (1,1,1,1)$. Estos denominadores son necesarios para que las componentes sumen 1, (requerido en un para un vector de probabilidad estacionario). Notar que una combinación lineal de los puntajes finales s_X, s_Y satisface:

$$\alpha s_X + \beta s_Y + \gamma = \frac{D(p,q,\alpha S_X + \beta S_Y + \gamma \cdot \bar{1})}{D(p,q,\bar{1})}$$

con $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$.
Esta igualdad será central en las siguientes secciones. Notar que tanto X como Y pueden elegir, unilateralmente, una estrategia que anule $D(p,q,\alpha S_X + \beta S_Y + \gamma \cdot \bar{1})$.

Es decir, si X elije una estrategia $\tilde{p} = \alpha S_X + \beta S_Y + \gamma \cdot \overline{1}$, o si Y elije una estrategia $\tilde{q} = \alpha S_X + \beta S_Y + \gamma \cdot \overline{1}$ entonces la relación lineal entre los puntajes de X e Y, dada por la expresión:

$$\alpha s_X + \beta s_Y + \gamma{=}0$$

se ve forzada. Estas son las llamadas, estrategias de determinante cero. Notar que no todas las estrategias de determinante cero son posibles, ya que las entradas de p y q deben pertenecer al $[0,1]$.

2.2. X define unilateralmente el puntaje de Y

Un caso particular de una estrategia de determinante cero, es donde X define el puntaje de Y. Eligiendo $\alpha = 0$, podemos darle al jugador X una estrategia $\tilde{p} = \beta S_Y + \gamma \overline{1}$.

Esto nos define cuatro ecuaciones:

$$p_1 - 1 = \beta R + \gamma$$

$$p_2 - 1 = \beta T + \gamma$$

$$p_3 = \beta S + \gamma$$

$$p_4 = \beta P + \gamma$$

Eliminando β y γ, obtenemos,

$$p_2 = \frac{p_1(T-P) - (1-p_4)(T-R)}{R-P}$$

$$p_3 = \frac{(1-p_1)(P-S) + p_4(R-S)}{R-P}$$

$$s_Y = \frac{-\gamma}{\beta} = \frac{\beta R + 1 - p_1}{\beta} = \frac{(1-p_1)P + p_4 R}{p_4 - p_1 + 1}$$

Recordemos que $R - P \neq 0$. De esta última ecuación, se desprende que X puede forzar el puntaje de Y, en los valores

$$P \leq s_Y \leq R$$

2.3. X intenta definir su propio puntaje

Analogamente al caso anterior, con $\tilde{p} = \alpha S_X + \gamma\bar{1}$ obtenemos,

$$p_2 = \frac{(1+p_4)(R-S) - p_1(P-S)}{R-P} \geq 1$$

$$p_3 = \frac{-(1-p_1)(T-P) - p_4(T-R)}{R-P} \leq 0$$

Estas ecuaciones nos indican que la única estrategia posible es p=(1,1,0,0), esto es 'cooperar siempre, o no cooperar nunca'. Es decir X no puede decidir su puntaje unilateralmente.

2.4. X demanda y obtiene una porción del puntaje de Y

El jugador X, ahora pretende recibir una recompensa mayor que la de no cooperación mutua P. Construiremos una estrategia que cumpla dicho objetivo, partiendo de la relación deseada entre los puntajes de X e Y

$$(s_X - P) = \chi(s_Y - P), \quad \chi \geq 1.$$

Equivalentemente,

$$(s_X - P) - \chi(s_Y - P) = 0$$
$$\Leftrightarrow \phi[(s_X - P) - \chi(s_Y - P)] = 0, \quad \forall\phi > 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\phi}{P-S}[(s_X - P) - \chi(s_Y - P)] = 0, \quad \forall\phi > 0$$

X puede forzar esta relación eligiendo la estrategia

$$\tilde{p} = \frac{\phi}{P-S}[(S_X - P\cdot\bar{1}) \ - \chi(S_Y - P\cdot\bar{1})]$$

Así obtenemos,

$$p_1 = 1 - \frac{\phi}{P-S}(R-P)(\chi - 1)$$
$$p_2 = 1 - \phi(1 + \chi\frac{T-P}{P-S})$$
$$p_3 = \phi(\frac{T-P}{P-S} + \chi)$$
$$p_4 = 0$$

De la ecuación de p_2 se puede verificar que,

$$\phi(1+\chi\frac{T-P}{P-S}) \leq 1 \Rightarrow \phi \leq (1+\chi\frac{T-P}{P-S})^{-1} = \frac{P-S}{(P-S)+\chi(T-P)}$$

Ahora el puntaje de X depende del puntaje de Y. Ambos son máximos cuando Y coopera plenamente, con q=(1,1,1,1). En este caso, el puntaje de X es,

$$s_X = \frac{D(p,q,S_X)}{D(p,q,\bar{1})} = \frac{(\chi R+(1-\chi)P)T-\chi RS+(\chi-1)PR}{T-\chi S+(\chi-1)R} =$$

$$\frac{P(T-R)+\chi[R(T-S)-P(T-R)]}{(T-R)+\chi(R-S)}$$

Esta situación se puede hacer más concreta, con los valores convencionales (T,R,P,S)=(5,3,1,0), entonces,

$$p = [1-2\phi(\chi-1), 1-\phi(4\chi+1), \phi(\chi+4), 0]$$

Donde los mejores puntajes posibles para X e Y son,

$$s_X = \frac{2+13\chi}{2+3\chi}, s_Y = \frac{12+3\chi}{2+3\chi}$$

El parametro χ es conocido como el factor de extorsión. En el caso particular donde, $\chi = 1$, y $\phi = 1/5$ entonces p=(1,0,1,0) es la estrategia conocida como 'tit-for-tat', que consiste en cooperar en la primera iteración del juego y luego replicar la acción previa del oponente para las sucesivas iteraciones.

2.5. Resultados numéricos

A continuación se presenta una serie de resultados obtenidos a partir de un programa que simula múltiples jugadas, de dos jugadores, X e Y. La estrategia de X será una estrategia de determinante cero, mientras que la estrategia de Y será generada aleatoriamente, al empezar el juego. En las siguientes tablas se mostrarán los resultados de las distintas estrategias y sus variantes, donde N es la cantidad de jugadas y $\bar{s}_Y$ es el promedio del puntaje del jugador Y. Los valores de (R,T,P,S) son los usuales.

X fuerza el puntaje de Y, $s_Y = 1$

N	$\bar{s}_Y$
100	1.18
1000	0.985
10000	0.9861
100000	0.99283
1000000	1.001047
10000000	0.9994806

Estrategia extorsiva con $\chi = 1$ (X fuerza un empate)

N	$\bar{s}_X$	$\bar{s}_Y$
100	2.04	2.09
1000	2.492	2.497
10000	2.1624	2.1629
100000	1.95382	1.95382

Estrategia extorsiva con $\chi = 2$.

N	$\bar{s}_X$	$\bar{s}_Y$	$\bar{s}_Y$ esperado ($s_Y = \frac{(s_X - P)}{\chi} + P$)
100	2.52	1.62	1.76
1000	2.683	1.848	1.8415
10000	2.7489	1.8974	1.8744
100000	2.4403	1.7238	1.7202
1000000	2.429798	1.716298	1.7149

Se concluye con un ejemplo de aplicación de las estrategias de determinante cero. Supongamos que las ganacias de Coca-cola y PepsiCo se dan de la siguiente manera:

1. Si ambas mantienen precios altos, las ganancias de cada compañia se incrementan en $ 500 millones.

2. Si uno deja caer el precio,(no coopera) pero el otro mantiene (coopera) entonces el primero verá un incremento de \$750 millones, mientras que el segundo no verá una modificación en sus ganancias.

3. Si ambas dejan caer el precio,entonces ambos verán un incremento de \$250 millones.

La matriz de pagos se ve de la siguiente forma:

	c	d
c	500,500	0,750
d	750,0	250,250

Si una de estas empresas decidiera utilizar una estrategia extorsiva, el resultado podría ser el siguiente:

Estrategia extorsiva con $\chi = 2$.

N	$\bar{s}_X$	$\bar{s}_Y$
10	350.0	350.0
100	412.5	345.0
1000	466.0	353.5
10000	508.575	378.225

3.

Referencias

[1] Hauert Ch, Schuster HG (1997) Effects of increasing the number of players and memory steps in the Iterated Prisoner's Dilemma, a numerical approach. Proc Biol Sci 264:513–519.

[2] Hoffman K.,Kunze R. *"Linear Algebra"*,Prentice-Hall, 1973 (155-161)

[3] Picardo E. *(2013) Utilizing Prisoner's Dilemma In Business And The Economy*

[4] Press W. H. , Dyson F. J. *(2012) Iterated Prisioner's Dilema contains strategies that dominate any evolutionary opponent*