

## LA INVERSION CON RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA

Juan A. Tirao

### INTRODUCCION

El punto de vista general de las transformaciones es de capital importancia en la matemática y en especial en la geometría, invadidas y clarificadas por el poder de síntesis de este concepto y el de grupo de transformaciones.

En este trabajo estudiaremos un tipo particular de transformaciones del plano: *la inversión respecto a una circunferencia*, que es una generalización de la simetría respecto a una recta.

El material que presentaremos fue desarrollado el año pasado en un cursillo para profesores de matemática que dictamos en General Roca, provincia de Río Negro. En esta oportunidad veremos como se relacionan la reflexión en un espejo esférico y la inversión y estableceremos sus propiedades más importantes (Teoremas 2 y 3). Como aplicación discutiremos las redes de circunferencias de Steiner y mostraremos cómo construir, usando sólo el compás, el inverso de un punto. En el próximo número daremos otras dos aplicaciones importantes de la inversión: una a la solución del problema de Apolonio de construir una circunferencia tangente a otras tres y otra, a la demostración del Teorema de Mascheroni de que toda construcción geométrica posible con regla y compás puede hacerse sólo con el compás.

Al final de este artículo indicamos algunos problemas que el lector procurará resolver para aprovechar el material que se ofrece.

### LA INVERSION

Por una *transformación* del plano entendemos una ley o correspondencia que asigna a cada punto  $p$  del mismo otro punto  $p'$ , llamado imagen de  $p$  por la transformación.

Un ejemplo sencillo de transformación es la simetría axial, que corresponde a la reflexión en un espejo plano.

Veamos dónde se refleja un punto  $p$  situado a un lado de un espejo  $L$  (fig. 1).

Un rayo de luz que parte de  $p$  forma un ángulo  $i$  con la normal a  $L$  en el punto de incidencia  $o$  que es igual al ángulo de reflexión  $r$ . La prolongación del rayo reflejado corta a la perpendicular a  $L$  que pa

sa por  $p$  en el punto  $p'$ . Los triángulos  $\triangle omp$  y  $\triangle omp'$  son congruentes, por lo tanto  $\overline{pm}$  es congruente a  $\overline{p'm}$  y  $p'$  es el simétrico de  $p$  con respecto a  $L$ . En otras palabras todos los rayos que salen de  $p$  y que inciden en  $L$  se reflejan sobre rectas que pasan por el simétrico de  $p$ , de allí que veamos la imagen de  $p$  en la posición  $p'$

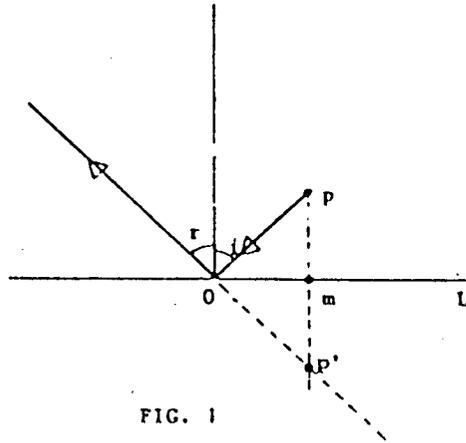


FIG. 1

Consideremos ahora la reflexión de un punto  $p$  en un espejo esférico (fig. 2).

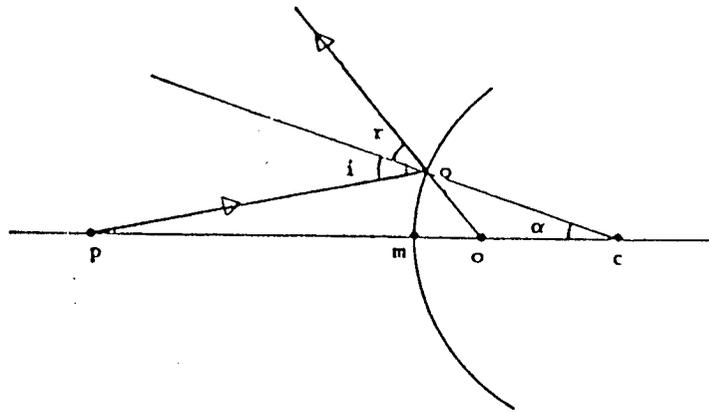


FIG. 2

Un rayo de luz que sale de  $p$  y que llega al punto  $o$  del espejo, se refleja formando con la normal  $\overleftrightarrow{co}$  un ángulo  $r$  igual al ángulo de incidencia  $i$ . Denotando con  $\overline{ab}$  la longitud del segmento  $\overline{ab}$  y aplicando el teorema del seno a los triángulos  $\triangle coo'$  y  $\triangle cop$  obtenemos

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } \alpha} = \frac{co}{oo'} \quad , \quad \frac{\text{sen } i}{\text{sen } \alpha} = \frac{cp}{op}$$

Por lo tanto la prolongación del rayo reflejado corta al segmento  $\overline{mc}$  en



el punto  $o'$  caracterizado por

$$\frac{co'}{oo'} = \frac{cp}{op}$$

A diferencia de lo que ocurre en el espejo plano la posición de  $o'$  depende de  $o$ , pero cuando  $o$  tiende a  $m$ ,  $o'$  tiende a un punto  $p'$  del segmento  $\overline{mc}$  que satisface la ecuación

$$(1) \quad \frac{cp'}{mp'} = \frac{cp}{mp}$$

En otras palabras, los rayos que salen de  $p$  y que inciden en puntos del espejo próximos a  $m$  se reflejan sobre rectas que cortan a  $\overline{mc}$  en puntos próximos a  $p'$ , de allí que veamos a la imagen de  $p$  como ubicada en la posición  $p'$  (fig. 3). Así la fórmula que da la imagen  $p'$  de  $p$  es la (1) la cual se puede reescribir fácilmente en la forma usual:

$$(2) \quad \frac{1}{mp} - \frac{1}{mp'} = -\frac{2}{mc}$$

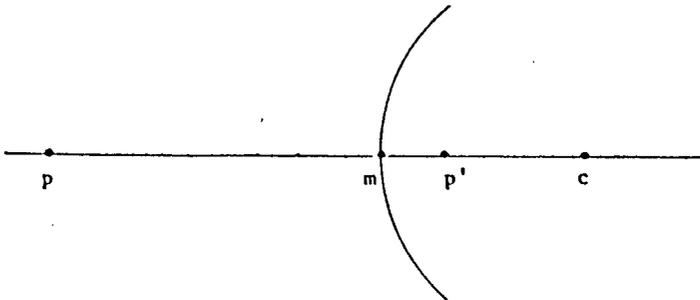


FIG. 3

Calculemos el producto (usando la ecuación (2))

$$\begin{aligned} cp \cdot cp' &= (cm + mp)(cm - mp') \\ &= cm^2 + cm \cdot (mp - mp') - mp \cdot mp' \\ &= cm^2 + 2mp \cdot mp' - mp \cdot mp' \\ &= cm^2 + mp \cdot mp' \end{aligned}$$

Si hacemos tender  $p$  a  $m$ ,  $p'$  también tiende a  $m$  como se ve de la ecuación (2), por lo tanto el producto  $cp \cdot cp'$  tiende a  $cm^2$ .

Conclusión: puntos  $p$  muy próximos (con respecto a  $cm$ ) al espejo esférico tienen por imagen puntos  $p'$  situados en el segmento  $\overline{mc}$  de tal manera que se verifica (aproximadamente) la relación

$$cp \cdot cp' = cm^2.$$

Esta conclusión justifica plenamente la siguiente definición:

DEFINICION: Sea  $C$  una circunferencia de centro  $o$  y radio  $r$ . La transformación que a cada  $p$  del plano de  $C$ , le hace corresponder el punto  $p'$  de la semirrecta  $\overrightarrow{op}$  tal que

$$op \cdot op' = r^2$$

se llama la inversión con respecto a  $C$ . El punto  $o$  es el centro de la inversión.

En principio la definición anterior no asigna una imagen al centro  $o$ . Pero es evidente que cuando  $p$  tiende a  $o$ ,  $p'$  se aleja cada vez más en el plano. Por esta razón decimos a veces que la imagen de  $o$  en la inversión es el *punto del infinito*. Claramente la inversión es una biyección cuya inversa es ella misma. Además intercambia el interior y el exterior del círculo  $C$  y los únicos puntos del plano que dan fijos en la inversión son los puntos de la circunferencia  $C$ .

La propiedad más importante de la inversión es que transforma rectas y circunferencias en rectas y circunferencias. Antes de demostrar este resultado recordemos la siguiente propiedad de las circunferencias.

TEOREMA 1. Sea  $p$  un punto del plano de la circunferencia  $C$  y sea  $L$  una recta que pasa por  $p$ , y que interseca a  $C$  en los puntos  $a$  y  $b$ . Entonces el producto

$$k = pa \cdot pb$$

es independiente de  $L$ .

DEMOSTRACION. Si  $p \in C$  entonces claramente el teorema es verdadero con  $k = 0$ . Consideremos el caso en que  $p$  es exterior a  $C$  y dejaremos a cargo del lector el caso en que  $p$  es interior a  $C$  (fig. 4).

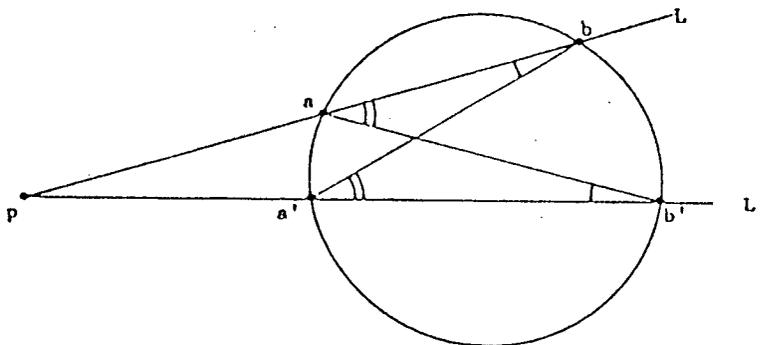


FIG. 4

Los ángulos  $\widehat{aBa'}$  y  $\widehat{a'b'a}$  son congruentes por ser ángulos inscritos en la circunferencia que abarcan el mismo arco. Por la misma razón los ángulos  $\widehat{bAb'}$  y  $\widehat{b'a'b}$  son congruentes. Por lo tanto, los triángulos  $\widehat{Pa'b}$  y  $\widehat{Pa'b'}$  son semejantes. De aquí resulta la proporcionalidad

$$\frac{pa}{pa'} = \frac{pb'}{pb}$$

la cual implica que  $pa \cdot pb = pa' \cdot pb'$  que es lo que queríamos demostrar.

La constante  $k = pa \cdot pb$  se llama la *potencia* de  $C$  con respecto a  $p$ , cuando  $p$  es exterior a  $C$  o cuando  $p$  pertenece a  $C$ . Si  $p$  es interior a  $C$ , la potencia de  $C$  con respecto a  $p$  se define como  $k = -pa \cdot pb$ .

**TEOREMA 2.** La inversión con respecto a una circunferencia  $C$  de centro  $o$  transforma:

- a) Una recta que pasa por  $o$  en una recta que pasa por  $o$ .
- b) Una recta que no pasa por  $o$  en una circunferencia que pasa por  $o$ .
- c) Una circunferencia que pasa por  $o$  en una recta que no pasa por  $o$ .
- d) Una circunferencia que no pasa por  $o$  en una circunferencia que no pasa por  $o$ .

**DEMOSTRACION.** La parte a) es inmediata a partir de la definición de in

versión. Para probar b) tracemos la perpendicular a la recta L en cuestión que pasa por o (fig. 5).

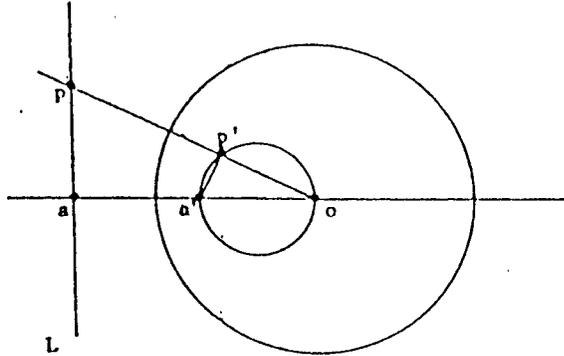


FIG. 5

Sea  $a$  el punto de intersección de la perpendicular y la recta  $L$  y sea  $a'$  el inverso de  $a$ . Si  $p \notin a$  es otro punto cualquiera de  $L$  y  $p'$  es su inverso, los triángulos  $\triangle oap$  y  $\triangle op'a'$  son semejantes ya que  $oa \cdot oa' = op \cdot op'$  implica la proporcionalidad

$$\frac{oa}{op} = \frac{op'}{oa'}$$

Por lo tanto el ángulo  $\widehat{a'p'o}$  es recto y  $p'$  pertenece a la circunferencia de diámetro  $\overline{oa'}$ . Así la inversa de  $L$  es esta circunferencia. La afirmación hecha en c) es consecuencia de b). Para demostrar d) consideremos una circunferencia  $S$  de centro  $m$  que no pasa por  $o$  (fig. 6).

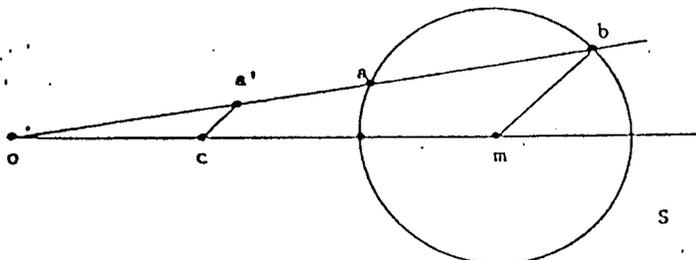


FIG. 6

Sean  $a$  un punto de  $S$ ,  $b$  el otro punto de intersección de  $\overleftrightarrow{oa}$  con  $S$  y  $a'$  el inverso de  $a$  con respecto a  $C$ . Por  $a'$  trazamos una paralela a  $\overleftrightarrow{bm}$  que corta a  $\overleftrightarrow{om}$  en el punto  $c$ . Entonces

$$\frac{oc}{om} = \frac{oa'}{ob} = \frac{ca'}{mb} \quad \text{y} \quad oa \cdot oa' = r^2$$

si  $r$  es el radio de  $C$ . Por lo tanto

$$oc = \frac{om}{ob} \cdot \frac{r^2}{oa} = \frac{om \cdot r^2}{k}$$

y 
$$ca' = \frac{oc \cdot mb}{om}$$

donde  $k$  es la potencia de  $S$  con respecto a  $o$ . Así el punto  $c$  es independiente de  $a$  como así también  $ca'$ . Esto muestra que la inversa de  $S$  es una circunferencia de centro  $c$ . Esto completa la demostración del teorema.

Otra propiedad importante de la inversión con respecto a una circunferencia es la siguiente:

**TEOREMA 3.** *El ángulo entre dos curvas es invariante en una inversión.*

Con esto queremos decir que dos curvas secantes se transforman por una inversión en otras dos curvas que se cortan formando ángulos congruentes. Por ángulo entre dos curvas entendemos el ángulo formado por sus tangentes en el punto de intersección.

**DEMOSTRACION.** La demostración puede verse en las figuras 7 y 8.

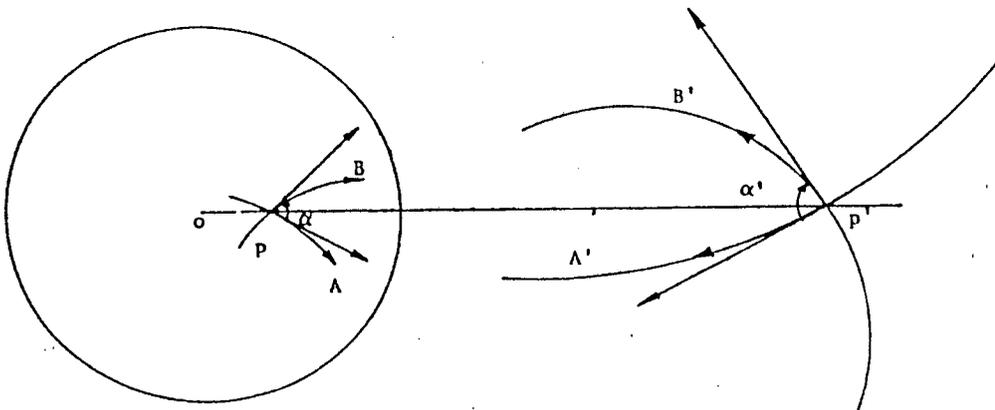


FIG. 7

Las curvas A y B se cortan en p formando un ángulo  $\hat{\alpha}$  y sus inversas A' y B', con respecto a la circunferencia de centro o y radio r, lo hacen en p' determinando un ángulo  $\hat{\alpha}'$ . La semirrecta  $\vec{pp}'$  divide a  $\hat{\alpha}$  en dos ángulos. Si demostramos que cada uno de éstos se transforma por la inversión en otro congruente con ellos habremos demostrado que  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\alpha}'$  son congruentes como queremos. Por lo tanto basta considerar el caso de una curva que corta a una recta que pasa por o (fig. 8)

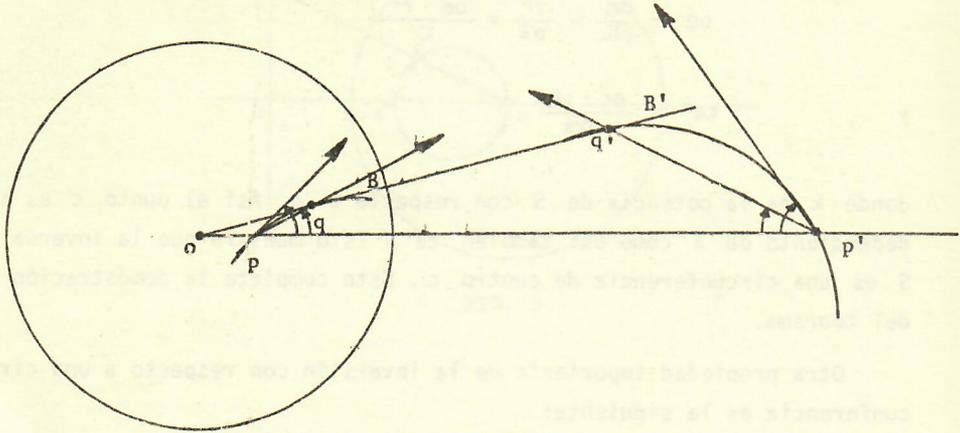


FIG. 8

Demostraremos que el ángulo  $\hat{\beta}$  entre  $\vec{pp}'$  y la tangente a B en p es congruente al ángulo correspondiente  $\hat{\beta}'$  formado por B' y  $\vec{p'p}$ . Para ello tomamos un punto q de la curva B y trazamos la semirrecta  $\vec{pq}$ . El inverso de q es un punto q' que, por estar a la vez en  $\vec{oq}$  y en la curva B', debe coincidir con su intersección. Dibujemos la semirrecta  $\vec{p'q'}$ . Por definición de inversión

$$r^2 = op \cdot op' = oq \cdot oq' \quad ,$$

$$o \quad \frac{op}{oq'} = \frac{oq}{op'} \quad ;$$

por lo tanto los triángulos  $\hat{o}qp$  y  $\hat{o}q'p'$  son semejantes. En consecuencia  $\hat{o}pq \equiv \hat{o}q'p'$  y el ángulo  $\hat{\omega}$  formado por  $\vec{pp}'$  y  $\vec{pq}$  satisface  $\hat{\omega} \equiv \hat{p}oq + \hat{op'q'}$ . Cuando movemos el punto q sobre B aproximándolo a p la semirrecta  $\vec{pq}$  gira hasta la posición tangente a B en p, mientras  $\hat{\omega}$  se aproxima a  $\hat{\beta}$ . Simultáneamente q' se aproxima a p' y  $\vec{p'q'}$  gira hasta la posición tangente a B' en p' y el ángulo  $\hat{op'q'}$  tiende a  $\hat{\beta}'$ . Por otro lado  $\hat{o}q$  se aproxima a  $\hat{op}$ , es decir  $\hat{p}oq$  tiende a cero. De la relación

$$\hat{\omega} \equiv \hat{p}oq + \hat{op'q'}$$

surge entonces que en el límite  $\hat{\beta} \equiv \hat{\beta}'$ , como queríamos demostrar.

Debemos observar que aunque la inversión conserva la congruencia de los ángulos, invierte su sentido.

Como casos particulares importantes de la invariancia de los ángulos en una inversión citaremos: si dos curvas son ortogonales (es decir, se cortan formando un ángulo recto) sus inversas continúan siendo ortogonales, mientras que si son tangentes quedan tangentes después de la inversión.

Consideremos la familia  $F_1$  de todas las circunferencias que pasan por dos puntos fijos  $a$  y  $b$  del plano (fig. 9).

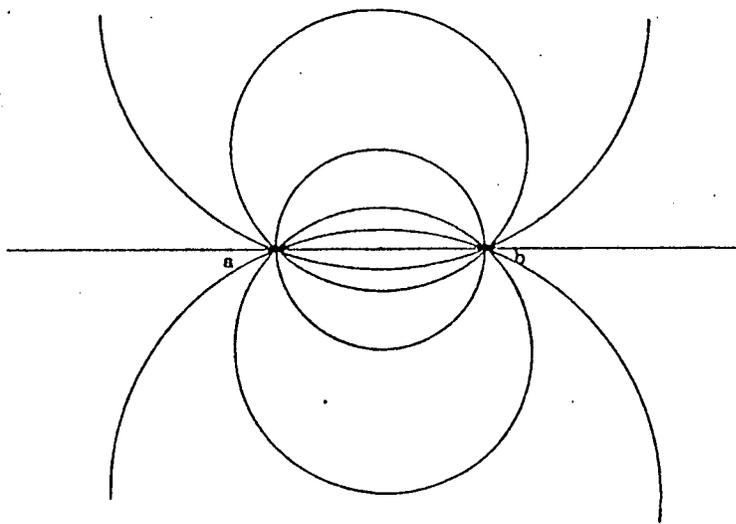


FIG. 9

Incluimos en la ilustración a la recta  $\overleftrightarrow{ab}$  como caso límite de circunferencia que pasa por  $a$  y  $b$ .

Nos preguntamos ¿podremos dibujar circunferencias ortogonales a las de la familia  $F_1$ ? Ciertamente no es evidente que tales circunferencias existan. Pero si consideramos una inversión de centro  $a$ , cada elemento de  $F_1$  se transforma en una recta que pasa por el inverso  $b'$  de  $b$  (Teorema 2) y la familia  $F_1$  se transforma en el haz de rectas  $F'_1$  con centro en  $b'$  (fig. 10).

Ahora si nos formulamos la misma pregunta para la familia  $F'_1$  la podemos responder fácilmente. En efecto, la familia  $F'_2$  de todas las circunferencias con centro en  $b'$  contiene a todas las circunferencias ortogonales al haz de rectas  $F'_1$ . Por lo tanto la familia  $F_2$  formada

por las imágenes de los elementos de  $F'_1$ , con respecto a la inversión de centro  $a$ , es la familia de todas las circunferencias ortogonales a las circunferencias que pasan por  $a$  y  $b$  (fig. 11).

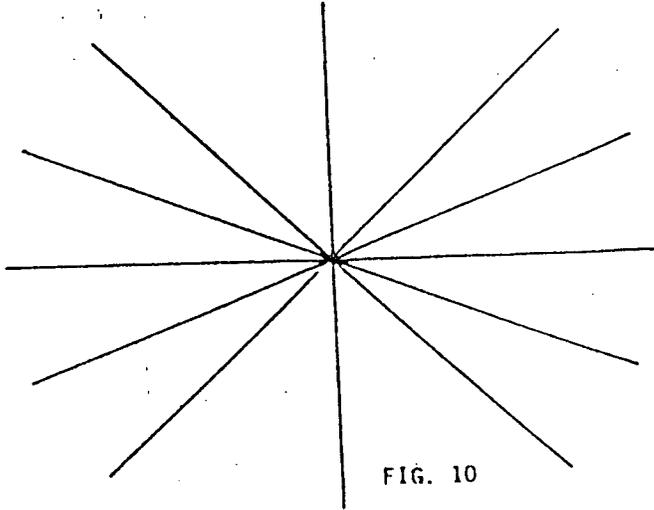


FIG. 10

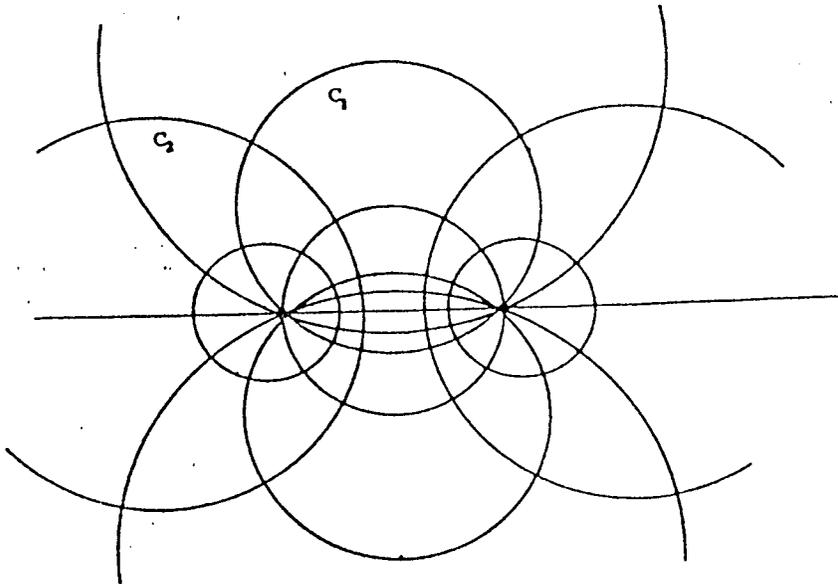


FIG. 11

Esta configuración formada por las circunferencias de  $F_1$  y  $F_2$  se llama la red de circunferencias de Steiner determinada por  $a$  y  $b$ . Tiene muchas propiedades interesantes entre las cuales destacamos:

- 1) Por cada punto del plano distinto de  $a$  y  $b$  pasan exactamente un elemento de  $F_1$  y uno de  $F_2$ .
- 2) Cada  $C_1 \in F_1$  interseca a todo  $C_2 \in F_2$  en ángulo recto.
- 3) La inversión con respecto a  $C_1 \in F_1$  transforma cada  $C_2 \in F_2$  en

si mismo y todo elemento de  $F_1$  en otro elemento de  $F_1$ . La inversión en un  $C_2 \in F_2$  transforma cada  $C_1 \in F_1$  en si mismo y todo elemento de  $F_2$  en otro de la misma familia.

4) Los puntos  $a$  y  $b$  son inversos con respecto a todo  $C_2 \in F_2$ .

Probaremos las dos primeras afirmaciones y dejaremos para el lector las demostraciones de las otras dos como ejercicio.

El aspecto sencillo del haz de rectas  $F'_1$  permite ver claramente las propiedades 1) y 2) para las familias  $F'_1$  y  $F'_2$ . Como estas están íntimamente relacionadas con las familias de circunferencias  $F_1$  y  $F_2$  por la inversión de centro  $a$ , estas heredan las mencionadas propiedades. (Teoremas 2 y 3).

Otro ejemplo del efecto de una inversión lo constituye una familia de circunferencias tangentes entre sí en el centro de inversión  $o$  (fig. 12).

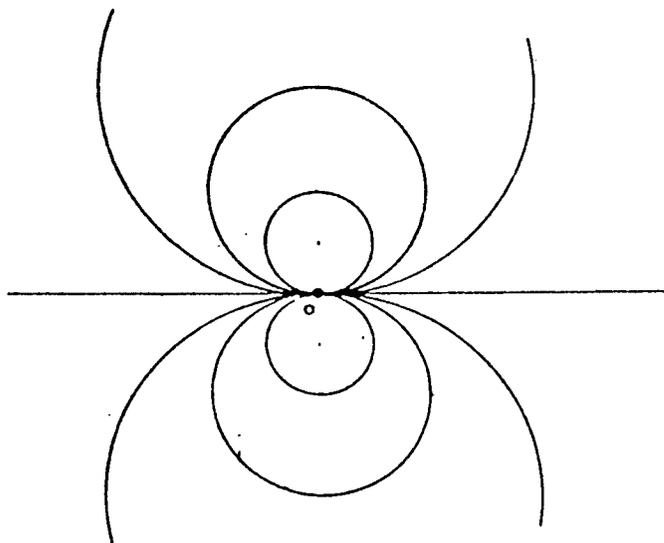


FIG. 12

Efectuada la transformación se tendrá un haz de rectas paralelas, pues las imágenes de las circunferencias son rectas y ningún par de estas se cortan, ya que las circunferencias no tienen otro punto en común que el  $o$ .

#### CONSTRUCCION DE PUNTOS INVERSOS USANDO SOLO EL COMPAS

Consideremos primero el caso en que el punto dado  $p$  sea exterior a la circunferencia  $C$  de centro  $o$  y radio  $r$ .

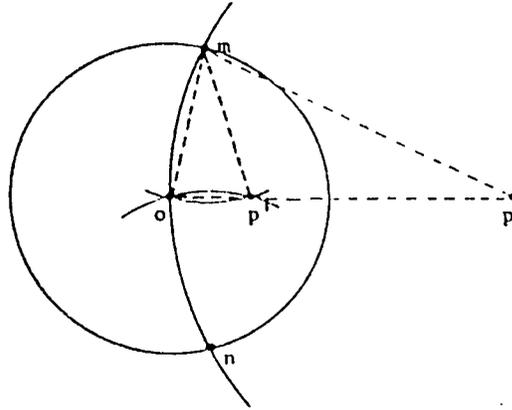


FIG. 13

Con centro en  $p$  y radio  $op$  describimos una circunferencia que intersecta a  $C$  en  $m$  y  $n$ . Con estos dos puntos como centros trazamos arcos de radio  $om$  que se cortan en  $o$  y en  $p'$ . Los puntos  $m$  y  $n$  son simétricos con respecto a la recta  $\overleftrightarrow{op}$ , por lo tanto el simétrico de  $p$  con respecto a dicha recta es  $p'$ , es decir  $p' \in \overleftrightarrow{op}$ . Los triángulos isósceles  $\hat{\Delta}omp$  y  $\hat{\Delta}omp'$  son semejantes ya que  $\hat{omp} \equiv \hat{mop} \equiv \hat{op'm}$ . Luego tenemos

$$\frac{op}{om} = \frac{om}{op'} \quad ; \quad \text{o sea} \quad op \cdot op' = om^2$$

Por lo tanto el punto  $p'$  así construido es el inverso de  $p$ .

Si el punto  $p$  no es exterior a  $C$  podemos reducir la construcción de su inverso al caso anterior mediante la siguiente observación.

Usando sólo el compás podemos duplicar un segmento  $\overline{ao}$ , esto es, hallar un punto  $b$  de la semirrecta  $\overrightarrow{ao}$  tal que  $o$  sea punto medio de  $\overline{ab}$ . Para esto trazamos una circunferencia de centro  $o$  y radio  $ao$  y determinamos sobre esta circunferencia a partir de  $a$  los puntos  $c, d$  y  $b$  de tal manera que  $ao = ac = cd = db$ . Entonces  $b$  es el punto buscado (fig. 14).

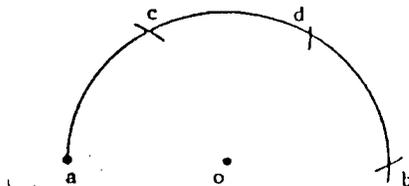


FIG. 14

Repitiendo este procedimiento podemos prolongar un segmento tantas veces como querramos.

Para hallar el inverso de  $p$ , primero prolongamos  $\overline{op}$  con el compás tantas veces (digamos  $n$ ) como para salir fuera de  $C$ , determinando un punto  $q$  exterior a  $C$ . Luego construimos  $q'$  inverso de  $q$  mediante el procedimiento ya indicado. Entonces

$$r = oq' \cdot oq = oq' \cdot (n \cdot op) = (n \cdot oq') \cdot op$$

Por lo tanto el punto  $p' \in \overrightarrow{op}$  tal que  $op' = n \cdot oq'$  es el inverso de  $p$ .

### PROBLEMAS

1. ¿Dónde están ubicados los centros de todas las circunferencias que pasan por dos puntos fijos  $a$  y  $b$  del plano?
2. Sea  $C$  la circunferencia que pasa por  $a$  y  $b$  y con centro en la recta  $\overleftrightarrow{ab}$ . Sean  $D$  y  $E$  las circunferencias de  $F_1$  cuyos centros pertenecen a  $C$  y sean  $L$  y  $M$  las circunferencias de  $F_2$  con centro en  $D$  y  $E$  respectivamente. ¿Cuáles son las imágenes de  $C, D, E, L$  y  $M$  por una inversión de centro  $a$ ? ¿Qué ángulos forman estas imágenes con la recta  $\overleftrightarrow{ab}$ ?
3. Discutir cualitativamente la correspondencia entre los elementos de la familia  $F_2$  y la familia de circunferencias con centro en el inverso de  $b$ .
4. Demostrar las afirmaciones 3) y 4) referidas a la red de circunferencias de Steiner determinada por dos puntos.
5. Elaborar una teoría paralela de red degenerada de circunferencias de Steiner a partir de la familia de circunferencias tangentes entre sí en un punto  $o$ .
6. Usando solamente el compás determinar el punto medio de un segmento.
7. Hallar el centro de una circunferencia dada, valiéndose únicamente del compás. (Elegir un punto en la circunferencia y trazar con centro en él otra circunferencia que corte a la dada y procurar primero el inverso con respecto a ella del centro buscado).