

REFLEXIONES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Enzo R. Gentile

1. En la Universidad.

La enseñanza de la Matemática, en todos los niveles, está en verdadera crisis. La razón no es muy difícil de precisar. En los países que no poseen ambiente y tradición matemática, la enseñanza consiste en repetir libros formales, con poca ejercitación y la mayoría de las veces carentes de motivación. El alumno es un mero receptáculo de conocimientos que difícilmente pueda digerir y que lo llevan rápidamente a la frustración. O sea, su participación es prácticamente nula. En general el espíritu de la Matemática Moderna con sus definiciones y métodos generales hace que el alumno desarrolle muy pobremente su capacidad creativa y de trabajo. Por supuesto que en los lugares de fuerte ambiente matemático, los ejemplos, problemas e ideas abundan y favorecen ciertamente el trabajo personal.

Pero en los lugares que eso no ocurre, la enseñanza de materias de ese tipo se hace repitiendo libros, que en gran número son "simplificistas" y donde "todo se entiende" pero nadie conoce un ejemplo en serio. (que no sea Z) ni sabe cómo usar esos supuestos teoremas poderosos. La crisis se produce entonces, cuando un gran número de alumnos capaces, con definida vocación matemática, no llegan a manejar resultados e ideas y se convierten en repetidores pesimistas, que posteriormente, en sus tareas docentes, transmitirán ese malestar.

Podríamos decir que, en un cierto sentido, muchas Universidades no tienen capacidad para enseñar Matemática; o sea que en rigor, la Matemática es en ellas una verdadera "ilusión". Por supuesto que siempre aparecen, aunque en número reducido, algunos jóvenes talentosos para los cuales cualquier tipo de enseñanza les viene bien. Algunos de estos alumnos poseen inmunidad absoluta contra los cursos malos. Sin embargo, cientos de jóvenes se pierden en el trayecto; cantidad

fabulosa de dinero se gasta y se desvanecen las esperanzas de usar la Matemática en beneficio del desarrollo científico del país. El matemático profesional, es en buena parte responsable de que se haya llegado a esta encrucijada. Difícilmente tratan éstos de preparar cursos motivados, con ejercitación efectiva, cursos encadenados que marquen alguna dirección.

Mientras que los matemáticos que hacen investigación no tengan consciencia de la importancia de desarrollar cursos básicos efectivos, encadenados, con meta bien definida, la Matemática será para muy pocos, y muchos jóvenes se perderán irremediamente. Sin embargo, es bien sabido que un número grande de estudiantes que no pueden ser considerados de los excepcionales mencionados más arriba, cuando salen a estudiar a otros centros en el exterior, hacen trabajos matemáticos respetables y no pocas veces algunos son verdaderas revelaciones.

Otra parte de responsabilidad también recae en los mismos alumnos. Podríamos decir que cuando estos tienen gran interés producen un fuerte estímulo en la labor de los profesores y generalmente las cosas andan bien. El profesor se encuentra muchas veces con la indiferencia del alumnado que no desea complicarse la vida estudiando seriamente, pues su interés está en el título que le brindará la posibilidad de mejorar su posición económica.

No criticamos esto, sin embargo está claro que ello va en detrimento del nivel científico, de la formación de un ambiente de trabajo, y termina por desmoralizar al profesor que decide al fin dedicarse exclusivamente a su trabajo de investigación que le será, sin duda, de mayor utilidad.

2. Enseñanza de la Matemática a nivel medio

La enseñanza moderna de la matemática ha buscado remediar la precariedad con que el razonamiento se usaba en la enseñanza tradicional.

Dicha enseñanza tendía a resolver "problemas tipo". Eso es útil y no está en nuestro ánimo desmerecerlo. No obstante, el rápido avance de la Matemática hacia otras disciplinas, da lugar a una gran variedad de problemas tipo y hace necesario que se desarrollen métodos generales de trabajo. La idea o filosofía es la de "manejar" más que "aprender". Sin embargo la dirección de la enseñanza no siguió la vía propia para lograr ese fin; probablemente, debido a que los mismos profesores de corte clásico hayan tenido que producir el cambio.

Por puro instinto de conservación, los maestros se sujetaron a ciertas tablas de salvación (la más típica de todas: el Álgebra de Conjuntos), para capear el temporal, y si bien ellos se salvaron, mucha gente joven se perdió y lamentablemente se sigue perdiendo.

Los alumnos de hoy no pueden resolver aquellos problemas tipo; en verdad, no pueden resolver nada.

Por otra parte los matemáticos activos se lavaron olímpicamente las manos de este problema y son, en gran parte, responsables del fracaso.

3. En Matemática hay que hacer.

En toda la historia de la Matemática los matemáticos han publicado teoremas y sus demostraciones. En la creación matemática, el matemático intuye la validez de afirmaciones y teorías, y con su trabajo trata de dar demostraciones, o en otros casos, buscar ejemplos que muestren su invalidez. Así se hace la matemática.

"Los matemáticos no estudian" en el sentido que se le da a esa palabra, pues aún cuando quiere conocer algún tema nuevo el matemático hace. Si se pregunta a un matemático activo qué es lo que está haciendo sin duda responderá: estoy tratando de resolver el siguiente problema ... para lo cual estoy intentando probar tal cosa, de generalizar tal otra, de buscar algún ejemplo de ..., un contraejemplo a ...; no cabe que responda: estoy estudiando teoría de distribuciones o teoría

de Galois ..., si lo hace deberá ser en un contexto bien determinado, un medio más que un fin ...

Ernst Eduard Kummer (1810-1893) dedicó más de 25 años de su vida a la resolución de la famosa conjetura de Pierre de Fermat (1601-1665): "Si n es un entero mayor que 2 no existen enteros positivos x , y , z , tales que $x^n + y^n = z^n$ ". Como es sabido, esta conjetura sigue aún sin resolver. No obstante, la obra de Kummer en esa dirección y la de otros matemáticos del siglo pasado constituyen los grandes cimientos de la moderna teoría algebraica de números.

Pensamos que muy raramente en la enseñanza se transmite la actitud de "hacer". Se enseña habitualmente Matemática en la misma forma que historia, literatura, ...: "informando para memorizar". No hay por qué enseñar Matemática en una forma que no responda a la esencia de "hacer". Hemos hablado de "intuir", "demostrar". La enseñanza moderna de la Matemática tiene su punto más vulnerable en que estimula muy po bremente la intuición, e intuición es fecundidad. En matemática hay que "hacer". Como en Música hay que ser ejecutante, en alguna medida.

Pero lo importante, es que, hay que "hacer" en todo nivel de tra -bajo matemático, aún cuando se estudia o se busca nueva información.

El maestro que "no hace" no transmite el verdadero espíritu de la Matemática y entonces la enseñanza "engorda" la mente del joven cuando en realidad debiera desarrollar músculos. "Estamos intoxicando al alumno con información que no puede digerir y anulando su capacidad creativa".

4. Didáctica. (¿Qué?).

La acepción corriente de este término equivale fundamentalmente a "Claridad de exposición y énfasis en el ordenamiento de los temas". En términos más pedestres: A exponer con buena letra. Muchas veces los alumnos consideran "gran" profesor a aquél que lo hace to do, ordenada, prolijamente: Teorema II, 1.a.5, Corolario II, 1.a.6,

etc. aunque en la mayoría de los casos el expositor no presenta ideas fundamentales, ni objetivos, ni ejercitación dura y sus ejemplos están gastados por el uso constante. En verdad esos profesores destruyen la curiosidad de los alumnos, pues todo está (tan) claro!... y en realidad son pobres expositores que facilitan la formación de una conciencia equívoca de la Matemática. "La Didáctica" en ese sentido es realmente un vicio de exposición. Es también condenable la actitud del profesor de hacer de la clase un "show" de perfección al desmenuzar un teorema en una serie interminable de lemas para llegar gloriosamente al lema n que finaliza la demostración del teorema, pero donde todos olvidaron qué se quería demostrar. Pero que fue "Didáctico" nadie tiene dudas. Digamos con un poco de ironía que "Didáctica" en Matemática es lograr que el alumno resuelva problemas y aún más, que plantee sus propios problemas! La verdadera potencia de la Matemática es, no olvidar la *creación*, verdadero ejercicio de la imaginación; luego, si se quiere, vienen rigor, didáctica, etc:

Sería pues interesante que en la escuela secundaria se hicieran cursos más operativos, pocos temas pero tratados con profundidad, evitando toda MATEMÁTICA ABSTRACTA INMOTIVADA, pero con programas y ejercitación bien definidos, en el espíritu de "Hacer y manejar". Manejar para resolver.

5. Matemática y Textos Clásicos.

Señalemos la necesidad de consultar y trabajar con libros *clásicos*, donde mucha Matemática se hace "a mano". Libros llenos de ideas, problemas y material para estimular el trabajo creativo. Citemos dos por los cuales profesamos profunda admiración: *Algebra, An elementary Text-book*, de G. CHRYSAL (1889), y *Pure Mathematics*, de G. H. HARDY (1908). Si hojea estos libros no tendrá dudas de qué puede significar Matemática (dura). (En un nivel más avanzado nos preguntamos ¿Qué libro moderno de álgebra puede superar al *Lehrbuch der Algebra* de HEINRICH WEBER, publicado en 1894? *Respuesta*: Ninguno. En un nivel inter

medio el libro *Algebra* de B.L. VAN DER WAERDEN (1936) no ha sido superado aún, a pesar del gigantesco desarrollo del Algebra en los últimos 30 años).

Nuestra búsqueda de información, y la lectura de algunos textos clásicos nos ha llevado continua y sistemáticamente a efectuar la tal vez obvia reflexión, sobre la importancia tremenda que significa aportar a la Enseñanza de la Matemática, el factor histórico. En efecto, esto no constituye gran novedad. Sin embargo y a manera de ejemplo, notamos que en cualquier curso de Teoría Algebraica de Números rara vez se pone de manifiesto la obra original de Kummer, Dedekind, Kronecker, ... o el monumental *Zahlbericht* de Hilbert. Es útil señalar, en relación con este punto, la reflexión de B. Mazur en su comentario de la edición de la obra completa de Kummer: "Kummer's number-theoretic concerns are impressively close to the concerns of modern students of number theory. The progression of his thought deserves and rewards close reflection". Pero no sólo para la Teoría de Números, sino en la enseñanza tradicional de la Matemática se observa claramente la omisión del trabajo original de los grandes matemáticos, sobre todo en lo referente al "concern", ..., digamos, a la preocupación por atacar y elegir tales o cuales vías de resolución.

¡Qué importante estudiar la matemática conociendo las marchas y necesarias contramarchas en cada etapa del devenir matemático! Observamos que con la moda de la claridad y de la síntesis nos hemos acostumbrado a recibir y a su vez transmitir información "telegráfica" carente de todo "vibrato".

Por otra parte es bastante irracional desvincularse totalmente del desarrollo histórico. Las definiciones que hoy encontramos escritas con buena letra fueron, en muchos casos, la labor de siglos. La noción de límite, por ejemplo. Probar que \mathbb{Q} , (el cuerpo racional) no es coordinable con \mathbb{R} (el cuerpo real), cosa que se hace hoy en cualquier curso de Análisis I, le costó a G. Cantor (1845-1918) numerosas demostraciones previas "falsas". En fin, toda la historia del

Análisis Clásico y también del Algebra hacen sin duda a la salud de la enseñanza y la investigación. Digamos, con Goethe, "la historia de una ciencia es la ciencia misma"...

6. Otros factores relativos a la enseñanza y estudio de la Matemática

Es bien sabido que existe un gran temor (o tal vez diríamos terror) en el aprendizaje de la Matemática. Frecuentemente se lo atribuye a la falta de condiciones "naturales" para estudiar esta disciplina. Nada más sin sentido. En efecto, ¿cómo podemos saber si un alumno no tiene condiciones para la Matemática, si la enseñanza, en especial en su nivel formativo, se basa exclusivamente en atiborrarle la mente de fórmulas, sin darle la menor posibilidad de pensar? (Sin mencionar la actitud enfermiza de ciertos profesores en el sentido de acallar la curiosidad del alumno, que ridiculizan sus preguntas o se "escapan" por la tangente ...). Por otra parte muchas veces se cree que ciertos alumnos tienen reales condiciones para la Matemática por el mero hecho de poder memorizar buen número de fórmulas y repetir definiciones. Para concluir con honestidad que un alumno no posee condiciones para estudiar Matemática, habría que ofrecerle primeramente cursos decentes de Matemática. Y así, no quedaría claro que un alumno "no tiene condiciones...".

En Matemática, más que condiciones, hacen falta "ganas". Estamos cansados de ver gente "con condiciones", pero estática, que hay que estar empujando todo el tiempo.

Otra cuestión. Si el que estudia Matemática espera "a priori" en contrar resultados trascendentes, seguramente terminará en la frustración. Para el estudio de la Matemática no hay *receta*, excepto la de poder desarrollar una buena capacidad de trabajo. Con una mente normal, trabajo serio y prolongado se llega a "entender" (cosa no desdeñable!), hacer y manejar una buena parte de la Matemática. Creer que la Matemática es para mentes especiales es una de las causas del deterioro de la enseñanza, pues despista a gran cantidad de gente "buena". Tenemos ejemplos de gente inteligente, diríamos brillante, que entendía *todo*, pero

que nunca hizo nada. En cambio otros, se diría *pobres*, con trabajo serio y paciente han logrado resultados importantes. Digamos que Matemática, más que "virtuosismo" es "transpiración".

Los alumnos se despistan cuando la enseñanza se hace rutinaria, ocultando consciente o inconscientemente su verdadera fuerza y belleza, complicándola inútilmente con fórmulas que nadie sabe de dónde vienen. Por ejemplo, en los textos corrientes (y sobre todo en algunos de alto predicamento!) la mayoría de los ejercicios carecen de toda significación, y consisten en el uso al azar de las distintas operaciones combinadas con raíces, logaritmos, sin ton ni son. Son ejercicios "macabros" que han hecho que a la mayoría de la gente, la Matemática le resulte la materia más odiosa. La verdadera ejercitación atrae y fascina y estoy convencido que mucha gente sin manifiesta vocación matemática disfrutaría inteligentemente de incursiones en la aritmética y la geometría.

La Matemática está al alcance de mucha más gente de lo que se piensa, pero no gratuitamente. Requiere una dosis importante de trabajo individual, realizado pausadamente, sin prisa pero fundamentalmente sin interrupción. Queda sobreentendida la buena dirección y orientación del trabajo.

Hay que lograr, en la enseñanza y en la investigación, que el alumno sienta la sensación de "estar haciendo", pues allí empieza el trabajo efectivo y que rinde.

La mayoría de la gente que hace Matemática es gente normal, pero trabaja todos los días, enfrenta las dificultades y hace que éstas sean un desafío antes que un factor de depresión. Este es un hecho curioso y elocuente, el que "estudia" (o sea memoriza) se desalienta con las dificultades, mientras que el que trabaja siente, con ellas, la sensación de estar adelante de algo interesante y esto lleva a acrecentar sus esfuerzos.

Por otra parte, la Matemática es de tal vastedad que "hay lu-

gar para todos", hay distintos niveles de trabajo pero todos los niveles son importantes. Un investigador modesto puede producir resultados importantes y de gran utilidad a otros niveles "aparentemente" más importantes. Como ocurre en todas las ciencias, los genios son la excepción.

7. Propuesta.

El profesor, en todo nivel, debe ser un investigador dedicado no exclusivamente a resolver problemas específicos, sino a ampliar determinadas áreas, profundizando en temas de interés general. Por ejemplo, un profesor secundario puede hacer un tipo de investigación que podríamos llamar "didáctica" (en buen sentido) tomando algún tema como ser: números complejos, aritmética, congruencias, ecuaciones, polinomios, combinatoria. En cualquiera de ellos hay una labor formidable por desarrollar, señalando los resultados fundamentales y sus aplicaciones, reuniendo y clasificando ejemplos, ejercicios y problemas, consultando la bibliografía pertinente. En las conocidas revistas de enseñanza tales como el American Mathematical Monthly, el Mathematics Magazine o el Mathematical Gazette aparecen numerosos trabajos de investigación con resultados originales, siempre en un plano elemental. Su lectura es altamente estimulante y orientadora en el trabajo que es aconsejable realizar. Estas revistas y otras pueden ser consultadas en las Bibliotecas de las Facultades de Ciencias Exactas.

Para dar una idea más concreta podemos agregar que si tomamos uno de los temas enumerados anteriormente, las posibilidades de hacer Matemática son inagotables. Por ejemplo, con los números complejos se pueden hacer cosas tales como: geometría analítica del plano, grupo de transformaciones rígidas, inversión, grupo de homografías, grupo de raíces de la unidad, construcciones con regla y compás, polígonos regulares y polinomios ciclotómicos, aritmética en enteros de Gauss, etc. ... y se está de inmediato dentro de la (gran) Matemática. La investigación didáctica consiste en hacer accesible todo ese material, en bus

car la ejercitación adecuada y sobre todo en *inventar* problemas y ejercicios, en conocer la bibliografía e incursionar posteriormente en temas más avanzados, "vía" las revistas de Matemática.

En nuestra opinión, el profesor que investiga tiene la paz que hace que la enseñanza sea convincente y penetre sin rebotes. La Matemática es difícil pero no imposible, es fácil plantear problemas pero no siempre es fácil resolverlos. Resolver un problema elemental puede llevar muchas horas y también días y a veces no sale. Hay que desterrar la idea en las aulas de que el profesor debe saber y poderlo todo. Eso no existe. En mi opinión la reforma de la enseñanza de la Matemática en la escuela secundaria sería muy fácil de hacer. A saber, si se propusieran problemas para ir resolviendo durante todo el año, la función del profesor sería orientar, escuchar y fomentar la discusión. El alumno debe saber que los ejercicios se resuelven pensando mucho y "a priori" no tienen por qué salirle al profesor. Con esta actitud la enseñanza mejoraría fuertemente y se lograría desarrollar la actitud creativa de los alumnos. Sin embargo este proyecto es difícil de llevar a cabo. En efecto, no sólo los alumnos esperan que los profesores lo sepan hacer todo sino que, en general, los mismos profesores lo sienten así, o han terminado por sentirlo así, y entonces los problemas que plantean son sólo los que ellos pueden resolver o resolvieron antes y eso es extremadamente poco para alimentar a un cúmulo de gente joven con gran capacidad de trabajo y creatividad. Es entonces mucho más fácil dar largas lecciones y enunciados para memorizar y repetir "a lo loro". Triste realidad.

El profesor investigador puede orientar las preguntas de los alumnos, sugerir caminos de ataque y acompañar al alumno en esta tarea tan esencial a su formación, debe enseñar a trabajar pausada pero ininterrumpidamente, a agotar instancias, a encontrar no un ejemplo, sino "todos" los ejemplos. Fomentar la resolución de problemas, esa es la cosa! Organizar Coloquios para plantear, resolver y discutir problemas, Podríamos decir que para los fines de la enseñanza, *la Matemática es el arte de resolver problemas*, o si se quiere, estudiar Matemática es el

arte de entender y manejar las nociones teóricas (Teoremas) para poder resolver problemas. ¿Qué problemas? Los que aparecen, por ejemplo, en las revistas que mencionamos antes, o en competiciones, o en nuestra propia revista de Educación Matemática.

8. Un último punto realístico

Finalmente no crea el lector que se nos ha pasado por alto un punto fundamental en esta charla. Nada podrá hacerse si no se ofrecen a los profesores subsidios de investigación, licencias con goce de sueldo para estudiar en la Universidad, medios para asistir a cursos y seminarios y para proveerse de revistas y libros. Se necesitan además subsidios para organizar equipos de matemáticos y profesores para escribir y publicar Textos. Destaquemos, no obstante, la encomiable y esforzada labor que se desarrolla en varias universidades del interior de nuestro país. Por ejemplo, en la Universidad Nacional de Córdoba, el IMAF viene organizando desde hace algunos años cursos y talleres de Matemática para Profesores de Enseñanza Media que asisten "con goce de sueldo". Existe también un grupo de Profesores de Enseñanza Media "en comisión" que trabaja con los doctores J. Tirao y J. Vargas en la elaboración de un Texto Elemental de Geometría. En Mendoza y desde hace muchos años la Profesora J. Cosentino organiza y dirige cursos de apoyo a nivel primario y secundario. Las Universidades Nacionales de La Pampa y el Comahue organizan cursos regionales anuales de 3 a 4 semanas de duración para perfeccionamiento de profesores secundarios. Finalmente el Consejo de Rectores de Universidades Nacionales ha encarado un serio proyecto de dictado de cursos intensivos de perfeccionamiento en diferentes lugares del país en los que los asistentes gozan de una beca del mismo Consejo. Afortunadamente tenemos ahora nuestra propia revista de Enseñanza e Investigación en Matemática a nivel elemental donde es posible publicar experiencias y canalizar inquietudes. Me refiero a la Revista de Educación Matemática, publicada por el IMAF de la Universidad Nacional de Córdoba. La situación es propicia para ponernos a trabajar, pero

¡juntos! pues dispersos no haremos nada.

Facultad de Ciencias Exactas
Universidad de Buenos Aires

Dirección Postal: Anchorena 792, La Lucila (1636) Buenos Aires.