FRACCIONES CONTINUADAS

Oscar A. Cámpoli

Introducción

En ésta nota se pretende llamar la atención sobre un tema muy importante y elemental que desde hace tiempo no forma parte de la preparación básica de la mayoría de los matemáticos y mucho menos de un profesor de matemáticas secundarias.

El tema general es el de las aproximaciones racionales a un número real irracional dado. Por supuesto que el problema de hallar números racionales que aproximen más y más a un dado número irracional y el problema de dar la expresión decimal de dicho número irracional son equivalentes.

Digamos entonces que se da un número irracional caracterizado por alguna propiedad y una cierta familia de números racionales. Uno busca el número racional de la familia que mejor aproxima al irracional dado y trata de estimar la diferencia entre ambos.

Precisemos un poco más. Digamos que α es un número irracional. Dado un número natural k podemos preguntarnos cuál es el número racional h/k de denominador k que mejor aproxima a α y estimar $|\alpha - h/k|$.

Cualesquiera sean k y α, está claro que podemos encontrar un número entero h tal que α esté comprendido entre h/k y $(h+1)/k$ Luego se debe cumplir que

$$0 < \alpha - \frac{h}{k} < \frac{1}{2k}$$

ó

$$0 < \frac{h+1}{k} - \alpha < \frac{1}{2k}$$

En cualquier caso están excluídas las igualdades debido a la irracionalidad de α.

Sin embargo para algunos valores de k se pueden obtener aproximaciones mucho mejores.

Para aclarar ésta afirmación usamos una observación atribuida a Dirichlet que no necesita demostración: si N objetos son distribuídos en $N-1$ recipientes entonces al menos un recipiente tiene dos o más objetos.

Denotemos con $[x]$ al más grande entre los números enteros menores o iguales que el número real x. A $[x]$ se lo llama *parte entera* de x.

Dado el número irracional α y un número natural N tomamos como objetos los N números irracionales $n\alpha - [n\alpha]$ para $n = 1,2,\ldots,N$. Se tiene entonces que

$$0 < n\alpha - [n\alpha] < 1 \quad ,\text{para todo } n = 1,2,\ldots,N.$$

Tomemos ahora como "recipientes" a los N intervalos abiertos de la recta real $(0, 1/N)$, $(1/N, 2/N)$, $\ldots$, $((N-1)/N, 1)$.

Puede suceder que para algún natural $n \leq N$ se tenga $0 < n\alpha - [n\alpha] < 1/N$ en cuyo caso obtenemos

$$0 < \alpha - \frac{[n\alpha]}{n} < \frac{1}{nN} \leq \frac{1}{n^2}$$

En caso contrario los N objetos antes mencionados están repartidos en $N-1$ de los "recipientes" ya que ahora sabemos que el primer "recipiente" no contiene objetos. Entonces uno de los recipientes debe tener al menos dos objetos. Esto dice que tenemos números naturales m,n tales que $0 < m < n \leq N$ y además

$$|n\alpha - [n\alpha] - (m\alpha - [m\alpha])| < \frac{1}{N}$$

es decir que

$$|(n-m)\alpha - ([n\alpha] - [m\alpha])| < \frac{1}{N} \quad .$$

Si llamamos $k = n - m$, $h = [n\alpha] - [m\alpha]$ tenemos un natural $k < N$ y un entero h tales que

$$|k\alpha - h| < \frac{1}{N} \quad .$$

Nuevamente sigue entonces que

$$0 < |\alpha - h/k| < \frac{1}{kN} < \frac{1}{k^2}$$

En cualquier caso hemos entonces aproximado a α en menos de $1/k^2$ por una fracción de la forma h/k.

Más precisamente, hemos probado que dados N y α podemos hallar una fracción de la forma h/k con $k \leqslant N$ y tal que

$$\text{(I)} \qquad |\alpha - h/k| < \frac{1}{kN} \quad .$$

Digamos que además de la importancia que éste tipo de resultados tienen de por si, con una ligera modificación se puede usar para probar que si $n > 1$ es un divisor de un número de la forma $A^2 + 1$, A natural, entonces existen enteros s y t tales que $s^2 + t^2 = n$. Este resultado a su vez conduce a la demostración de que hay una infinidad de números primos de la forma $4k+1$ (mucho más fácil es ver que hay una infinidad de primos de la forma $4k+3$).

El tema de fracciones continuadas forma parte del estudio sistemático de desigualdades del tipo (I) y del cálculo efectivo de la fracción h/k una vez dados α y N. En éste sentido los resultados más destacables han sido obtenidos para el caso de irracionalidades cuadráticas, es decir, números reales que son soluciones de una ecuación polinomial de grado 2 a coeficientes racionales (o lo que es lo mismo, a coeficientes enteros).

Por otra parte el tema tiene consecuencias teóricas y prácticas muy importantes como puede verse consultando las referencias al final.

El resto de la nota lo dedicamos a aclarar estas últimas afirmaciones.

Antes de entrar en tema digamos que en lo que sigue hacemos uso intensivo del principio de inducción completa.

A modo de ejemplo, el primer uso que hacemos de este principio es para dar una definición (por ello llamada *definición inductiva*): para definir una sucesión $\{\alpha_n\}$ de números reales basta decir quien es α_1 y dar la forma de obtener el que sigue a los ya definidos, es decir, como se obtiene el elemento α_k de la sucesión a partir de los elementos $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$.

De manera análoga se usa para probar la validez de una proposición para todos los números naturales: se prueba que vale para 1 y luego se prueba que de la validez de la proposición para un dado número natural sigue la validez de la proposición para el siguiente número natural.

Un enunciado más preciso del principio de inducción es el que sigue.

Supongamos que queremos establecer la validez de una sucesión infinita de proposiciones matemáticas $A_1, A_2, A_3, \ldots$ que juntas constituyen una proposición general A. Supongamos: a) que por un razonamiento matemático se prueba que si m es un natural cualquiera, de la verdad de la proposición A_m se sigue la verdad de la A_{m+1} y b) se sabe que la proposición A_1 es cierta. Entonces todas las proposiciones de la sucesión son verdaderas y queda probada la proposición A.

El enunciado anterior junto con ejemplos, aplicaciones y comentarios puede hallarse en el libro de R. Courant y H. Robbins, ¿Qué es la Matemática?, editorial Aguilar.

Fracciones continuadas

Comenzamos con el concepto de fracción continuada de un número real y luego probamos sus propiedades generales.

Si α es un número real irracional podemos poner

$$\alpha = [\alpha] + \frac{1}{\alpha_1}$$

donde $[\alpha]$ denota, como antes, la parte entera de α y $\alpha_1 > 1$ es de nuevo un número irracional.

Llamemos $a_0 = [\alpha]$ (que es un número entero) y tenemos entonces

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1} .$$

Como $\alpha_1 > 1$ podemos escribir

$$\alpha_1 = [\alpha_1] + \frac{1}{\alpha_2}$$

y tenemos nuevamente $\alpha_2 > 1$ y ahora el número $a_1 = [\alpha_1]$ es un número natural.

Podemos entonces definir inductivamente una sucesión $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ de números irracionales mayores que 1 y una sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$ de números enteros, donde salvo a_0 los demás son naturales, poniendo

$$a_{n-1} = [\alpha_{n-1}]$$

$$\alpha_n = (\alpha_{n-1} - a_{n-1})^{-1} .$$

Es decir, hemos dado los primeros términos de ambas sucesiones y en las fórmulas anteriores está dicho como se obtienen, a partir de uno cualquiera, los que siguen.

Tenemos entonces que

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\alpha_3}}} = \dots =$$

$$= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \; a_{n-1} + \cfrac{1}{\alpha_n}}}$$

A esta última expresión la abreviamos

$$[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \alpha_n]$$

y es igual a α.

Escribimos también simbólicamente

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$$

para denotar la sucesión infinita de cocientes y la llamamos *fracción continuada* de α (algunos la llaman fracción continua).

Al número racional

$$[a_0, a_1, \dots, a_n]$$

se lo llama *n-ésimo convergente principal* de α y al número a_n se lo llama *n-ésimo cociente parcial* de α.

Para estimar la diferencia entre α y el n-ésimo convergente principal de α necesitamos algunas fórmulas inductivas para los numeradores y denominadores de las expresiones racionales $[a_0, a_1, \dots, a_n]$.

Asociadas a *cualquier* sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$ de números vamos a definir inductivamente un par de sucesiones de números $p_0, p_1, \ldots, q_0, q_1, \ldots$ de números de la siguiente manera.

$$p_0 = p_0(a_0, a_1, \ldots) = a_0$$

$$q_0 = q_0(a_0, a_1, \ldots) = 1 \quad .$$

Para simplificar notación antes de seguir pongamos

$$p_0' = p_0(a_1, a_2, \ldots) = a_1$$

$$q_0' = q_0(a_1, a_2, \ldots) = 1 \quad .$$

Supuestos definidos p_k y q_k para $k < n$ y para todas las su-cesiones $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definimos entonces

$$p_n = a_0 \, p_{n-1}' + q_{n-1}'$$

$$q_n = p_{n-1}'$$

donde nuevamente hemos puesto

$$p_{n-1}' = p_{n-1}(a_1, a_2, \ldots)$$

$$q_{n-1}' = q_{n-1}(a_1, a_2, \ldots) \, .$$

Notemos entonces que

$$\frac{p_0}{q_0} = a_0$$

y que si suponemos cierto que $\dfrac{p_{n-1}'}{q_{n-1}'} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ entonces

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_0 \, p_{n-1}' + q_{n-1}'}{p_{n-1}'} = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, \ldots, a_n]} = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$$

es decir entonces que p_n/q_n es una expresión racional para $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$.

Es de destacar además que p_n y q_n dependen sólo de $a_0, a_1, \ldots, a_n$ y no de la sucesión completa de números $a_0, a_1, a_2, \ldots$

A continuación hacemos una demostración por inducción de las fórmulas que siguen

$$(II) \qquad \begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} & (n \geqslant 2) \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} & (n \geqslant 2) \end{cases}$$

Estas fórmulas dan un método inductivo de cálculo para la n-ésima convergente (en su expresión p_n/q_n).

El caso $n = 2$ se verifica directamente. Veamos la fórmula para p_2.

$$p_2 = a_0 p_1' + q_1' = a_0(a_1 p_0'' + q_0'') + p_0'' = a_0(a_1 a_2 + 1) + a_2 =$$

$$= a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2$$

Por otra parte

$$a_2 p_1 + p_0 = a_2(a_0 p_0' + q_0') + a_0 = a_2(a_0 a_1 + 1) + a_0 =$$

$$= a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2 = p_2$$

Análogamente se puede probar la fórmula para q_2.

Hagamos entonces la hipótesis inductiva de que las fórmulas valen para $n-1$ $(\geqslant 2)$ y para cualquier sucesión de números $a_0, a_1, a_2, \ldots$

Queremos de ésto deducir la validez de las fórmulas para n.

Sabemos entonces que

$$p_{n-1}' = a_n p_{n-2}' + p_{n-3}'$$

$$q_{n-1}' = a_n q_{n-2}' + q_{n-3}'$$

Usando ésto calculemos

$$p_n = a_0 p'_{n-1} + q'_{n-1} = a_0(a_n p'_{n-2} + p'_{n-3}) + a_n q'_{n-2} + q'_{n-3} =$$

$$= a_n(a_0 p'_{n-2} + q'_{n-2}) + a_0 p'_{n-3} + q'_{n-3} = a_n p_{n-1} + p_{n-2} .$$

Un cálculo análogo probaría la validez de la fórmula para q_n.

En lo que sigue suponemos $a_1, a_2, \ldots$ son números reales *positivos* como es el caso en la fracción continuada de un número irracional.

Una consecuencia importante de las fórmulas en (II) es que si ponemos

$$r_k = [a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n] \quad , \quad 0 \leqslant k \leqslant n$$

entonces

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \ldots, a_n] = [a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, r_k] =$$

$$= \frac{r_k\, p_{k-1} + p_{k-2}}{r_k\, q_{k-1} + q_{k-2}}$$

y de ésto se puede deducir la unicidad del desarrollo en fracciones continuadas de un número irracional.

Precisando, pasamos a probar por inducción que si $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $b_0, b_1, \ldots, b_n$ son números reales tales que $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ son mayores o iguales que 1; $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ son enteros y

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] = [b_0, b_1, \ldots, b_n]$$

entonces $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$.

Como el caso $n = 0$ es obvio, hacemos sólo el paso inductivo. Pongamos

$$r_1 = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \geqslant 1$$

$$s_1 = [b_1, b_2, \ldots, b_n] \geqslant 1 .$$

Por hipótesis tenemos

$$a_0 + \frac{1}{r_1} = b_0 + \frac{1}{s_1}$$

Si $r_1 = 1$ entonces $\frac{1}{s_1}$ es un número entero y como $s_1 \geqslant 1$ sigue que debe ser $s_1 = 1 = r_1$ y luego que $a_0 = b_0$. Además, de la hipótesis inductiva aplicada a $r_1 = s_1$ sigue que $a_i = b_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$, lo que concluye la prueba en el caso $r_1 = 1$.

Si tenemos ahora $r_1 > 1$ entonces $a_0 + \frac{1}{r_1}$ no es un entero y como b_0 lo es, sigue que $s_1 > 1$.

Luego, tomando "partes enteras"

$$a_0 = \left[a_0 + \frac{1}{r_1}\right] = \left[b_0 + \frac{1}{s_1}\right] = b_0$$

entonces sigue nuevamente que $r_1 = s_1$ y usando de nuevo la hipótesis inductiva resulta ahora que

$$a_i = b_i \qquad \text{para } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Otra consecuencia importante de las fórmulas en (II) es

$$\text{(III)} \qquad q_n\, p_{n-1} - p_n\, q_{n-1} = (-1)^n \ , \ \text{para todo } n \geqslant 1.$$

La demostración de ésto se puede obviamente hacer por inducción a partir de (II).

El caso $n = 1$ dice

$$q_1\, p_0 - p_1\, q_0 = -1$$

lo que se verifica reemplazando $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, etc.

Para el paso inductivo notemos que si multiplicamos miembro a miembro la primera fórmula en (II) por q_{n-1}, la segunda por p_{n-1} y luego restamos miembro a miembro se obtiene

$$q_{n-1}p_n - p_{n-1}q_n = -(q_{n-2}p_{n-1} - p_{n-2}q_{n-1}) .$$

De ésto sigue claramente la validez de (III).

Las fórmulas en (III) expresan el hecho de que para todo $n \geqslant 1$ los números p_n y q_n son coprimos y luego que la expresión racional p_n/q_n para la n-ésima convergente principal del número irracional α es una expresión irreducible.

Siguiendo en el caso de la fracción continuada de un número irracional α, la fórmula (III) se puede reescribir como

$$\text{(IV)} \qquad \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}} \quad , \quad \text{para todo } n \geqslant 1.$$

Destacamos el hecho de que (IV) tiene sentido para cualquier irracional α ya que además de no anularse ningún denominador se cumple

$$\text{(V)} \qquad 1 = q_0 \leqslant q_1 < q_2 < q_3 < \dots$$

En efecto, $q_0 = 1$ y además $q_1 = p_0' = a_1 \geqslant 1 = q_0$.

Para $n \geqslant 2$ usamos (II) y un argumento inductivo y obtenemos $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} > a_n q_{n-1} \geqslant q_{n-1}$.

Como otra aplicación de la fórmula (III) obtenemos

$$\text{(VI)} \qquad \alpha q_{n+1} - p_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha_{n+2}\, q_{n+1} + q_n}$$

Esto se puede lograr aplicando (III) a la sucesión $a_0, a_1, \dots, a_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots$.

En éste caso se tiene

$$\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} = [a_0 , a_1 , \ldots, a_{n+1} , \alpha_{n+2}] = \alpha$$

y luego

$$q_{n+1}\alpha - p_{n+1} = q_{n+1} \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - p_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha_{n+2}q_{n+1} + q_n}$$

Esto último puede escribirse

$$\text{(VII)} \qquad \alpha - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_{n+1}(\alpha_{n+2}q_{n+1}+q_n)}$$

La fórmula (VII) (junto con (V)) expresa el hecho de que la sucesión $\frac{p_{2n}}{q_{2n}}$ converge en forma *monótona creciente* al número irracional α y la sucesión $\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$ converge en forma *monótona decreciente* al número α. Usando que $\alpha_{n+2} \geqslant a_{n+2}$, de (VII) obtenemos la siguiente estimación a priori para el error.

$$\text{(VIII)} \qquad \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_{n+1}q_n}$$

desigualdad del tipo de la que teníamos en (I) como anticipáramos.

Irracionalidades cuadráticas

Así las cosas, nos planteamos el problema de calcular explícitamente los números $a_0 , a_1 , a_2 , \ldots$ ya que éstos nos dan las sucesivas aproximaciones $p_0/q_0 , p_1/q_1 , p_2/q_2 , \ldots$.

En la efectiva computación de éstos números $a_0 , a_1 , a_2 , \ldots$ a partir del número irracional α es donde el único éxito "genérico" destacable es para el caso de irracionalidades cuadráticas (ver el comentario al final).

A continuación ejemplificamos y damos el resultado general de Euler-Lagrange para números cuadráticos.

Comenzamos con el ejemplo $\alpha = \sqrt{2}$.

La identidad clave es

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2 + \sqrt{2} - 1}$$

Usando esta identidad podemos "predecir" toda la sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$.

En efecto, está claro que $1 < \sqrt{2} < 2$ con lo que $a_0 = 1$.

Además $\alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1} = 2 + \sqrt{2} - 1$ de donde sigue que $a_1 = 2$ y también que $\alpha_2 = \alpha_1$.

Está claro entonces que

$$a_0 = 1$$
$$a_i = 2 \quad \text{para todo } i \geqslant 1 .$$

El caso $\alpha = \sqrt{2}$ es entonces un ejemplo de desarrollo en fracciones continuadas periódicas no puras.

Si pusiéramos $\alpha = \sqrt{2} + 1$ tendríamos un caso de periodicidad pura.

Para $\alpha = \sqrt{3}$ la identidad clave es

$$\sqrt{3} - 1 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + (\sqrt{3} - 1)}}$$

ya que procediendo como antes se deduce de aquí que

$$a_0 = 1$$
$$a_{2i-1} = 1 \quad \text{para todo } i = 1, 2, \ldots$$
$$a_{2i} = 2 \quad \text{para todo } i = 1, 2, \ldots .$$

<u>Ejercicio</u>: Calcular el desarrollo en fracciones continuadas para $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$. En cada caso calcular los valores de las primeras convergentes p_0/q_0, p_1/q_1, p_2/q_2, acotar el error y comparar con (VIII).

En todos los ejemplos anteriores está presente el hecho de que para un par de índices $n < m$ se tiene $\alpha_n = \alpha_m$. Cuando tal cosa sucede se dice que la fracción continuada es *periódica.*

En el cálculo de expresiones decimales para un número real se ve que la periodicidad del desarrollo corresponde exactamente al hecho de que el número sea racional.

Ahora, en el caso del desarrollo en fracciones continuadas, se puede ver que la periodicidad corresponde exactamente al hecho de que el número sea cuadrático, es decir, solución de una ecuación de grado 2 a coeficientes enteros. Este es un teorema que se llama de Euler-Lagrange.

A continuación damos algunas observaciones y un bosquejo de la prueba del mencionado teorema.

Notemos primero que si $n < m$ y $\alpha_n = \alpha_m$ entonces $\alpha_{n+1} = \alpha_{m+1}$, $\alpha_{n+2} = \alpha_{m+2}$, ..., $\alpha_m = \alpha_{n+(m-n)} = \alpha_{m+(m-n)}$ esto es $\alpha_m = \alpha_{m+(m-n)}$ y de aquí la periodicidad.

Digamos entonces que α es un irracional tal que $\alpha_1 = \alpha_2$. Buscamos una ecuación cuadrática a coeficientes enteros satisfecha por α.

Tenemos

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\alpha_1}}$$

donde la tercera igualdad sigue de la hipótesis hecha sobre α.

Luego

$$a_0 + \frac{1}{\alpha_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\alpha_1}}$$

de donde sigue que

$$\alpha_1^2 - a_1 \alpha_1 - 1 = 0$$

y entonces α_1 es cuadrático.

Además, reemplazando α_1 por $\frac{1}{\alpha - a_0}$ sigue que $0 = (\alpha - a_0)^{-2} - a_1(\alpha - a_0)^{-1} - 1$. Multiplicando por $-(\alpha - a_0)^2$ obtenemos

$$0 = -1 + a_1(\alpha - a_0) + (\alpha - a_0)^2 = \alpha^2 - (2a_0 - a_1)\alpha + a_0^2 - a_1 a_0 - 1$$

y luego α también es cuadrático.

Si uno parte de, digamos, $\alpha_n = \alpha_{n+2}$ sabe que

$$\alpha_n = a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}} = a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \cfrac{1}{\alpha_{n+2}}} = a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \cfrac{1}{\alpha_n}} .$$

Del primero y último términos se obtiene la ecuación

$$\text{(IX)} \qquad a_{n+1}\alpha_n^2 - a_n a_{n+1}\alpha_n - a_n = 0$$

que es cuadrática en α_n a coeficientes enteros.

Ahora de la ecuación

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\alpha_n}}}$$

uno despeja α_n en términos de α, reemplaza en (IX) y obtiene una ecuación cuadrática en α a coeficientes racionales y luego otra a coeficientes enteros.

Con ésto creemos haber ejemplificado el hecho de que un razonamiento inductivo en m-n nos puede llevar a la demostración de que si $n < m$ y $\alpha_n = \alpha_m$ entonces α_m es cuadrático y luego α es cuadrático.

Ejercicio: ¿Cuál es el número α tal que su desarrollo en fracciones continuadas es

$$\alpha = [3, 3, 3, \ldots] \qquad ?$$

Dar una ecuación cuadrática para α.

Lo mismo si $\alpha = [5, 6, 5, 6, \ldots]$.

Seguimos con el teorema de Euler-Lagrange.

Digamos al respecto que la demostración de que si α es un número cuadrático entonces su desarrollo en fracciones continuadas es periódico es bastante más difícil que la recíproca que ya vimos.

Damos a continuación el esquema de la demostración que puede verse en Hardy y Wright [2, pág. 144]. El lector interesado puede encargarse de nuevo en llenar los detalles que faltan. Se puede también consultar el libro de Niven y Zuckerman [1], que está en castellano.

Suponemos entonces que α es un número real y que existen números enteros a, b y c tales que

$$\text{(X)} \qquad a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \quad , \quad a \neq 0 .$$

Recordemos que en la notación anterior teníamos

$$\text{(XI)} \qquad \alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \alpha_n] = \frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}$$

Reemplazando α en (X) por el tercer miembro de (XI) y eliminando denominadores obtenemos

$$A_n \alpha_n^2 + B_n \alpha_n + C_n = 0 \quad , \quad \text{para todo } n$$

donde

$$A_n = a\,p_{n-1}^2 + b\,p_{n-1}\,q_{n-1} + c\,q_{n-1}^2$$

$$B_n = 2a\,p_{n-1}p_{n-2} + b(p_{n-1}\,q_{n-2} + p_{n-2}\,q_{n-1}) + 2c\,q_{n-1}\,q_{n-2}$$

$$C_n = a\,p_{n-2}^2 + b\,p_{n-2}\,q_{n-2} + c\,q_{n-2}^2 = A_{n-1}$$

Se cumple además que A_n, B_n, C_n son números enteros y

(XII) $\quad b^2 - 4ac = B_n^2 - 4\,A_n\,C_n$, para todo n .

De la fórmula (VII) sigue que podemos escribir

$$\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{-\delta_{n-1}}{q_{n-1}}$$

donde δ_{n-1} es un número tal que $|\delta_{n-1}| < 1$.

Entonces $p_{n-1} = \alpha\,q_{n-1} + \dfrac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}}$ y reemplazando en la definición de A_n se puede obtener

$$|A_n| < 2\,|a\alpha| + |a| + |b| \;.$$

Como $C_n = A_{n-1}$ sigue entonces que

$$|C_n| < 2\,|a\alpha| + |a| + |b|$$

y usando (XII) y éstas dos últimas acotaciones obtenemos también

$$|B_n|^2 < 4\,(2\,|a\alpha| + |a| + |b|)^2$$

De estas tres últimas acotaciones sigue que deben existir índices $j < k < \ell$ tales que

$$(A_j, B_j, C_j) = (A_k, B_k, C_k) = (A_\ell, B_\ell, C_\ell) \;.$$

Pongamos

$$A = A_j \ (= A_k = A_\ell)$$
$$B = B_j \ (= B_k = B_\ell)$$
$$C = C_j \ (= C_k = C_\ell) \ .$$

Se tiene entonces que $\alpha_j, \alpha_k, \alpha_\ell$ son raíces de la ecuación cuadrática.

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

y luego se debe cumplir que $\alpha_j = \alpha_k$ o $\alpha_j = \alpha_\ell$ o $\alpha_k = \alpha_\ell$. En cualquiera de los tres casos sigue que la fracción continuada es periódica.

Para concluir esta sección digamos que en el libro de D. Shanks ([5, pág. 178]) pueden verse fórmulas inductivas para el cálculo del desarrollo en fracciones continuadas de los números cuadráticos de la forma $\alpha = \sqrt{N}$ donde N es un número natural que es producto de primos distintos.

En dicho libro puede verse una colección muy grande de problemas resueltos y no resueltos en éste y otros temas junto con aplicaciones, referencias, etc.

Irracionalidades equivalentes

En esta última sección quisiéramos mencionar un concepto que ya estuvo presente antes aunque en forma velada. Se trata del concepto de irracionalidades equivalentes.

Dos números irracionales α y β se dicen *equivalentes* (y abreviamos $\alpha \sim \beta$) si existen números enteros a, b, c, d tales que

$$\beta = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$$

y además se cumple que $(ad - bc)^2 = 1$.

Como se tiene

$$\alpha = \frac{1 \cdot \alpha + 0}{0 \cdot \alpha + 1}$$

sigue que $\alpha \sim \alpha$. Esto se expresa diciendo que la relación $\sim$ es una relación *reflexiva*.

Además si $\beta = \dfrac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$, $ad - bc = \pm 1$ entonces $\alpha = \pm\left(\dfrac{d\beta - b}{-c\beta + a}\right)$

(los signos $\pm$ se corresponden).

Esto dice que la relación es *simétrica*.

Si a, b, c, d, e, f, g, h son enteros tales que $(ad - bc)^2 = 1 = (eh - fg)^2$ y α, β, γ son irracionales tales que

$$\frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} = \beta \qquad \text{y} \qquad \frac{e\beta + f}{g\beta + h} = \gamma$$

entonces $\dfrac{(ae + cf)\alpha + (be + df)}{(ag + ch)\alpha + (bg + dh)} = \gamma$

con $ae + cf$, $be + df$, $ag + ch$ y $bg + dh$ enteros tales que $((ae + cf)(bg + dh) - (be + df)(ag + ch))^2 = 1$.

Es decir, si $\alpha \sim \beta$ y $\beta \sim \gamma$ entonces $\alpha \sim \gamma$.

Esto se expresa diciendo que $\sim$ es una relación *transitiva*.

La reflexividad, simetría y transitividad se resumen diciendo que $\sim$ es una *relación de equivalencia*.

Notemos que como

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{0 \cdot \alpha + 1}{1 \cdot \alpha + 0}, \qquad \alpha + 1 = \frac{1 \cdot \alpha + 1}{0 \cdot \alpha + 1}, \qquad -\alpha = \frac{-1 \cdot \alpha + 0}{0 \cdot \alpha + 1}$$

se tiene que $-\alpha \sim \alpha$, $\alpha^{-1} \sim \alpha$, $\alpha + 1 \sim \alpha$.

Además, como

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1} = \frac{a_0 \cdot \alpha_1 + 1}{1 \cdot \alpha_1 + 0}$$

sigue que $\alpha \sim \alpha_1$. Análogamente, como

$$\alpha_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{\alpha_n} = \frac{a_{n-1} \cdot \alpha_n + 1}{1 \cdot \alpha_n + 0}$$

se deduce que $\alpha_{n-1} \sim \alpha_n$.

Un razonamiento inductivo usando la transitividad nos muestran entonces que

$$\alpha \sim \alpha_n \quad , \quad \text{para todo } n .$$

La importancia del concepto de equivalencia de irracionalidades en relación al tema de fracciones continuadas se centra en el hecho de que irracionales equivalentes tienen esencialmente el mismo desarrollo en fracciones continuadas.

Precisando, se puede probar que si $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \alpha_{n+1}]$ $\beta = [b_0, b_1, \ldots, b_n, \beta_{n+1}]$ son dos números irracionales entonces $\alpha \sim \beta$ si y sólo si existen naturales n y m tales que $\alpha_n = \beta_m$.

Destaquemos el hecho de que si $\alpha_n = \beta_m$ entonces $\alpha_{n+1} = \beta_{m+1}$. Es decir, los desarrollos coinciden desde un punto en adelante para ambos números.

La demostración de este hecho puede verse en el libro de Lang [3, pág. 12]. Aunque no la haremos en detalle, nos proponemos indicar a continuación un curso posible (que no es el de Lang). Con ésto finalizamos la sección.

Ya hemos destacado que dado un irracional α, se tiene $\alpha_n \sim \alpha$, para todo n. Luego si tenemos $\alpha_n = \beta_m$, usando las propiedades de $\sim$

sigue que $\alpha \sim \beta$.

La demostración de la recíproca es bastante más difícil y profunda.

Se puede comenzar probando que las operaciones $T(\alpha) = \alpha + 1$ y $S(\alpha) = -1/\alpha$ "generan" casi todas las operaciones posibles de equivalencia. Precisando, se prueba que dados enteros a, b, c, d tales tales que $ad - bc = 1$, entonces existen enteros $n_1, \dots, n_r, m_1, \dots, \dots, m_r$ tales que se tiene la siguiente igualdad matricial

$$\text{(XIII)} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{m_1} \cdots \begin{pmatrix} 1 & n_r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{m_r}$$

Esto se puede demostrar por un argumento inductivo en las entradas a, b, c, d. Podemos suponer por ejemplo que $c > 0$ y notar el efecto de multiplicar matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$$

Se ve entonces que si elegimos potencias sucesivas convenientes de las matrices de T y de S y multiplicamos a izquierda a la matriz dada $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, podemos "llevarla" a la matriz identidad.

Dados ahora dos números equivalentes α y β digamos que a, b, c, d son números enteros tales que $ad - bc = 1$ y $\frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} = \beta$.

Escribimos la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ como en (XIII).

Se puede verificar directamente que el miembro de la derecha de (XIII) operando en α significa aplicar a α la operación S m_r-veces seguida de la operación T n_r-veces, ..., etc.

Finalmente notamos que los desarrollos en fracciones continuadas de α y $T(\alpha)$ coinciden después del primer término, esto es, $\alpha_1 = (T(\alpha))_1$. Para el caso de α y $-S(\alpha)$ se puede suponer usando lo anterior que $0 < \alpha < 1$ y entonces $\alpha_1 = -S(\alpha)$ y para α y $-\alpha$ se ve que $\alpha_4 = (-\alpha)_4$ si $a_1 > 1$ y que $\alpha_3 = (-\alpha)_2$ si $a_1 = 1$.

Comentario

Quisiéramos concluir dando lo que nos parece una razón muy importante (aunque no sepamos si es original o no) para la ausencia total de resultados en el cálculo del desarrollo en fracciones continuadas de otras clases de números algebraicos o no, aparte de los cuadráticos.

La razón la veríamos en el hecho de que el desarrollo en fracciones continuadas está "naturalmente" asociado a ecuaciones cuadráticas. Para ecuaciones de grado superior (sin hablar de trascendencia), lo "natural" sería otro tipo de desarrollo. Ejemplefiquemos.

La ecuación $x^2 - 2x - 1 = 0$ (que no tiene al 0 por raíz) es equivalente a

$$x = 2 + \frac{1}{x}$$

Reemplazamos ahora x por su igual $2 + \frac{1}{x}$ en el segundo miembro y se obtiene

$$x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x}}$$

Reemplazando de nuevo obtenemos

$$x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x}}}$$

Así sucesivamente obtenemos el desarrollo en fracciones continuadas de la solución $1 + \sqrt{2}$ de la ecuación original $x^2 - 2x - 1 = 0$.

De naturaleza muy distinta (y muy difícilmente manejable) sería el desarrollo que obtendríamos a partir de la ecuación $x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$ con el mismo tipo de razonamiento:

$$x = 3 + 4x^{-1} + x^{-2} = 3 + 4(3 + 4x^{-1} + x^{-2})^{-1} + (3 + 4x^{-1} + x^{-2})^{-2} = \ldots$$

Ejercicios.

1) Usando el comentario anterior, calcular el desarrollo en fracciones continuadas de una raíz de cada una de las ecuaciones que siguen

   a) $x^2 - 3x - 1 = 0$

   b) $x^2 - 4x - 1 = 0$

2) Evaluar las fracciones continuadas que siguen, calcular las primeras convergentes y estimar los errores

   a) $[1, 1, 1, \ldots]$

   b) $[2, 1, 1, \ldots]$

   c) $[2, 3, 1, 1, \ldots]$

   d) $[1, 2, 1, 2, \ldots]$

   e) $[2, 1, 2, 1, \ldots]$.

Bibliografía.

1) *En castellano.* I. Niven y H. Zuckerman. Introducción a la Teoría de los Números. Limusa-Wiley S.A., México, 1969.

2) G.H. Hardy y E.M. Wright. An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford University Press. Fourth Edition, 1960.

3) S. Lang. Introduction to Diophantine Approximations. Addison-Wesley, 1966.

4) C.D. Olds. Continued Fractions. The Mathematical Association of America. New Mathematical Library Nº 9, 1963.

5) D. Shanks. Solved and Unsolved Problems in Number Theory. Chelsea, 1978.

Instituto de Matemática, Astronomía y Física,
Universidad Nacional de Córdoba.