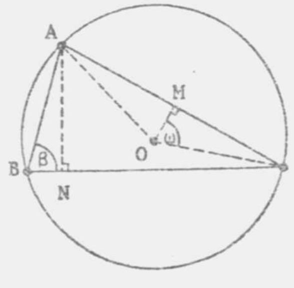
ALGUNAS DESIGUALDADES GEOMETRICAS

Gustavp Corach y Horacio Porta

Resumen: Designemos con ℓ y h, respectivamente, el promedio de los lados y de las alturas de un triángulo inscripto en la circunferencia de diámetro D. En esta nota demostramos que el cociente $e = 2\ell/(h+D)$ satisface $0 < e < 1$ para todo triángulo; se conjetura que el mínimo valor de e sobre los triángulos acutángulos es $(4/41)(3+5\sqrt{2})$, que se obtiene para el isósceles rectángulo. Se estudian otras desigualdades relacionadas, en las que aparece también el valor $g = (h+\ell)^2/F$, donde F es el área del triángulo. La nota incluye algunas conjeturas, ejercicios y tablas.

§1. Designaremos los lados y alturas de un triangulo ABC por sus símbolos habituales a,b,c y h_a,h_b,h_c, respectivamente. Además, O será el centro de la circunferencia circunscripta y R y D serán su radio y su diámetro (que se llaman también el "circunradio" y el "circundiámetro").

(1.1) Desigualdad básica: $b+c \leqslant h_a + D$.



Demostración. Observamos primero que el ángulo ω mide la mitad del ángulo $< AOC$, por ser el triángulo AOC isósceles. Pero entonces $\beta = \omega$ ya que ω es también la mitad de $< AOC$, el ángulo central cuyo arco es AC. Entonces los triángulos rectángulos ANB y CMO son semejantes y por lo tanto

$$\frac{AN}{AB} = \frac{CM}{CO}$$

o sea

$$\frac{h_a}{c} = \frac{b/2}{R}$$

con lo que, usando $D = 2R$, se obtiene

(1.2) $$Dh_a = bc\ .$$

Observemos ahora que $h_a \leq c$ y $h_a \leq b$, y que ambas desigualdades son estrictas a menos que ABC sea rectángulo (en B o en C). Luego

$$0 \leq (c - h_a)(b - h_a)\ .$$

Calculando (y utilizando (1.2)):

$$\begin{aligned} 0 &\leq cb - ch_a - bh_a + h_a^2 = \\ &= 2Rh_a - ch_a - bh_a + h_a^2 \\ &= (D - c - b + h_a)\ h_a \end{aligned}$$

de donde resulta $0 \leq D - c - b + h_a$, que es lo deseado.

(1.3) Nota: Según resulta de la observación anterior, $b + c < h_a + D$ a menos que el triángulo ABC sea rectángulo en B o en C, en cuyo caso vale $b + c = h_a + D$.

(1.4) Permutando los lados se obtienen en general

$$\begin{aligned} a + b &\leq h_c + D \\ b + c &\leq h_a + D \\ c + a &\leq h_b + D \end{aligned}$$

y como ningún triángulo puede ser rectángulo en dos de sus ángulos, alguna de las tres debe ser una desigualdad estricta.

§2. *Algunas consecuencias.* Para expresar otras desigualdades que resultan de éstas, utilizaremos las siguientes notaciones

$$L = a + b + c \qquad \text{(perímetro)}$$

$$\ell = L/3 \qquad \text{(lado promedio)}$$

$$H = h_a + h_b + h_c \qquad \text{(suma de alturas)}$$

$$h = H/3 \qquad \text{(altura promedio)}$$

$$F = (1/2)ah_a = (1/2)bh_b = (1/2)ch_a \qquad \text{(área)}$$

Comencemos sumando las tres desigualdades de (1.4). Se obtiene

$$2L < H + 3D$$

y dividiendo por 6:

(2.1) $$\ell < (h + D)/2$$

("el lado promedio es siempre estrictamente menor que la semisuma de la altura promedio y el circundiámetro"). Observemos que siempre vale $h < \ell < D$; lo que muestra (2.1) es que ℓ siempre está más cerca de h que de D.

Si definimos

(2.2) $$e = 2\ell/(h + D)$$

de (2.1) resulta $0 < e < 1$ para todo triángulo. Es fácil ver que para los triángulos equiláteros

$$e = (4/7)\sqrt{3} \cong 0.989743.$$

También puede verificarse sin dificultad que para un triángulo rectángulo en C y con ángulo α en A vale

$$e = 2(1 + \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)/(3 + \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)^{-1}$$

que poniendo $t = \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha$, se escribe

$$e = f(t) = (4t+4)/(t^2+2t+5). \tag{2.3}$$

Utilizando la identidad $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = (1+\operatorname{sen}2\alpha)^{1/2}$ se concluye que, cuando $0 < \alpha < \pi/2$, el número t varía entre 1 y $\sqrt{2}$ (en realidad recorre ese intervalo *dos veces*, aumentando de 1 a $\sqrt{2}$ cuando α crece de 0 a $\pi/4$ y disminuyendo de $\sqrt{2}$ a 1 cuando α crece de $\pi/4$ a $\pi/2$). Pero entonces los posibles valores de e para triángulos rectángulos son los de la función $f(t)$ definida por (2.3) cuando $1 < t < \sqrt{2}$. Derivando tenemos $df/dt = 4(-t^2-2t+3)/(t^2+2t+5)^2$ de manera que $df/dt < 0$ en $1 < t < \sqrt{2}$ y por lo tanto el rango de e es el intervalo de extremos $f(\sqrt{2}) = (4/41)(3\ \ 5\sqrt{2}) = 0.982543$ y $f(1) = 1$. Podemos resumir lo dicho de la siguiente manera:

(2.4) *Para los triángulos rectángulos se tiene siempre*

$$(4/41)(3+5\sqrt{2}) \leq e < 1$$

y el mínimo valor se alcanza para el triángulo rectángulo isosceles.

(2.5) Nota: conjeturamos que $(4/41)(3+5\sqrt{2}) \leq e < 1$ vale para *cualquier* triángulo acutángulo, pero no hemos podido demostrarlo.

(2.6) Ejercicio. Si a,b,c son los lados de un triángulo, entonces poniendo $p = L/2$ (= $3\ell/2$) vale:

$$e = \frac{4abc(a+b+c)(p(p-a)(p-b)(p-c))^{1/2}}{3a^2b^2c^2 + 4(ab+ac+bc)p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(2.7) Ejercicio. Sean α, γ y η las medias aritméticas, geométrica y armónica de a,b,c y sea $\overline{\gamma}$ la media geométrica de p-a,

$p-b$ y $p-c$. Entonces vale:

$$e = \frac{2\sqrt{6}\,\eta\,(\alpha\bar{\gamma})^{3/2}}{6\,\alpha\bar{\gamma}^{3} + \eta\gamma^{3}} .$$

(2.8) Ejercicio. Para todos los triángulos pitagóricos $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$, donde $n < m$ son enteros positivos, el valor de e es racional. Para los triángulos $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ y $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$ (que corresponden a $m = 2$, $n = 1$ y a $m = 3$, $n = 2$) se obtiene $e = 60/61 \cong$ $\cong 0.983603$ y $e = 195/197 \cong 0.989848$ respectivamente.

Como segunda aplicación escribamos, usando nuevamente (1.4):

$$0 \leqslant b - h_a \leqslant D - c ,$$
$$0 \leqslant a - h_b \leqslant D - c .$$

Multiplicando

$$(b - h_a)(a - h_b) \leqslant (D - c)^2$$

de donde

$$ab + h_a h_b \leqslant 4F + (D - c)^2 \tag{2.9}$$

(la igualdad vale para el triángulo rectángulo isósceles).

Análogamente, multiplicando las desigualdades $a + c \leqslant h_b + D$ y $b + c \leqslant h_a + D$, de (1.4), obtenemos

$$(a + c)(b + c) \leqslant (h_b + D)(h_a + D)$$

o sea

$$ab + ac + bc + c^2 \leqslant h_b h_a + h_b D + D h_a + D^2 .$$

Pero de (1.2) resulta que $ac = h_b D$, $bc = h_a D$ y por lo tanto

(2.10) $$c^2 + ab \leq D^2 + h_a h_b$$

Podemos ahora combinar (2.9) y (2.10). Sumando ab a (2.9) y desarrollando el cuadrado obtenemos

$$2ab + h_a h_b \leq 4F + D^2 - 2Dc + c^2 + ab,$$

y utilizando (2.10) para reemplazar los dos últimos sumandos, tendremos después de simplificar $h_a h_b$ y de dividir por 2:

(2.11) $$ab + cD \leq 2F + D^2 .$$

Sumando (2.11) a las dos fórmulas análogas que se obtienen permutando los lados a,b,c tendremos

$$ab + ac + bc + LD \leq 6F + 3D^2$$

y como (usando 1.2):

$$3Dh = D(h_a + h_b + h_c) = Dh_a + Dh_b + Dh_c = bc + ac + ab ,$$

concluímos que vale

$$D(h + \ell) \leq 2F + D^2 .$$

Esta desigualdad se puede escribir también

$$D^2 - (h + \ell)D + 2F \geq 0 .$$

Observemos que esta desigualdad sería automática si el discriminante $(h + \ell)^2 - 8F$ de la ecuación $x^2 - (h + \ell)x + 2F = 0$ fuera ≤ 0, lo que no sabemos si ocurre alguna vez. Es claro que $(h + \ell)^2 - 8F < 0$ si y solamente si $(h + \ell)^2/F < 8$; pero tampoco conocemos el valor mínimo de

(2.12) $$g = (h+\ell)^2/F \ .$$

Es posible que sea $(1/3)(12+7\sqrt{3}) \cong 8.041452$, que se obtiene para los triángulos equiláteros (ver el Ejercicio (2.15)).

(2.13) Ejercicio: Con la notación utilizada en (2.3) demostrar que para triángulos rectángulos se tiene

$$g = (t^2+4t+1)^2/9(t^2-1)$$

y que el mínimo valor de g para ellos es el del triángulo rectángulo isósceles, es decir

$$g = (1/9)(41+24\sqrt{2}) \cong 8.32679 \ .$$

(2.14) Ejercicio: Deducir de (2.1) que vale

$$gF > (3\ell - D)^2 \ .$$

(2.15) Ejercicio: Utilizar la desigualdad isoperimétrica $3\ell > 2\sqrt{\pi F}$ y (2.14) para concluir que para todo triángulo vale

$$D > (2\sqrt{\pi} - \sqrt{g})\sqrt{F} \ .$$

Considerando el caso más desfavorable, que es el del triángulo equilátero, concluir que también vale

$$D > (4/3)\sqrt{\sqrt{3}}\sqrt{F}$$

La primera desigualdad es mejor que la segunda para los casos en que

$$\sqrt{g} < 2\sqrt{\pi} - (4/3)\sqrt{\sqrt{3}} \cong 1.790142$$

Sospechamos, sin embargo, que esto no ocurre para ningún triángulo.

Recordemos la noción de "triángulo dual": decimos que el triángulo ABC es *dual* si sus alturas son los lados de un triángulo. Naturalmente todo triángulo equilátero es dual; $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ es dual; sin embargo, si $a = 65$, $b = 156$, $c = 169$ entonces $h_a = 156$, $h_b = 65$, $h_c = 60$ y como $h_a > h_b + h_c$, estos no pueden ser los lados de un triángulo. Más generalmente, si $u + vh_a$, $u + vh_b$ y $u + vh_c$ forman un triángulo, se dice que ABC es "(u,v)-dual".

(2.16) Ejercicio: Utilizar (1.4) para demostrar que todo triángulo es $(D,-1)$-dual.

§3. De las preguntas sobre el tema que no sabemos responder, las siguientes nos parecen interesantes.

(3.1) ¿Qué propiedades geométricas tienen en común dos triángulos con el mismo valor de $e = 2\ell/(h + D)$?

(3.2) ¿Qué propiedades geométricas tienen en común dos triángulos con los mismos valores $e = 2\ell/(h + D)$ y $g = (h + \ell)^2/F$? (Conjetura: son semejantes).

(3.3) ¿Cuál es el mínimo valor que toma $e = 2\ell/(h + D)$ sobre los triángulos acutángulos?

(3.4) ¿Cuál es el mínimo valor que toma $g = (h + \ell)^2/F$ sobre todos los triángulos?

§4. En esta última sección transcribimos algunas tablas significativas.

(4.1) Triángulo equilátero: $a = b = c = 1$

$$\ell = 1 \qquad = 1.000000$$
$$h = (1/2)\sqrt{3} \qquad \cong 0.866025$$
$$D = (2/3)\sqrt{3} \qquad \cong 1.154701$$
$$F = (1/4)\sqrt{3} \qquad \cong 0.433013$$
$$e = (4/7)\sqrt{3} \qquad \cong 0.989743$$
$$g = (1/3)(12 + 7\sqrt{3}) \cong 8.041452$$

(4.2) Triángulos rectángulos: $a = \cos\alpha$, $b = \operatorname{sen}\alpha$, $c = 1$ para $0 < \alpha < \pi/2$. En estas fórmulas se abrevia $t = \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha$, que satisface $1 < t < \sqrt{2}$.

$$\ell = (1/3)(t+1)$$
$$h = (1/6)(t^2 + 2t - 1)$$
$$D = 1$$
$$F = (1/4)(t^2 - 1)$$
$$e = 4(t+1)(t^2 + 2t + 5)$$
$$g = (1/9)(t^2 + 4t + 1)^2/(t^2 - 1)$$

Para el caso especial del triángulo isósceles $(\alpha = \pi/4)$ tenemos:

$$\ell = (1/3)(1 + \sqrt{2}) \qquad \cong 0.804738$$
$$h = (1/6)(1 + 2\sqrt{2}) \qquad \cong 0.638071$$
$$D = 1 \qquad = 1.000000$$
$$F = 1/4 \qquad = 0.250000$$
$$e = 4(1 + \sqrt{2})/(7 + 2\sqrt{2}) \cong 0.982543$$
$$g = (1/9)(41 + 24\sqrt{2}) \qquad \cong 8.326792$$

(4.3) Triángulos isósceles: $a = 2\operatorname{sen}\alpha$, $b = c = 1$ para $0 < \alpha < \pi/2$. En estas fórmulas se abrevia

$t = \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha$, $s = \operatorname{sen}\alpha$.

$$\ell = (2/3)(s+1)$$

$$h = (1/3)(t-s)(4s+1)$$

$$D = 1/(t-s)$$

$$F = (1/2)(t^2-1)$$

$$e = 4(t-s)(s+1)/(-4s^3-s^2+4s+4)$$

$$g = (2/9)(4ts-4s^2+t+s+2)^2/(t^2-1).$$

C.O.N.I.C.E.T. - U.B.A.