EJERCICIOS Y PROBLEMAS

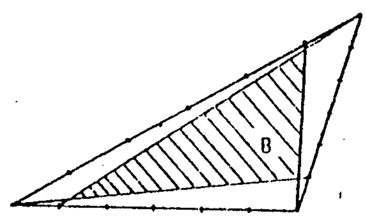
1) Pruebe que si 6 círculos contienen un punto en común, al menos un círculo contiene el centro de otro círculo. [R. Miatello]

2) Pruebe que si $a + b + c = 1$, entonces $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$. Generalice. [R. Miatello]

3) Encuentre el máximo común divisor (a, b) entre $a = 11111111$ y $b = 11 \ldots 1$ (100 dígitos iguales a 1). En general, si $a_n = 11 \ldots 1$ (n dígitos iguales a 1) halle una fórmula para (a_n , a_m). [R. Miatello]

4) Entre los números naturales cuyos dígitos son todos iguales a 1 encuentre el menor número que es divisible por $33 \ldots 3$ (100 dígitos iguales a 3). [R. Miatello]

5) Los tres lados de un triángulo de área A son divididos en n partes iguales. Se traza una línea recta de cada vértice al "punto $\frac{1}{n}$ " del lado opuesto (ver figura) obteniéndose un triángulo interior de área B. Muestre que si $n = 3$, $B = \frac{1}{7} A$. Determine B en función de A cualquiera sea n. [R. Miatello]



(n = 6)

6) (El duelo triangular)

Tres tiradores, A, B y C disputan un duelo a pistola en las siguientes condiciones. Ubicados en las esquinas de un triángulo equilátero se disparan por turnos mutuamente en un orden sorteado de antemano hasta que sólo haya un sobreviviente. Cada tirador dispara un tiro por vez en la dirección deseada. Además los tiradores saben que A siempre acierta al blanco, que B acierta un 80 % de sus disparos y C un 50 % de ellos. Suponiendo que cada uno de ellos sigue la estrategia más favorable y que ninguno resulta muerto por un disparo que no ha sido hecho contra él,

¿Quién tiene más chance de sobrevivir?

¿Cuáles son las probabilidades de sobrevivir de cada uno?

[R. Miatello]

7) Justificar que los números complejos v, w que se obtienen por el siguiente proceso son las soluciones de $x^2 = z_1 z_2$, siendo z_1, z_2 números complejos dados.

Sea L la recta que contiene la biyectriz del ángulo $z_1\hat{0}z_2$ y M su perpendicular por 0. Sea z_3 al simétrico de z_2 con respecto a M. La circunferencia determinada por z_1 z_2 y z_3 intersecta la recta L en dos puntos v, w. [J. Vargas]

8) Construir un triángulo dado: un lado, el producto de las longitudes de los otros dos lados y la diferencia de los ángulos interiores con vértices en el lado dado. [J. Vargas]

9) Si los lados de un triángulo rectángulo miden números naturales, entonces el producto de las longitudes de los tres lados es un múltiplo de 60. [J. Vargas]

10) En cada uno de los problemas siguientes, dar la (las) soluciones con al menos cuatro cifras decimales exactas.

a) Para qué ángulos centrales la longitud del arco de circunferencia es el doble de la longitud de la cuerda subtendida por dicho arco.

b) Si un sector circular es tal que la cuerda que subtiende el arco de circunferencia que lo define, lo divide en dos regiones de igual área. ¿Cuál es la medida del ángulo central?

c) Un tronco cilíndrico de madera cuyo peso específico es 2/3 flota en el agua ¿a qué profundidad se hunde? [J. Vargas]

11) Si a,b son números reales tal que $0 \leq b - a \leq 10^{-m}$ (m algún natural). ¿Se puede asegurar que las primeras m cifras decimales de a y b coinciden? [J. Vargas]

12) Piense en triángulos ABC de base $\overline{AB}$ fija. Describir el conjunto de puntos C tal que la diferencia de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ es constante. [J. Vargas]

13) Fijar una circunferencia C y un punto O en C. Describir la curva determinada por los puntos medios de las cuerdas de C que pasan por O. [J. Vargas]

14) Reformular problemas 6 y 7 en el espacio o sugerir de este tipo de problemas en el plano. [J. Vargas]