POLIGONOS REGULARES

Una experiencia en el aula

María Magdalena Carioni

Habiendo participado en varios cursos de perfeccionamiento docente para profesores de Matemática que se dictaron en IMAF de la Universidad Nacional de Córdoba, donde se trató de proveer a los participantes de nuevas técnicas y métodos para la enseñanza de la Matemática y habiendo sido yo bien impresionada por los resultados de esos cursos, decidí con gran entusiasmo experimentar con la técnica propuesta en mi propio curso, alumnos de tercer año de una escuela comercial.

El curso estaba ya finalizando y me faltaban dar sólo un par de temas, polígonos regulares y funciones trigonométricas, para completarlo.

Los temas mencionados me parecían áridos y en cierto modo tediosos y, aunque pasé varios días pensando en una manera novedosa de presentarlo a mis alumnos bajo la influencia del curso que había tomado, me encontré llegando a mi clase sin haber decidido cual de los temas debía enseñar primero.

En esta situación traté de encontrar en mis alumnos una motivación para comenzar la clase la que surgió casualmente a raíz de que el padre de uno de ellos tenía una fábrica de mosaicos.

El problema que decidimos plantearnos fue el siguiente:

"Construir un mosaico con la forma de un pentágono regular y calcular las dimensiones, según el tamaño del mosaico que se quiera fabricar".

Los alumnos propusieron, respondiendo a mi pedido, dibujar una circunferencia, dividir el ángulo central en cinco partes iguales y formar el polígono uniendo la intersección de los lados de los ángulos centrales con la circunferencia.

Evidentemente surgieron cinco triángulos isósceles iguales formando el pentágono regular donde la altura de cada triángulo es apotema. El apotema divide a cada triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos iguales. Cada triángulo rectángulo está formado por el radio como hipotenusa, la apotema y la mitad del lado del pentágono regular como catetos.

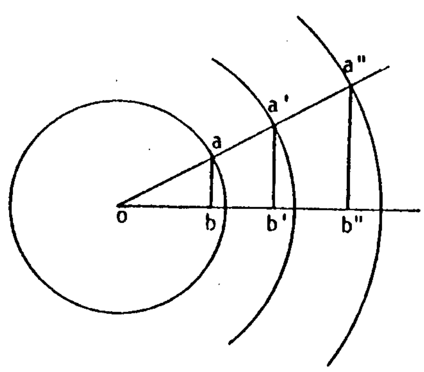
El problema se había reducido a resolver un triángulo rectángulo donde solamente se conocía la longitud del radio (hipotenusa).

Los alumnos habían estudiado recientemente la relación pitagórica lo que surgió con naturalidad para resolver al triángulo rectángulo, pero no resultó provechosa debido a la identidad que surge al reemplazar un lado en función de los otros dos.

Se debía buscar otro camino, confieso que no sabía de antemano cual era el conveniente pero intenté trasmitir a mis alumnos el interés por descubrirlo.

Los induje a pensar en circunferencias concéntricas de diferentes tamaños que variaban las dimensiones del pentágono regular, lo que posibilitó aplicar el teorema fundamental de la semejanza de triángulos.

Los alumnos escribieron todas las proporciones que surgen de los triángulos semejantes para buscar alguna relación que nos llevara a solucionar el problema. A continuación se escriben dos de ellas:



$$\frac{\overline{ab}}{\overline{a'b'}} = \frac{\overline{ao}}{\overline{a'o}}$$

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{a''b''}} = \frac{\overline{ao}}{\overline{a''o}}$$

No sabíamos si este nuevo camino nos conduciría a la solución, aparentemente no servía de mucho teniendo en cuenta los prerrequisitos con que contaban los alumnos. Sin embargo preví las funciones trigonométricas, ellas surgían aplicando una propiedad de las proporciones, aquella que permite permutar los medios, e induje a efectuarlo.

La conclusión que surgió de inmediato fue:

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ao}} = \frac{\overline{a'b'}}{\overline{a'o}} = \frac{\overline{a''b''}}{\overline{a''o}} = \text{constante}$$

Esta constante no cambiaría si seguía variando el radio de la circunferencia donde está inscripto el pentágono regular.

Se hizo necesario entonces introducir las funciones trigonométricas:

$$\text{sen } a\hat{o}b = \frac{\overline{ab}}{\overline{ao}} = \frac{\overline{a'b'}}{\overline{a'o}} = \frac{\overline{a''b''}}{\overline{a''o}} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

¿Cómo calcular el ángulo aob?. Es el ángulo que resulta de dividir al ángulo central de la circunferencia primero por cinco, si el polígono es un pentágono regular, y después por dos, ya que la apotema lo divide en dos partes iguales.

La medida del ángulo aob en grados sexagecimales es: $\frac{360º}{5.2} = 36º$

Los segmentos ab, a'b', a"b" representan la mitad del lado del polígono regular y ao, a'o, a"o segmentos que representan el radio de la circunferencia utilizada. Los alumnos reemplazaron esos datos en las funciones trigonométricas definidas. Por ejemplo:

$$\text{sen } 36º = \frac{\ell_5 : 2}{r}$$

Como el radio es otro de los datos con que se contaba, el lado del pentágono regular es:

$$\ell_5 = 2r \text{ sen } 36º$$

De manera similar se calculó la apotema en función del radio usando el coseno de 36º.

Luego notaron que si se variaba el número de lados del polígono, el razonamiento es exactamente el mismo y que el lado de cualquier polígono regular respondía a:

$$\ell_n = 2r \operatorname{sen} \frac{180º}{n} \qquad \text{siendo } \underline{n} \text{ el número de lados}$$

Todo este razonamiento insumió ochenta minutos de clase y permitió seguir el estudio tanto de las funciones trigonométricas como de los polígonos regulares.

Confieso que el tiempo, que en un principio creí no alcanzaría para desarrollar ambos temas, fue suficiente para ese objetivo. Los alumnos resolvieron triángulos rectángulos sin necesidad de desarrollar más contenidos.

En los próximos ochenta minutos surgió naturalmente la pregunta de si la construcción de mosaicos pentagonales sería conveniente, dada la pretención de usarla para curbir una superficie plana y esto motivó a su vez el interés de averiguar que polígonos regulares sirven para este propósito. Los alumnos rápidamente concluyeron que el pentágono regular no era adecuado usando la relación conocida para calcular un ángulo interior de un polígono regular, lo cual les hizo ver que el número m de polígonos que tienen un vértice común debe ser $\frac{10}{3}$ para satisfacer:

$$\frac{2R\ (n-2)}{n} \cdot m = 4R$$

Usando esta misma relación les fue fácil concluir que los únicos politonos regulares capaces de cubrir el plano son: los triángulos equiláteros, los cuadrados y los exágonos.

Esto fue útil para ellos, aprendieron a manejar fluídamente la relación de los ángulos interiores e hicieron el cálculo de lados y apotemas de polígonos regulares.

Finalizado el cálculo pregunté a los alumnos si les había re sultado accesible el entendimiento de todo lo hecho, a lo que no contestaron.

Pregunté entonces si se habían sentido más cómodos trabajando de esa manera, ellos respondieron que les resultaba más intere sante y menos monótono.

Por mi parte seguí experimentando la técnica con otros temas para asegurarme si la forma de trabajo es adecuada o sirve circuns tancialmente.

Confieso que me siento identificada con ella y soy una entusiasta del método aunque no quiero significar que sea aplicable en forma permanente.

Esta manera de enseñar a los alumnos a pensar, contribuye notablemente a lograr los objetivos propios de la materia.

Escuela Superior de Comercio
"Ing. Víctor Rée" -
Av. Fader 3821 - C.de las Rosas.
Córdoba.

NOTICIAS

La "VII Reunión de Educación en Matemática" conjuntamente con la "XXXIV Reunión de la Unión Matemática Argentina" se llevará a cabo los días 20, 21 y 22 de setiembre del corriente año en la ciudad de Córdoba. La fecha tope para la presentación de trabajos es el 15 de Agosto y deben dirigirse a:

VII Reunión de Educación en Matemática
Facultad de Matemática, Astronomía y Física (ex IMAF)
Universidad Nacional de Córdoba
Ciudad Universitaria
(5032) - CORDOBA

Información sobre hoteles, inscripción y horarios estará disponible a partir del 1 de Agosto.

**** ** ****

"Primer Encuentro Provincial de Profesores de Química y Merceología de la Provincia de Córdoba" - (EPDEQ I). Se realizará en Córdoba el 9 de Junio de 1984, de 9 a 19,30 hs.

Por informes e inscripciones dirigirse a:

Comité Ejecutivo EPDEQ I
Avda. Sabattini 359
(5000) - CORDOBA

**** ** ****