# UNA SUCESION Y SUS SUMAS PARCIALES

A. DiSchiave y H. Porta

Consideremos los números

(1) $s_1 = 1$

(2) $s_2 = 1 + 2 = 3$

(3) $s_3 = 1 + 2 + 3 = 6$

(4) $s_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

.
.
.

(n) $s_n = 1 + 2 + \ldots + n$ .

Como $s_n + s_n = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n + 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$, sumando en esta expresión el primero y último términos, el segundo y penúltimo términos, etc., tendremos $2s_n = (1+n) + (1+n) + \ldots + (1+n) = n(1+n)$. De aquí resulta

(*) $$s_n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

como es bien conocido.

Puede pensarse que los valores $s_1, s_2, \ldots$ se obtienen como los resultados de incrementar el número $1 = s_1$ sumando sucesivamente 2, 3, 4, ... .

Supongamos ahora que queremos repetir este procedimiento con la modificación siguiente: *todo número que aparece como resultado de una de las sumas queda descalificado y no podrá ser utilizado como incremento en la formación del término correspondiente.*

Tendremos, como antes, los dos primeros términos:

(1') $a_1 = 1$

(2') $a_2 = 1 + 2 = 3.$

Pero ahora la próxima línea será

(3') $a_3 = 1 + 2 + 4 = 7$

ya que 3 fue el resultado en (2') y por lo tanto no puede volver a usarse: 4 es el menor número disponible en este momento. Lo mismo ocurrirá más adelante con 7, que aparece en (3'), de manera que tendremos

(4') $a_4 = 1 + 2 + 4 + 5 = 12$

(5') $a_5 = 1 + 2 + 4 + 5 + 6 = 18$

(6') $a_6 = 1 + 2 + 4 + 5 + 6 + 8 = 26$

(7') $a_7 = 1 + 2 + 4 + 5 + 6 + 8 + 9 = 35.$

La tabla continúa con los valores 45, 56, 69, 83, 98, 114, ... que se obtienen con el mismo procedimiento.

La principal diferencia ente $s_1, s_2, \ldots$ y $a_1, a_2, \ldots$ es que para el número $s_n$ tendremos la fórmula (*) que nos permite calcularlo cualquiera sea el valor de $n$ : $s_{20} = 210$, $s_{100} = 5050$, etc. Cada $a_n$ en cambio, se obtiene del anterior $a_{n-1}$ incrementándolo en un número que depende de los $a_j$ anteriores. Por lo tanto es bastante laborioso calcular $a_{20} = 260$, $a_{100} = 5764$. Más aún poco nos ayuda conocer $a_{173} = 16749$ para calcular $a_{174}$, ya que para obtener $a_{174}$ debemos sumar a 16749 el menor incremento disponible (es decir el menor número que no fue usado aún como sumando ni apareció entre los $a_j$ anteriores): ¿Cuál es ese número?

El objetivo de esta nota es mostrar que a veces la falta de una fórmula explícita para los términos de una sucesión no impide hacer algunos cálculos con ella. Hemos elegido la sucesión $a_1$, $a_2, \ldots$ y nos proponemos demostrar que vale:

PROPOSICION

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{2}$$

Este enunciado no tiene ninguna importancia en sí, pero es oportuno pretexto para lo deseado.

Usaremos la notación $b_1 = 1$, $b_2 = a_2 - a_1 = 2$, $b_3 = a_3 - a_2 = 4$, y en general: $b_n = a_n - a_{n-1}$. De aquí resulta que $a_n = b_n + a_{n-1} = b_n + b_{n-1} + a_{n-2} = \ldots$ y por lo tanto

(**) $\quad a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n \quad$ para $\quad n = 1, 2, \ldots$

Análogamente, pondremos $c_1 = 1$, $c_2 = b_2 - b_1 = 1$, $c_3 = b_3 - b_2 = 2, \ldots$ $c_n = b_n - b_{n-1}$. Luego

(***) $\quad b_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n \quad$ para $\quad n = 1, 2, \ldots$ .

Lema A. $\quad b_n \geq n \quad$ *para* $\quad n = 1, 2, \ldots$

Demostración: Como ningún incremento se repite, $b_{n-1} < b_n$, o sea $c_n = b_n - b_{n-1} \geq 1$. Pero entonces $b_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n \geq 1 + \ldots + 1 = n$, como queríamos.

De este lema resulta que nunca $a_n$ y $a_{n+1}$ son números consecutivos. Por lo tanto en el paso $n+1$ el menor incremento disponible será $b_n + 1$ o, si $b_n + 1$ es un $a_j$, $b_n + 2$ que seguramente será nuevo. Luego $c_n \leq 2$ y usando (***):

Corolario 1 del Lema A: *Para todo* $n$, $1 \leq c_n \leq 2$ *y además* $b_n \leq 2n$.

Por otra parte tenemos:

Corolario 2 del Lema A: $a_n \geq \frac{1}{2} n(n+1)$, *o sea* $\frac{a_n}{n^2} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$

Demostración: Del Lema A resulta que

$$a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n \geq 1 + 2 + \ldots + n = s_n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

Luego

$$\frac{a_n}{n^2} > \frac{\frac{1}{2}\, n(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} ,$$

como se quería demostrar.

Para cada $j$, designemos ahora con el símbolo $d = d(j)$ al mayor $n$ tal que $a_n < j$. Por ejemplo, $d(15) = 4$ porque $a_4 < 15$ y $a_5 > 15$. Es claro que $d(j)$ cuenta el número de términos de la sucesión $a_n$ comprendidos entre 1 y $j$; tendremos $d(1) = d(2) = 1$, $d(3) = d(4) = d(5) = 2$, etc.

Lema B. $\qquad b_n = n-1 + d(b_n) \quad$ *para* $\quad n = 1,2, \ldots$ .

Demostración: Consideremos los $b_n$ números $1,2,3,\ldots, b_n$. Este conjunto de números se descompone en dos partes: los $n-1$ que son de la forma $b_i$ y los $d(b_n)$ que son de la forma $a_i$;

$$\begin{array}{l} b_2 \; , \; b_3 \; , \ldots , \; b_n \\ a_1 \; , \; a_2 \; , \ldots , \; a_{d(b_n)} . \end{array}$$

Pero entonces $b_n = (n-1) + d(b_n)$ como se quería.

Lema C. $\qquad d(j) < \frac{1}{2}\,(8j+1)^{1/2}$ *para* $\quad j = 1,2, \ldots$ .

Demostración: Escribamos $d$ para designar a $d(j)$. Según el Corolario 2 del lema A tendremos $j \geq a_d \geq \frac{1}{2}\, d(d+1)$. Pero entonces $d^2+d-2j<0$ y por lo tanto $d$ debe estar entre las raíces de $x^2+x-2j=0$, que son

$$x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1+8j)^{1/2} ,$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+8j)^{1/2} .$$

Esto significa que $d \leq x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,(1+8j)^{1/2}$ y el lema C está probado.

Lema D: $\qquad \dfrac{a_n}{n^2} < \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{\sqrt{n}}$ *para* $\quad n = 1,2, \ldots$ .

Demostración: Del Corolario 1 del lema A y del lema C resulta que

$$d(b_j) \leq d(2j) \leq \frac{1}{2}(16j+1)^{1/2} .$$

Usando ahora (**) y el lema B tendremos

$$a_n = b_1 + \ldots + b_n = 0 + d(b_1) + 1 + d(b_2) + \ldots$$
$$\ldots + (n-1) + d(b_n) \leq 0 + 1 + \ldots + (n-1) + \frac{1}{2}(16+1)^{1/2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{2}(16n+1)^{1/2} \leq \frac{1}{2}(n-1)n + \frac{1}{2}n(16n+1)^{1/2} \leq$$
$$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n(16n+1)^{1/2} \leq \frac{1}{2}n^2 + 2n(n+1)^{1/2} .$$

Dividiendo por $n^2$ se obtiene

$$\frac{a_n}{n^2} < \frac{1}{2} + \frac{2n(n+1)^{1/2}}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2} + \frac{4}{\sqrt{n}} ,$$

como se quería.

Podemos ahora dar la demostración de la Proposición que se enunció anteriormente. Del Corolario 2 del lema A y del lema D resulta

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} < \frac{a_n}{n^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{4}{\sqrt{n}}$$

y tomando límites es claro que $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{2}$, con lo que queda establecida la proposición.

Es oportuno comentar que de las últimas desigualdades resulta

$$\frac{1}{2n} < \frac{a_n}{n} - \frac{1}{2} < \frac{4}{\sqrt{n}}$$

y por lo tanto

$$(\#) \qquad \lim_{n \to \infty} n^{\alpha} \left\{ \frac{a_n}{n^2} - \frac{1}{2} \right\} = 0$$

para $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ; esto describe en cierta medida la velocidad de convergencia de $a_n/n^2$ hacia el límite 1/2.

Pregunta Nº 1: ¿Para cuáles valores de $\alpha$ es válida la fórmula (#)?

Pregunta Nº 2: Si designamos con $\alpha_n$ el cociente $a_n/n^2$, ¿es la sucesión $\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \ldots$ decreciente?

La evidencia numérica así lo indica, ya que

$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 > \alpha_5 < \alpha_6 > \alpha_7 > \ldots > \alpha_{250}$. Obsérvese que aún cuando $\alpha_n$ sea decreciente a partir de $n = 6$, no puede serlo demasiado bruscamente, porque vale

$$(\S) \qquad \alpha_{n+1} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 \alpha_n .$$

Esto se demuestra probando primero por inducción que $a_n + n \leq (n+1)b_{n+1}$ y usando $b_{n+1} = a_{n+1} - a_n$ para obtener

$$(n+2)a_n + n \leq (n+1)a_{n+1}$$

de donde, dividiendo por $(n+1)^3$ resulta

$$\alpha_{n+1} \geq \frac{n}{(n+1)^3} + \frac{(n+2)n^2}{(n+1)^3}\alpha_n ,$$

que implica (§).

Para concluir, recordemos que una forma de estudiar una sucesión es observar que los números del conjunto referencial que en ella aparecen o no aparecen definen, respectivamente, una "figura" y un "fondo", de manera análoga a lo que ocurre en un cuadro. El caso particular considerado aquí aparece en la página 73 de [1] precisamente para ilustrar estos conceptos.

Tendremos, para el conjunto de los enteros no negativos, la partición:

Figura: 1, 3, 7, 12, 18, 26, 35, 45, 56, 69,...
Fondo: 0, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 13,...

Por definición, las sumas parciales de los términos del fondo, aumentadas en una unidad, son los términos de la figura. Por lo tanto estas sumas *no* están en la figura.

Pregunta Nº 3: ¿Cuáles sumas parciales de los términos de la figura están en el fondo?

La evidencia numérica indica que para todo n 1, la suma $\Sigma_{j=1}^{n} a_n$ está en el fondo.

Como toda suma parcial del fondo pertenece otra vez al fondo, podemos comenzar el proceso nuevamente utilizándolo como conjunto referencial. Esto significa que definiremos una segunda figura mediante

$$e_1 = 2,$$
$$e_2 = 2 + 4 = 6,$$
$$e_3 = 2 + 4 + 5 = 11,$$
$$e_4 = 2 + 4 + 5 + 8 = 19,$$
$$e_5 = 2 + 4 + 5 + 8 + 9 = 28,$$

sucesión que continúa con 38, 51, 65, ... . Tendremos por lo tanto:

| | |
|---|---|
| Segunda figura: | 2, 6, 11, 19, 28, 38, 51, 65, ... |
| Segundo fondo: | 4, 5, 8, 9, 10, 13, 14, 15, ... |

Pregunta Nº 4: ¿Cuáles sumas parciales del segundo fondo pertenecen nuevamente al segundo fondo? ¿Cuáles sumas parciales de la segunda figura pertenece nuevamente a la segunda figura? ¿Cuáles números son al mismo tiempo sumas parciales del segundo fondo y de la segunda figura?

Referencia:

[1] Hofstadter, Douglas R., "Gödel, Escher, Bach", Vintage Books, New York, 1979.

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
(UBA) e Instituto Argentino de Matemática
(CONICET)

Comentario sobre la nota "Algunas desigualdades geométricas" (de Corach y Porta), REM - Vol 1 Nº 3, pág. 3 . Por Fred Perticani - UBA.

Utilizando la notación de la nota demostramos aquí que para todo triángulo acutángulo vale

$$(1) \qquad e > (2/3)(3 - \sqrt{3}) \cong 0.8453 .$$

Esto no resuelve la conjetura de los autores (ver (2.5) de su nota) pero provee una cota inferior no obvia.

Para demostrar (1) observamos primero, que si $ABC$ y $AB'C$ son triángulos acutángulos inscriptos en una circunferencia de diámetro $D$ y si $AB'C$ es rectángulo (en $A$ o en $C$), entonces los perímetros respectivos, $L$ y $L'$, satisfacen

$$(2) \qquad L' \leq L .$$

En efecto, el área $F$ de $ABC$ es mayor o igual que el área $F'$ de $AB'C$ (por ser la altura correspondiente a $AC$ mayor o igual en $ABC$ que en $AB'C$). Pero

$$F = (1/2)ac \operatorname{sen} \beta , \qquad F' = (1/2)a'c' \operatorname{sen} \beta$$

así que $ac \geq a'c'$. Por otro lado, $a^2 + c^2 + 2ac \cos \beta = b^2 = (a')^2 + (c')^2 + 2a'c' \cos \beta$ de modo que

$$\begin{aligned}(a + c)^2 &= a^2 + c^2 + 2ac \cos \beta + 2ac(1 - \cos \beta) = \\ &= (a')^2 + 2a'c' \cos \beta + 2ac(1-\cos \beta) \\ &\geq (a')^2 + (c')^2 + 2a'c' \cos \beta + 2a'c'(1-\cos \beta) = \\ &= (a' + c')^2 .\end{aligned}$$

Eliminando cuadrados resulta $a + c \geq a' + c'$ de donde $L \geq L'$.

De (2) obtenemos

(3) $D < (1/2)L$ , y $1/2$ es la menor constante posible.

Para demostrarlo, consideremos el triángulo rectángulo con base AC y utilicemos (2):

$$2D = 2c' < c' + a' + b' = L' < L$$

Por otra parte, cuando $C$ tiende a $A$ , $L$ tiende a $2D$ de manera que la constante no puede ser menor que $1/2$.

Finalmente mencionamos la desigualdad de Erdös:

(4) $$H < (\sqrt{3}/2)L$$

La demostración de (1) es ahora muy facil utilizando (3) y (4):

$$e = 2L/(H + 3D) > 2L((\sqrt{3}/2)L + (3/2)L) = (2/3)(3-\sqrt{3})$$

Observemos que también vale $(1/2)L < H$. En efecto de la definición de $e$ y (3) obtenemos

$$2L = e(H + 3D) < e(H + (3/2)L)$$

pero $e < 1$ y por lo tanto $2L < H + (3/2)L$ de donde resulta lo deseado. ♦