ACERCA DE NUMEROS PALINDROMICOS O CAPICUAS

O.A. Cámpoli y A.M. Niell

El propósito de esta nota es hacer algunos comentarios y observaciones acerca de un tipo particular de números naturales que son considerados por mucha gente como un augurio de buena suerte; nos referimos por supuesto a los números capicúas o palindrómicos.

Se entiende comúnmente por número capicúa un número natural de más de un dígito tal que en su escritura reducida (esto es, sin ceros a la izquierda) se lee igual de izquierda a derecha que al revés. Por supuesto que si tomamos esto como definición entonces un número terminado en 0 (cero) no puede ser capicúa. Está claro además que el número 4343, por ejemplo, tampoco es capicúa.

Si tomamos lo anterior como definición de número capicúa, dado que esta definición se refiere no al número en sí sino a su representación en una cierta base (la decimal), está claro que podemos extender el concepto a números escritos en cualquier base y así lo haremos.

En lo que sigue, cuando representamos un número en una base menor que 10 empleamos los dígitos usuales y con el mismo significado, y entonces, cuando escribimos

$$x = 111_3$$

queremos significar el número natural que tiene a 111 por representación en la base 3, esto es, el número cuya representación decimal es

$$x = 13_{10}$$

Es claro que para todo número natural x (mayor o igual que 3) se tiene:

$$x = 11_{x-1}$$

de donde sigue que *todo número natural* (≥ 3) *tiene una representación capicúa*, que de ahora en más llamaremos representación capicúa trivial.

Al respecto una primera pregunta que uno puede plantearse es si todos estos números tienen además alguna representación capicúa no trivial.

Se puede entonces mirar los primeros ejemplos y uno encuentra que, por supuesto, 3 y 4 no tienen representación capicúa no trivial pero

$$5 = 5_{10} = 101_2$$

y de nuevo 6 no tiene representación palindrómica no trivial. Siguiendo encontramos:

$$7 = 111_2 ; \quad 8 = 22_3 ; \quad 9 = 1001_2 ; \quad 10 = 101_3$$

pero de nuevo 11 no tiene representación capicúa no trivial ya que es fácil comprobar que

$$11 = 1011_2 = 102_3 = 23_4 = 21_5 = 15_6 = 14_7 = 13_8 = 12_9$$

Luego siguen

$$12 = 22_5 ; \quad 13 = 111_3 ; \quad 14 = 22_6 ; \quad 15 = 1111_2 ;$$

$$16 = 121_3 = 22_7 ; \quad 17 = 10001_2 ; \quad 18 = 33_5$$

y al probar con 19 uno encuentra que no admite representación capicúa no trivial.

Como muestran los ejemplos anteriores, cuando un número admite representación capicúa no trivial, ésta no es necesariamente única.

El próximo número excepcional que se puede hallar con papel y lápiz es 47.

Después de estos ejemplos, la pregunta que nos planteamos es la de caracterizar a los números excepcionales, esto es, los números naturales que no admiten una representación capicúa no trivial. En este momento, tal vez valga la pena volver a reflexionar sobre la primera frase de esta nota en el sentido de las cualidades extraordinarias que se les atribuye a los números capicúas, ya hemos notado que *todos* los números

(≥ 3) tienen una representación capicúa y la mayoría de los otros que analizamos tienen *además* una representación capicúa no trivial.

Pero volvamos al problema de caracterizar a los números excepcionales. En este sentido tenemos un Primer resultado (notado por A.M. Niell) que nos parece lo suficientemente interesante como para llamarlo teorema, y es el que sigue.

Teorema: Todo número excepcional mayor que 6 es primo; o de otra manera: los únicos números compuestos excepcionales son 4 y 6.

Demostración: Supongamos que tenemos un número compuesto cualquiera $n = p.q$ con $2 \leq p \leq q$. Analizaremos varios casos.

*** Caso $p < q-1$. En este caso tenemos $N = p.q = p(q-1)+p$; luego, con el dígito p escrito dos veces (pp) se obtiene una representación palindrómica de N en base q-1 que es no trivial, ya que $p \geq 2$.

*** Caso $p = q-1$. Una situación particular de este caso se obtiene cuando $p = 2$, $q = 3$, $n = 6$, ya que hemos visto que 6 no admite representación capicúa no trivial. Descartada esta situación, debemos mirar la situación general, esto es, $p > 2$.

Cuando p es impar, q es par y podemos definir entonces un nuevo par de naturales p', q' por medio de $p' = q/2$, $q' = 2p$. Si p es par, entonces ponemos $p' = p/2$, $q' = 2q$. En ambos casos se cumple que $n = p.q = p'.q'$ y además, por ser $p > 2$, en ambos casos también se cumple que $2 \leq p' < q'-1$ (¡verificarlo!). Entonces $n = p'.q'$ está en la situación del caso anterior y admite por lo tanto una representación capicúa no trivial.

*** Caso $p = q$. Este es claramente el último caso que debemos analizar. Tenemos entonces

$$n = p^2 = p.p = ((p-1)+1)((p-1)+1) = (p-1)^2 + 2(p-1)+1.$$

Está claro entonces que si $p > 3$ se tiene $p-1 > 2$ y por lo tanto

$$n = 121_{p-1}$$

es una representación palindrómica no trivial de n. Por otra parte recordemos que ya hemos analizado los primeros números naturales y en particular hemos ya visto qué sucede si $p = 3$ ó $p = 2$ (respectivamente $n = 9$, $n = 4$), lo que concluye la demostración del teorema.

En resumen:

-Los dos primeros números compuestos (4 y 6) son excepcionales, es decir, no admiten representación palindrómica no trivial. Son los únicos números compuestos con esta propiedad.

-Los números compuestos mayores que 6 que pueden descomponerse como producto de dos factores distintos (en particular, todos los números pares a partir del 8) admiten una representación capicúa no trivial de dos dígitos.

-Los números compuestos que no entran en la categoría anterior son los cuadrados de primos que, a partir de

$$5^2 = 25,$$

admiten una representación palindrómica no trivial de tres dígitos. El

$$3^2 = 9$$

admite una única representación capicúa no trivial de cuatro dígitos.

Quedan por dilucidar cuestiones relativas a la unicidad de la representación capicúa no trivial en los casos en que ésta existe, pero concentremos nuestra atención en la determinación de los números excepcionales.

Es claro que todo número que admite una representación capicúa no trivial con un número par de dígitos es compuesto, ya que si B es la base usada entonces el número es divisible por B+1. Por consiguiente, al buscar representaciones polindrómicas no triviales de un número primo basta buscar aquéllas que tienen un número impar de dígitos.

Los cálculos que hemos hecho parecieran indicar que los primos excepcionales son los menos, pero sería interesante obtener resultados que permitan una mejor caracterización de los mismos, aunque más no sea a través de sus propiedades de distribución.

Comentario etimológico: En idioma catalán, la frase "cap i cua" significa "cabeza y cola". El vocablo griego "palíndromos", formado por "palin" (de nuevo) y "dromos" (carrera), significa "que desanda lo andado"

LISTA DE LOS NUMEROS EXCEPCIONALES MENORES QUE $2^{15} = 32768$
OBTENIDA EN LA COMPUTADORA PDP 11/23 DE LA FACULTAD DE MATEMATICA, ASTRONOMIA Y FISICA (IMAF), UNIVERSIDAD NACIONAL DE CORDOBA.
*** Programación: Lic. Laura C. Dutto ***

3	4	6	11	19	47	53	79	103	137	139	149
163	167	179	223	263	269	283	293	311	317	347	359
367	389	439	491	563	569	593	607	659	739	827	853
877	977	983	997	1019	1049	1061	1187	1213	1237	1367	1433
1439	1447	1459	1511	1553	1579	1669	1709	1753	1759	1907	1949
1993	1997	2011	2063	2087	2099	2111	2137	2179	2207	2287	2309
2339	2417	2459	2503	2657	2677	2683	2693	2713	2749	2897	2963
3023	3089	3119	3229	3253	3259	3323	3371	3407	3449	3547	3559
3583	3623	3643	3833	3847	4007	4073	4091	4099	4139	4157	4211
4283	4337	4339	4349	4391	4463	4523	4549	4643	4679	4729	4787
4871	4909	4919	4933	5011	5021	5039	5059	5099	5179	5231	5297
5303	5309	5351	5387	5417	5431	5471	5503	5527	5653	5693	5711
5791	5827	5839	5939	6047	6067	6079	6089	6131	6199	6229	6247
6269	6277	6311	6343	6359	6389	6551	6599	6653	6793	6871	6947
6983	6991	7019	7079	7159	7213	7247	7283	7433	7487	7691	7817
7877	7949	7963	8017	8069	8089	8123	8147	8221	8243	8287	8291
8293	8423	8539	8573	8669	8699	8783	8863	8941	9043	9059	9067
9173	9209	9227	9277	9337	9341	9377	9419	9421	9533	9587	9643
9689	9739	9781	9887	10069	10079	10103	10163	10223	10243	10399	10499
10567	10607	10639	10729	10847	10883	10937	10939	10993	11087	11159	11261
11273	11351	11423	11437	11549	11579	11633	11789	11903	11981	12109	12113
12239	12457	12479	12539	12613	12619	12757	12791	12809	12823	12893	12911
12919	12953	13009	13049	13063	13093	13103	13183	13241	13327	13381	13451
13649	13687	13711	13723	13757	13759	13859	13883	13903	13963	13967	14051
14293	14543	14549	14753	14779	14783	14831	15173	15271	15443	15461	15629
15817	16139	16267	16339	16487	16547	16553	16631	16811	16963	16981	17027
17117	17167	17321	17351	17387	17519	17791	17987	18047	18077	18169	18287
18311	18379	18517	18521	18539	18679	18773	18859	19069	19213	19259	19379
19417	19427	19429	19447	19543	19727	19949	19979	20029	20063	20107	20123
20261	20333	20347	20399	20627	20719	20731	20747	20789	20849	20897	20981
20983	21059	21149	21163	21193	21221	21247	21269	21397	21467	21521	21821
21859	21937	21991	22129	22159	22171	22259	22381	22531	22543	22619	22679
23027	23099	23117	23269	23339	23357	23687	23887	23899	24007	24043	24107
24371	24419	24533	24683	24691	24749	24799	24877	25037	25243	25261	25303
25409	25463	25589	25603	25969	25999	26021	26099	26111	26119	26177	26263
26293	26371	26423	26539	26711	26813	26993	27017	27043	27211	27299	27479
27583	27673	27689	27749	27763	27779	27791	27851	27893	27983	27997	28069
28277	28319	28493	28573	28607	28619	28631	28649	28663	28753	28927	29179
29221	29339	29423	29429	29587	29663	29983	30113	30169	30259	30293	30307
30313	30643	30671	30841	30853	31247	31253	31319	31481	31531	31573	31723
31771	31891	31957	32069	32099	32143	32189	32299	32359	32363	32467	32587
32693	32717										