XI REUNION DE EDUCACION MATEMATICA

San Juan, 17 al 22 de octubre

Este año la XXXVIII Reunión Anual de Comunicaciones Científicas de la Unión Matemática Argentina y la XI Reunión de Educación Matemática tendrá lugar en la sede de la Universidad Nacional de San Juan. Esta es la primera vez que la Unión Matemática Argentina se reune en la ciudad de San Juan, donde se realizan este año los principales actos recordatorios del centenario de la muerte de Don Domingo Faustino Sarmiento. También, la comunidad matemática argentina celebra este año el centésimo aniversario del nacimiento de Don Julio Rey Pastor.

Continuando la experiencia iniciada el año pasado en Bahía Blanca se prevé el dictado de cursos de 12 horas de duración durante los tres primeros días, los cuales comenzarán el lunes 17 a la tarde. Estos se anunciarán próximamente. Durante la semana, los participantes tendrán la oportunidad de exponer sus trabajos en paneles y se invitará a algunos profesores a presentarlos, además, en comunicaciones de 20 minutos durante los días jueves y viernes. Los interesados deberán hacer llegar antes del 15 de agosto el trabajo completo, escrito a máquina a doble espacio y en papel tamaño carta, junto con un resumen en el formulario respectivo distribuído a través de las Secretarías Locales de la Unión Matemática Argentina, a:

GECYT - UMA
FaMAF
Universidad Nacional de Córdoba
Valparaíso y R. Martínez - 5000 Córdoba

Inscripción antes del 30/08/88: ₳ 70 para socios y ₳ 100 p/no socios.
Inscripción durante la reunión: ₳ 100 para socios y ₳ 140 p/no socios.

COMPETENCIA MATEMATICA ERNESTO PAENZA

Historia y características principales.

El fallecimiento prematuro de Ernesto Paenza, un ferviente promotor del desarrollo científico en la Argentina, ocurrido el 28 de agosto de 1985, es lo que ha motivado a su familia para la creación de la fundación que lleva su nombre.

Esta competencia es organizada y financiada por dicha Fundación, y cuenta con el auspicio de la Unión Matemática Argentina.

La competencia está abierta para todos los departamentos de Matemática de Universidades del país. En ella pueden inscribirse los alumnos regulares todavía no graduados a la fecha de realización de la prueba. Esta, es individual y no se permite ninguna consulta personal ni bibliográfica durante su desarrollo.

Los ejercicios son de relativa dificultad y está fuera de nuestra intención que algún participante logre el puntaje total. Se considera meritorio ya la obtención de puntaje por la resolución de algún ejercicio.

Es nuestra idea también que los alumnos participantes y profesores supervisores sigan pensando y resolviendo los problemas de la prueba en los días y/o semanas subsiguientes a la realización de la misma, *esta vez sólo por el placer y la satisfacción de resolverlos.*

El Comité Organizador establecerá un orden de méritos individual, de acuerdo con el puntaje obtenido en la prueba. Asimismo, y en base a estos datos, quedarán ordenadas también las instituciones, para lo que se sumarán los puntajes de sus 3 (tres) representantes mejor calificados.

Se otorgan 5 (cinco) premios individuales del primero al quinto en el orden de méritos. Ellos constan de una medalla, y, respectivamente, 1000, 800, 600, 400 y 200 australes de octubre de 1985 actualizados a octubre del año en curso. Además, los cinco siguientes en el orden de méritos reciben *mención honorable,* testimoniado en una medalla.

Todos los participantes que hayan obtenido por lo menos 5 (cinco) puntos (medio ejercicio) reciben un diploma testimonio de su participación y de la posición obtenida.

Las 10 primeras instituciones (siempre que hayan obtenido por lo menos 10 puntos) reciben una plaqueta testimonio de su participación y de la posición obtenida. Las tres primeras reciben 500 australes (actualizados de la misma manera que los premios individuales) cada una, por ejemplo, en forma de libros o revistas que soliciten oportunamente a la Fundación Paenza.

El Comité Organizador de la competencia es el siguiente: Presidente, Alberto P. Calderón; Vicepresidente Ejecutivo, Eduardo J. Dubuc; Asesores, Carlos Cabrelli, Alicia Dickenstein, Adrián Paenza, Carmen Sessa.

Aprovechamos esta oportunidad para invitar a toda institución que desee participar a comunicarse con nosotros. Aquellas que ya hayan participado serán conectadas automáticamente. Recordamos que un alumno que ya haya participado puede participar nuevamente, siempre que en el interín no se haya graduado.

Correspondencia a: Dr. Eduardo J. Dubuc
Vicepresidente Ejecutivo
Fundación ERNESTO PAENZA
Tucumán 1738 - 1°"A"
1050 - Capital Federal.

RESULTADOS DE LA SEGUNDA REALIZACION 1987.

Participaron 35 alumnos pertenecientes a 8 instituciones en todo el país.

El primer premio, 5000 australes, fue obtenido por *Esteban Gregorio Tabak*, de la *Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.*

El segundo premio, 4000 australes, fue obtenido por *Juan Pablo Rosseti*, de la *Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad Nacional de Córdoba.*

El tercer premio, 3000 australes, fue obtenido por *Gerardo Garbulsky* de la *Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.*

El cuarto premio, 2000 australes, fue obtenido por *Enzo Davi*, del *Instituto Balseiro, Bariloche.*

El quinto premio, 1000 australes, fue obtenido por *Pablo Enrique Coll* de la *Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.*

Cada uno de ellos recibe además una medalla testimonio.

Las cinco siguientes posiciones correspondieron a, ordenados por orden alfabético, *José Luis Belmonte*, de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, de la Universidad de Buenos Aires; *Daniel Fridlender*, de la Facultad de Matemática, Atronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba; *Eduardo Daniel Murmis*, de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires; *Daniel Penazzi*, de la Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba; *Oscar Samoilovich*, de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Cada uno de ellos recibe una medalla de *mención honorable*.

Los resultados por Institución, ordenados sumando los puntajes obtenidos por sus tres mejores participantes son los siguientes:

La primera y dos segundas:

1) Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.
2) Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba.
   Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires.

Cada una de ellas recibe un premio de 2500 australes.

Las tres siguientes instituciones son:

4) Instituto Balseiro. Bariloche.
5) Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Mar del Plata.
6) Universidad Nacional de Comahue.

La Universidad Nacional de Catamarca fue eliminada de la competencia de este año por irregularidades.

PROBLEMAS.

Fueron los siguientes:

Problema 1

Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define

$$r(n) = r_1(n) + r_2(n) + \ldots + r_n(n) = \sum_{j=1}^{n} r_j(n)$$

donde $r_j(n)$ denota el resto de la división de n por j.

Pruebe que existen infinitos valores de n para los cuales $r(n) = r(n-1)$.

Problema 2

Sea $E \subsetneq \mathbb{R}^2$ un conjunto no acotado *, que contiene un par de segmentos que forman una V. Demuestre entonces, que para todo número real $\alpha > 0$ existe un triángulo de área α cuyos 3 vértices pertenecen al conjunto E.

Problema 3

Se tienen dos octógonos regulares iguales. Se pretende numerar los vértices de ambos, de forma tal que para cualquiera de las 8 maneras de superponer los polígonos conservando la orientación, haya al menos un vértice que tenga el mismo número en ambos. Encuentre numeraciones que lo cumplan o pruebe que no es posible.

Problema 4

Se tiene una sucesión decreciente de números reales $\{x_n\}_{n>0}$ estrictamente positivos con $x_0 = 1$.

a) pruebe que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{x_o^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_k^2}{x_{k+1}} > 3{,}999$$

b) encuentre una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ que satisfaga las hipótesis del enunciado, para la cual

$$\frac{x_o^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{x_{n+1}} < 4, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Problema 5

Sea $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ una función con la siguiente propiedad: cualesquiera sean $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se verifica:

$$f(m+n) = f(m) + f(n)$$

ó

$$f(m+n) = f(m) + f(n) + 1$$

Si se sabe que $f(9999) = 3333$, calcule $f(1988)$.

Problema 6

Un móvil se mueve en línea recta con acelaración creciente desde el instante $t = 0$ hasta $t = T$.

Mostrar que su velocidad en $t = T/2$ no puede superar su velocidad promedio (o sea, la distancia recorrida dividida por el tiempo total T).

Problema 7

Se agrupan los primeros n^2 números naturales (o sea: $1, 2, 3, 4, \ldots, n^2$)

en n conjuntos de n elementos cada uno. Luego, se suman los números de cada conjunto y finalmente, se multiplican las sumas.

a) ¿cuál es el máximo valor posible de este producto?

b) ¿existen dos maneras distintas de distribuir los n^2 números para alcanzar máximo?

Problema 8

Se tienen n rectas en el plano, no paralelas dos a dos, y tales que nunca tres de ellas pasan por un mismo punto.

¿Cuántas regiones acotadas * del plano delimitan estas n rectas?

(*) Nota: Un subconjunto A del plano $\mathbb{R}^2$ se dice acotado si y sólo si está contenido en algún círculo.

SOLUCIONES.

Las soluciones que se encuentran a continuación fueron elegidas por el Comité Organizador entre las respuestas de los participantes. *Son aquellas que más nos gustaron*, además de ser correctas.

Los vectores luego del número del problema indican: la primera coordenada, el número de participantes que resolvieron esencialmente bien el problema. La segunda coordenada, el número de participantes que resolvieron esencialmente la "mitad o un poco más" del problema. La tercera coordenada, el número de participantes que resolvieron casos particulares, o algo conducente a una posible solución .

Problema 1 (6,0,6)

(solución de Eduardo Gabriel Murmis, de la Facultad de Ingeniería, UBA)

Puede verificarse que:

$$r_j(n-1) = \begin{cases} r_j(n)-1 & \forall j \mid r_j(n) \neq 0 \\ j-1 = j+r_j(n)-1 & \forall j \mid r_j(n) = 0 \end{cases}$$

Entonces:

$$r(n-1) = \sum_{j=1}^{n-1} r_j(n-1) + \sum_{k/n} K = \sum_{j=1}^{n-1} r_j(n)-(n-1) + \sum_{k/n} K$$

Pero como $r_n(n) = 0$,

$$\sum_{j=1}^{n-1} r_j(n) = \sum_{j=1}^{n} r_j(n) = r(n)$$

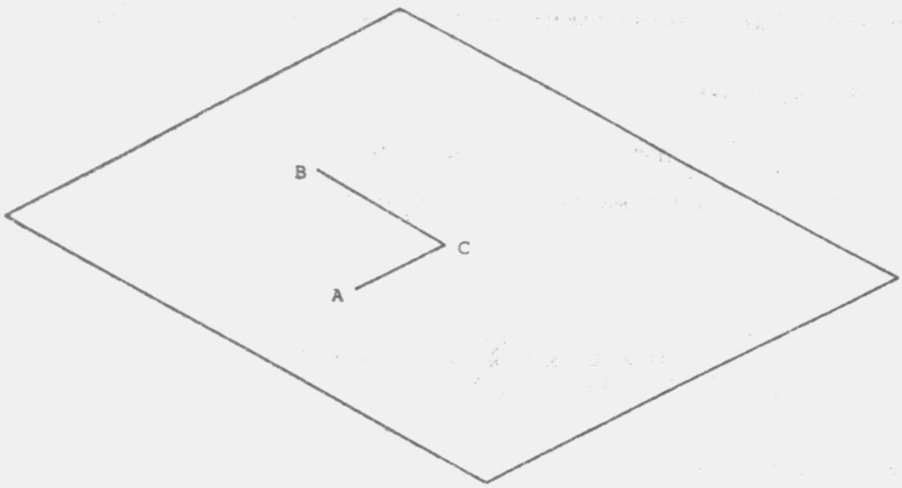
Luego $r(n) = r(n-1)$ si y sólo si $n-1 = \sum_{k/n} K$.

Lo que se verifica para todas las potencias de 2, pues $2^j-1 = \sum_{i=0}^{j-1} 2^i$.

Problema 2 (3,1,5)

(solución de Eduardo Gabriel Murmis, de la Facultad de Ingeniería, UBA)

Sean ABC los tres puntos extremos de la V. Consideremos el paralelogramo determinado por los pares de rectas que estána distancia $2\alpha/d(A,C)$ y $2\alpha/d(B,C)$ de los segmentos AC y BC respectivamente.

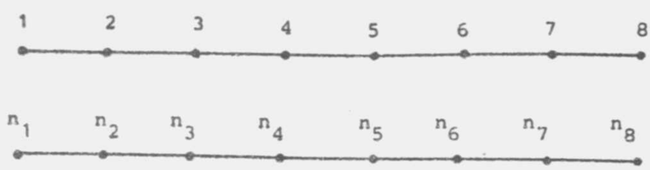


Sea D un punto de E situado fuera del paralelogramo. D forma con AC o con BC un triángulo propio de área mayor que α. Acercando el vértice C a A ó a B, según corresponda, se obtiene (teorema del valor medio) un triángulo de área α.

<u>Problema 3</u> (1,0,6)

(solución de José Lorenzano, del Instituto Balseiro, Bariloche)

Supongamos que existe una tal numeración. Podemos suponer que la numeración de un octógono es 1,2,3,4,5,6,7,8, y sea $n_1,n_2,n_3,n_4,n_5,n_6,n_7,n_8$ la numeración del otro. Desarrollando los octógonos tenemos:



Hay ocho posiciones posibles de colocar los polígonos, que corresponden a mover la tira $n_1,n_2,n_3,n_4,n_5,n_6,n_7,n_8$. Por ejemplo, moviéndose a la derecha un sitio, el n_1 queda debajo del 2, el n_2 del 3, etc., y el n_8 debajo del 1.

Diremos que n_k realiza la coincidencia si $k = n_k$.

Un mismo n_k no puede realizar la coincidencia en dos (o varias) posiciones distintas, lo que implica que en cada posición hay a lo sumo una coincidencia. De esto se sigue que los números (n_k-k) son todos distintos.

Además se tiene $-7 \leq n_k-k \leq 7$.

Veamos ahora que los números (n_k-k) son también todos distintos modulo 8. Tomemos dos, (n_k-k) y (n_i-i). Si ambos son del mismo signo está claro que son distintos. Si son de signo contrario e iguales modulo 8 se tendría $(n_k-k) = 8-(n_i-i)$, lo que significa que n_k y n_i realizan la coincidencia en la misma posición. Absurdo.

Los ocho números (n_k-k) son entonces todos distintos modulo 8, lo que muestra que $\sum\limits_k (n_k-k) = 4$ modulo 8. Por otro lado, está claro que $\sum\limits_k (n_k-k) = 0$. Absurdo. Luego, no existe una tal numeración.

<u>Problema 4</u> (0,2,5)

(solución del comité organizador)

Como $\dfrac{x_i}{x_{i+1}} > 1$ se tiene que:

$$\frac{x_o^2}{x_1} + \ldots + \frac{x_k^2}{x_{k+1}} = x_o \frac{x_o}{x_1} + \ldots + x_k \frac{x_k}{x_{k+1}} > x_o + \ldots + x_k$$

Luego puede suponerse que $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ converge, (en caso contrario el resultado es cierto), en particular, que $x_i \to 0$. Además, está claro que puede suponerse que la sucesión es estrictamente decreciente. Pongamos entonces $\alpha_i = x_i - x_{i+1}$. Se tiene $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = 1$ y $\frac{x_i}{\alpha_i} > 1$. Luego

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i^2}{x_{i+1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i^2}{x_i - \alpha_1} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot \frac{(x_{i/\alpha_i})^2}{(x_{i/\alpha_i}) - 1}$$

Sea $f : \mathbb{R}_{>1} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Se nota que f tiene un mínimo estricto en 2, con $f(2) = 4$. O sea $f(x) > 4$ $\forall x > 1$ y $f(x) = 0$ si $x = 2$. Luego, de (1) se obtiene:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{x_{i+1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \, f\left(\frac{x_i}{\alpha_i}\right) > 4 \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = 4,$$

valiendo la igualdad cuando $x_i = 2\alpha_i$. Es decir, $x_i = 2(x_i - x_{i+1})$, $x_{i+1} = \frac{x_i}{2}$, $x_i = \frac{1}{2^i}$ (recordar que $x_o = 1$).

Luego, como la suma de la serie es > 4, sumando suficientes términos se supera el valor $3{,}9999$. En el caso en que $x_i = \frac{1}{2^i}$, la serie suma 4, luego sus sumas parciales son siempre estrictamente menores que 4.

Problema 5 (3,2,6)

(solución de Esteban Gregorio Tabak, de la Facultad de Ingeniería, UBA)

Los cuatro primeros valores quedan determinados así:

$f(0) = 0$, si no, $f(n) > f(n+f(0)) > f(n)$.

$f(1) = 0$, si no $3333 = f(9999) > 9999\, f(1) > 3333$

$f(2) = 0$, si no $3333 = f(9999) > 4999\, f(2) + f(1) > 3333$

$f(3) = 1$ pues $3333\, f(3) < f(9999) < 3333\, f(3) + 3332$,

de la primera desigualdad resulta $f(3) < 1$, de la segunda, $f(3) > 1$.

Lema: Para $n < 3333$, $f(3n) = nf(3) = n$. En efecto, por inducción sobre n. Para $n = 0$, $f(3n) = f(0) = 0$. Si es válido para $n < h$:

$$f(3(h+1)) > f(3h) + f(3) = h+1$$

y
$$
\begin{aligned}
f(9999) &= f(3(h+1) + 9999-3(h+1)) > \\
&> f(3(h+1)) + f(9999-3(h+1)) > \\
&> f(3(h+1)) + (3333-(h+1))f(3) \\
&= f(3(h+1)) + 3333-(h+1)
\end{aligned}
$$

o sea $f(3h+1) < h+1$, con lo que queda probado el lema.

Como $1986 = 3\times 662$, y $1989 = 3\times 663$, se tiene:

$$662 = f(1986) < f(1988) < f(1989) = 663.$$

Tiene que ser $f(1988) = 662$, ya que, en caso contrario:

$$9999 = 5\times 1988 + 3\times 19 + 2 \text{ , se tendría:}$$

$$f(9999) > 5\times 663 + 19 = 3334, \text{ absurdo.}$$

Problema 6 (2,1,9)

(solución de Esteban Gregorio Tabak, de la Facultad de Ingeniería, UBA)

Sea $v(t)$ la velocidad, $a(t)$ la aceleración, $\bar{v}$ la velocidad media, y denotemos $v_o(t) = v(t) - v(0)$ y $b = v_o(T/2)/T_{/2}$.

Se tiene:

$$\bar{v} = \frac{1}{T}\int_o^T v(t)dt = v(0) + \frac{1}{T}\int_o^T v_o(t)dt$$

Pero:

$$\int_o^T v_o(t)dt = \int_o^{T/2} v_o(t)dt + \int_{T/2}^T v_o(t)dt =$$

$$= \int_o^{T/2} [bt-(bt-v_o(t))]dt + \int_{T/2}^T [bt+(v_o(t)-bt)]dt =$$

$$= \int_o^T bt\ dt + \int_{T/2}^T (v_o(t)-bt)dt - \int_o^{T/2} (bt-v_o(t))dt.$$

Pero $\int_o^T bt\ dt = \frac{bT^2}{2} = v_o(T/2)T$, por lo que para ver que $\bar{v} \geq v(T/2) = v(0) + v_o(T/2)$, basta probar que:

$$(1) \qquad \int_{T/2}^T (v_o(t)-bt)dt \geq \int_o^{T/2} (bt-v_o(t))dt$$

Demostraremos:

$$(2) \qquad \int_{T/2}^T (v_o(t)-bt)dt \geq \int_o^{T/2} (a(T/2)-b)t\ dt$$

$$(3) \qquad \int_o^{T/2} (bt-v_o(t))dt \leq \int_o^{T/2} (a(T/2)-b)t\ dt$$

con lo que la desigualdad (1) quedará demostrada.

(2).

Para $t > T/2$ se tiene $v_o(t) = v_o(T/2) + \int_{T/2}^{t} a(t)dt$, y como

$a(t) > a(T/2)$, $v_o(t) > v_o(T/2) + a(T/2)(t-T/2)$.

Entonces $\int_{T/2}^{T} (v_o(t)-bt)dt > \int_{T/2}^{T} (v_o(T/2) + a(T/2)(t-T/2)-bt)dt$,

y como $v_o(T/2) = b\,T/_2$, el miembro derecho queda:

$$\int_{T/2}^{T} (a(T/2)-b)(t-T/_2)dt = \int_{o}^{T/2} (a(T/2)-b)t\,dt,$$

lo que termina la demostración de (2).

(3).

Para $t < T/2$ se tiene $v_o(T/2) = v_o(t) + \int_{t}^{T/2} a(t)dt$, y como

$a(t) < a(T/2)$, $v_o(T/2) < v_o(t) + a(T/2)(T/_2-t)$.

Entonces $\int_{o}^{T/2} (bt-v_o(t))dt < \int_{o}^{T/2} (bt-v_o(T/2)+a(T/2)(T/_2-t))dt$, y como

$v_o(T/2) = b\,T/_2$, el miembro derecho queda:

$$\int_{o}^{T/2} (b-a(T/2))(t-T/2)dt = \int_{o}^{T/2} (a(T/2)-b)t\,dt,$$

lo que termina la demostración de (3).

<u>Problema 7</u> (2,2,4)

(Solución de Enzo Dari, del Instituto Balseiro, Bariloche)

Del hecho que la media geométrica es menor (o igual si todos los factores son iguales) que la media aritmética se sigue que el máximo valor posible se da cuando las sumas de los números de cada conjunto son todas iguales. Siempre es posible agrupar n^2 números de esta manera. En ese caso, el máximo valor posible está dado por:

$$\left[\sum_{i=1}^{n^2} i/n\right]^n = \left[1/n\,\frac{n^2(n^2+1)}{2}\right]^n = \left[\frac{n(n^2+1)}{2}\right]^n .$$

La forma de obtener los n conjuntos es la siguiente: Se ubican los n^2 números en forma creciente en un cuadrado de $n \times n$ y luego se toman las diagonales. Ilustramos:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Las diagonales son: {1,6,11,16}, {5,10,15,4}, {9,14,3,8} y {13,2,7,12}. Otra manera es tomando las otras diagonales, {13,10,7,4}, {9,6,3,16}, {5,2,15,12} y {1,14,11,8}. Todas las sumas dan 34.

Problema 8 (7,5,1)

(solución de Gerardo Garbulsky, de la F.C.E. y N., Universidad de Buenos Aires)

Cada vez que se agrega una nueva recta, ésta corta a las anteriores en puntos diferentes, quedando delimitada una región mas por cada par de puntos contiguos de corte. Si a_n $(n \geq 3)$ denota el número de regiones delimitadas por n rectas, se sigue entonces que $a_n = a_{n-1} + (n-2)$. Como $a_3 = 1$, se tiene $a_4 = 1+2$, $a_5 = 1+2+3$, y en general $a_n = \sum_{i=0}^{n-2} i$. O sea, $a_n = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$.

Agradecimientos.

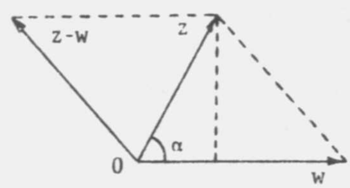
Las pruebas fueron corregidas por Alicia Dickenstein, Eduardo Dubuc, Susana Tesauri, Adrián Paenza, Carmen Sessa y Jorge Zilber. Toda la tarea de administración de datos, planillas e intercambio de correspondencia recayó sobre Marcelo Kofman. Angel Ramini se encargó de hacer llegar las pruebas a cada institución participante. La diagramación y mecanografía de la prueba y de esta comunicación fue hecha por Claudia Clemares. Los delegados responsables en cada institución fueron Cristina López, Jorge Adrover, Pablo Jacovkis, Guillermo Chiappe, Alfredo González, Guillermo Chiappe, Alicia Urroz de Dweerth y Adolfo Aguirre.

A todos ellos el comité organizador les agradece su colaboración.

LA FORMULA DE HERON: $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Enzo R. Gentile

Esta fórmula nos da el área A de un triángulo cuyos lados miden a, b y c. El valor p es el llamado *semiperímetro* $p = (a+b+c)/2$. Se la atribuye a Herón de Alejandría (siglos I o II a.d.J.C.). En esta Nota damos una demostración vectorial de este resultado. Con $\langle\ ,\ \rangle$ denotamos el producto escalar en $\mathbb{R}^2$. Sea T el triángulo cuyos lados son los vectores z y w tales que $|z| = a$, $|w| = b$. Es claro que el área está dada por $2A = |z||w| \operatorname{sen} \alpha$.



Dado que $\cos \alpha = \frac{\langle z,w \rangle}{|z||w|}$, se tiene

$$4A^2 = |z|^2|w|^2\left(1 - \frac{\langle z,w \rangle^2}{|z|^2 |w|^2}\right)$$

$$= a^2 b^2 - \langle z,w \rangle^2$$

Calculemos ahora $\langle z,w \rangle$. Se tiene, dado que $|z-w| = c$,

$$c^2 = |z-w|^2 = \langle z-w,z-w \rangle = a^2 + b^2 - 2 \langle z,w \rangle$$

Por lo tanto,

$$16A^2 = (4ab)^2 - (c^2-a^2-b^2)^2$$

$$= (2ab + (c^2 - (a^2+b^2)))\ (2ab - (c^2-(a^2+b^2)))$$

$$= (c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)$$

Entonces

$$A^2 = (p-a)(p-b)(p-c)p \quad \text{y dado que}$$

$$p-a = \frac{a+b+c-2a}{2} = \frac{b+c-a}{2} > 0, \ldots \text{ etc.}$$

Concluímos que $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Corolarios

i) Expresiones para las alturas del triángulo, $h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, etc.

ii) Si el triángulo es rectángulo en 0, $A = (p-a)(p-b)$.