# SISTEMAS DE NUMERACION Y REGLAS DE DIVISIBILIDAD

Oscar A. Cámpoli

## Una consideración general

Es indudable que en lo que respecta a sistemas de numeración, el romano es de lo más elemental posible. En efecto, es basicamente un sistema de "palotes" con algunas reglas de simplificación de los mismos:

$$\mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III},\ \underset{\mathrm{IV}}{\cancel{\mathrm{IIII}}},\ \underset{\mathrm{V}}{\cancel{\mathrm{IIIII}}},\ \mathrm{VI},\ \mathrm{VII},\ \mathrm{VIII},\ \underset{\mathrm{IX}}{\mathrm{V}\cancel{\mathrm{IIII}}},\ \underset{\mathrm{X}}{\mathrm{V}\cancel{\mathrm{IIIII}}},\ldots$$

Sin embargo, por muchas razones, este sistema no es de lo más práctico posible, en particular, en referencia a las reglas de divisibilidad que veremos más adelante y por supuesto que tampoco es práctico en lo que respecta a otras consideraciones probablemente más importantes aún, como ser, las reglas operativas de suma y multiplicación y sus respectivas operaciones inversas.

## La representación decimal

Así es que desde hace ya siglos se generalizó la escritura decimal de los números (tenemos diez dedos en las manos) y en consecuencia escribimos 5.782.433 que desde la escuela primaria nos enseñaron a leer de la siguiente manera: cinco millones setecientos ochenta y dos mil cuatrocientos treinta y tres. Esta lectura es una forma abreviada de otra lectura que también nos enseñaron en la escuela primaria:

3 unidades + 3 decenas + 4 centenas + 2 unidades de mil +
+ 8 decenas de mil + 7 centenas de mil + 5 unidades de millón

o también,

3 unidades + 3 unidades de 10 + 4 unidades de 100 + 2 unidades de 1000 + 8 unidades de 10.000 + 7 unidades de 100.000 + 5 unidades de 1.000.000

lo cual puede resumirse numéricamente como sigue:

$$5.782.433 = 3 + 3.10 + 4.10^2 + 2.10^3 + 8.10^4 + 7.10^5 + 5.10^6.$$

## Divisibilidad por 2 y otras similares

Una vez interpretada la escritura decimal de un número de esta manera, está claro que como 10 y todas sus potencias son divisibles por 2 entonces, *un número es divisible por 2 si y sólo si su cifra de las unidades es divisible por* 2, como aprendimos en la escuela primaria (luego, 5.782.433 ¡no es divisible por 2 !).

La misma consideración vale para discernir si un número es o no divisible por 5 o por 10: *un número es divisible por* 5 *(o por* 10*) si su cifra de las unidades es divisible por* 5 *(respectivamente por* 10*)*. Luego, 5.782.433 no es divisible por 5 y entonces tampoco puede serlo por 10.

## Divisibilidad por 4 y otras similares

Una pregunta que nos podemos hacer y contestar a continuación es cuando un número es divisible, por ejemplo, por 4. Está claro que $10^2$ y todas las potencias de 10 que le siguen son divisibles por 4 por lo tanto se sigue que: *un número es divisible por* 4 *si y sólo si la cifra de las unidades más diez veces la cifra de las decenas es divisible por* 4. En otras palabras *un número es divisible por* 4 *si y sólo si el número formado por los dos últimos dígitos del número que nos dieron es a su vez divisible por* 4. Por ejemplo, 5.782.433 es divisible por 4 si y sólo si 33 es divisible por 4 y como esto último es falso, se sigue que 5.782.433 no es divisible por 4.

Exáctamente del mismo modo y por las mismas razones se daría respuesta a la pregunta de cuando un número es divisible por 25, por 50 o por 100. De éstas, la única regla que es más generalmente recordada es la de divisibilidad por 100, ya que se puede reexpresar diciendo que: *un número es divisible por* 100 *si y sólo si sus dos últimas cifras son ceros* (ésta simplificación adicional, asociada naturalmente a la representación decimal de los números, la pondremos en perspectiva más adelante cuando consideremos otro tipo de representaciones no decimales).

<u>Divisibilidad por 3 y otras similares</u>

En este caso, para analizar una regla de divisibilidad por 3, comenzamos recordando la regla que nos enseñaron en la escuela primaria: *un número es divisible por* 3 *si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible por* 3. Por ejemplo, 5.782.433 es divisible por 3 si y sólo si $5 + 7 + 8 + 2 + 4 + 3 + 3 = 32$ es divisible por 3 y éste último es divisible por 3 si y sólo si $3 + 2 = 5$ es divisible por 3 lo que es claramente falso, por lo tanto concluímos que 5.782.433 no es divisible por 3. ¿Cómo explicamos la validez de esta regla?. Una explicación es la que intentamos a continuación, usando primero el ejemplo anterior y luego de manera general.

El número 10 no es divisible por 3 y el múltiplo de 3 más próximo a 10 es 9. Análogamente 99 es el múltiplo de 3 más próximo a $10^2$ 999 es el múltiplo de 3 más próximo a 10 y lo mismo ocurre con 9999, 99999 y 999999. De esta observación se sigue que el número 5.782.433 es divisible por 3 si y sólo si $5.10^6+ 7.10^5+8.10^4+2.10^3+4.10^2+3.10 +3$ es divisible por 3 y ésto es cierto si y sólo si

$$5.10^6 + 7.10^5 + 8.10^4 + 2.10^3 + 4.10^2 + 3.10 + 3 -$$
$$- 5.999999 - 7.99999 - 8.9999 - 2.999 - 4.99 - 3.9$$

es divisible por 3. Reagrupando y sacando factores comunes queda:

$$5(10^6-999999) + 7(10^5-99999) + 8(10^4-9999) + 2(10^3-999) +$$
$$+ 4(10^2-99) + 3.(10-9) + 3 = 5 + 7 + 8 + 2 + 4 + 3 + 3$$

que es precisamente la suma de los dígitos del número 5.782.433.

En resumen lo que hemos mostrado es que al número 5.782.433 podemos restarle un múltiplo de 3 de manera de obtener la suma de sus dígitos. Usando el lenguaje de congruencias introducido en el artículo de I. Dotti y A. García (ver [1]) esto se expresa diciendo que 5.782.433 es congruente a 5 + 7 + 8 + 2 + 4 + 3 + 3 módulo 3 y por lo tanto, uno es divisible por 3 si y sólo si el otro lo es. De esta manera hemos reducido drásticamente el número bajo consideración.

Lo que hemos hecho en este ejemplo puede fácilmente generalizarse como sigue: se demuestra que el múltiplo de 3 más próximo a $10^r$ es 99...9 (r-1 veces) y así, como en el ejemplo, dado un número cualquiera, es fácil dar un múltiplo de 3 de manera que la diferencia entre los dos sea precisamente la suma de los dígitos del número dado (ver el artículo de I. Dotti y A. García citado anteriormente) y de allí surge la regla mencionada al comienzo. Usando el lenguaje de congruencias, se demuestra que todo número es congruente a la suma de sus dígitos módulo 3 y esto significa que tanto el número dado como la suma de sus dígitos tienen el mismo resto en la división por 3, con la consiguiente reducción en el número en consideración y la ventaja adicional de que en caso de que la suma de los dígitos sea un número relativamente grande, podemos aplicar nuevamente la regla y así sucesivamente hasta lograr (¡seguramente!) un número de un sólo dígito, caso en el que ya no es necesario efectuar ninguna división.

Las mismas consideraciones, teniendo en cuenta que los números 9, 99, 999, 9999,... etc. son divisibles por 9 nos llevan a la también conocida regla de divisibilidad por 9 (aunque no tan usada por ser 9 divisible por 3): *un número es divisible por* 9 *si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible por* 9.

## Otras reglas de divisibilidad

Supongamos ahora que queremos saber si el número 5.782.433 es o no divisible por 7 (sin hacer la división euclídea) y en base a esto obtener alguna respuesta general útil.

Recordemos que hemos escrito,

$$5.782.433 = 5.10^6 + 7.10^5 + 8.10^4 + 2.10^3 + 4.10^2 + 3.10 + 3$$

A continuación razonamos como en el caso anterior. El múltiplo de 7 más próximo a 10 es claramente 7. El múltiplo de 7 más próximo a $10^2 = 100$ es $7.14 = 98$. Hay muchas formas de obtener el múltiplo de 7 más próximo a $10^3$ . Veamos una forma,

$$10^3 = 10.10^2$$

$$10.10^2 - 10.98 = 10.2$$

$$10.2 - 7.2 = 6$$

$$6 - 7 = -1$$

Luego,

$$10^3 - 7.(10.14 + 2 + 1) = -1$$

Análogamente,

$$10^4 - 7.(10.143 - 1) = -3$$

$$10^5 - 7.(10.1429 - 4) = -2$$

$$10^6 - 7.(10.14286 - 3) = 1$$

Esto muestra que 5.782.433 es divisible por 7 si y sólo si

$$3 + 3.3 + 4.2 + 2.(-1) + 8.(-3) + 7.(-2) + 5 = -15$$

es divisible por 7 y como esto último es claramente falso el número 5.782.433 no es tampoco divisible por 7.

Como en realidad sólo nos hace falta conocer lo que nos queda cuando a la respectiva potencia de 10 le restamos el múltiplo de 7 más próximo, lo que necesitamos conocer son todos los restos en la división por 7 de las sucesivas potencias de 10, y para ésto es muy útil tener (¡de nuevo!), el lenguaje y las propiedades de las congruencias que ya mencionáramos. Usando esta herramienta obtendríamos la siguiente regla de divisibilidad por 7 (suficientemente complicada como para que no la recordemos, ¡si alguna vez la aprendimos!): *un número es divisible por 7 si y sólo si su cifra de las unidades, más tres veces su cifra de las decenas, más dos veces su cifra de las centenas, menos su cifra de las unidades de mil, menos tres veces su cifra de las decenas de mil, menos dos veces su cifra de las centenas de mil, más su cifra de unidades de millón, más tres veces su cifra de las decenas de millón ... etc.* (ahora los factores de las cifras se repiten cicl1camente) *es divisible por 7.*

Reglas de divisibilidad de este tipo podemos obtener de forma parecida, para cualquier número natural con ciclos más o menos largos de factores, dependiendo del número elegido. Esto influye de manera decisiva en la utilidad final de la regla de divisibilidad.

Antes de terminar esta sección, no podemos dejar de mencionar una regla que muchos sí recordaran de la escuela primaria, esto es, la regla de divisibilidad por 11. Esta dice que, *un número es divisible por 11 si y sólo si la suma alternada de sus dígitos es divisible por 11* y esto se deduce de una consideración como la anterior nada más que con un ciclo muy reducido y simple de factores que son 1 y -1 ya que:

$10 - 11 = -1$

$10^2 - 11.9 = 1$

$10^3 - 11.91 = -1$

... ... ... ...

... ... ... ...

Otros sistemas de numeración

Diferente sería la situación, con respecto a las reglas de divisibilidad, si usáramos una escritura en otra base distinta de la decimal. Con el advenimiento de la era de la computación, se incrementó grandemente el interés por la escritura binaria, esto es, usando sólo dos símbolos, generalmente 0 y 1 , y con el mismo significado para ambos que en la escritura decimal. En este sentido, ¿cual sería la escritura binaria de 5.782.433?. Para dar una respuesta a esta pregunta, nos proponemos escribir dicho número como una suma de sucesivas potencias de 2 (antes eran sucesivas potencias de 10) por "dígitos" binarios 0 y 1. Así, efectuando sucesivas divisiones obtenemos:

$$\begin{aligned} 5.782.433 &= 1 + 5.782.432 \\ &= 1 + 2^5.180701 \\ &= 1 + 2^5(1 + 180700) \\ &= 1 + 2^5(1 + 2^2.45175) \\ &= 1 + 2^5(1 + 2^2(1 + 45174)) \end{aligned}$$

Continuando con este procedimiento tendremos,

$$5.782.433 = 1 + 2^5 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{11} + 2^{12} + 2^{13} + 2^{19} + 2^{20} + 2^{22}$$

Entonces, la escritura binaria sería,

10110000011101110100001

En este momento conviene destacar una forma de calcular, de mane ra simple, con ayuda de una minicomputadora, la escritura binaria de un número: se calcula la mayor potencia de 2 por defecto, se hace la diferencia, se calcula ahora la mayor potencia de 2 por defecto respecto a esta diferencia y se hace la diferencia entre esta nueva potencia y la diferencia anterior y así sucesivamente hasta terminar.

En escritura binaria es claro cual es la regla de divisibilidad por 2 (vale la pena destacar que 2 en escritura binaria se escribe 10): *un número en escritura binaria es divisible por 2 (o sea 10 en binario) si y sólo si termina en cero* (es decir, la misma regla que en el caso decimal para la divisibilidad por 10 y por las mismas razones). Análogamente, se obtienen reglas para la divisibilidad por 4, 8, etc.

Teniendo en cuenta que,

$$2^2 - 3 = 1$$
$$2^3 - 9 = -1$$
$$2^4 - 15 = 1$$
$$2^5 - 30 = 2$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

haciendo un razonamiento como en el caso decimal, podemos deducir una regla de divisibilidad por 3 (que en binario se escribe 11) para un número en escritura binaria: *un número en escritura binaria es divisible por 3 si y sólo si la suma alternada de sus "dígitos" da como resultado un número divisible por 3* (¡comparar esta regla con la del 11 en escritura decimal!). En el ejemplo tendremos,

1011000001110111010000 1

es divisible por 3 si y sólo si -1 es divisible por 3, lo que es claramente falso.

En escritura decimal, la regla de divisibilidad por 5 era muy simple. No es tan así en escritura binaria. Una regla de divisibilidad por 5 (= 101 en binario) sería como sigue: *un número en escritura binaria es divisible por 5 si y sólo si su "dígito" de las unidades más el doble del siguiente, menos el siguiente, menos el doble del siguiente, más el siguiente, más el doble del siguiente... da como resultado un número divisible por* 5. Una justificación de este hecho comenzaría de nuevo por notar que,

$$2^0 = 1$$
$$2^1 = 2$$
$$2^2 - 5 = -1$$
$$2^3 - 5.2 = -2$$
$$2^4 - 5.3 = 1$$
$$2^5 - 5.6 = 2$$

... ... ...

... ... ...

... ... ...

## Comentario final

Es claro, después de todo lo anterior, que sería muy simple una regla de divisibilidad por 7, si usáramos a 7 como base de nuestra escritura. Sin embargo, en esta base, como en cualquier otra más chica, serían complicadas las reglas de divisibilidad por otros números.

Para tener la mayor cantidad posible de reglas de divisibilidad de facil uso, deberíamos usar como base de escritura, un número que tuviera muchos divisores como podría ser 2.3.5.7.11.13 = 30030. Lástima que en este caso necesitaríamos 30030 símbolos para escribir los números y esta cantidad de símbolos no sería fácilmente recordable. En este sentido, está claro que con la elección de 10 no nos fue precisamente mal.

Referencia.

1. I. Dotti y A. García, Algoritmo de Euclídes y algunas aplicaciones, Revista de Educación Matemática, Vol. 2 N° 3, 1986, pp. 3-17.

Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba
Ciudad Universitaria - 5032 Córdoba.