SOLUCIONES ENVIADAS

Ejercicio 1, Vol. 2 N° 1. Una maestra realiza una encuesta en su grado para saber las preferencias de sus alumnos entre la gramática, la aritmética o la historia. Después que cada alumno elige la materia de su preferencia, la maestra observa que hay un número primo diferente de alumnos que prefieren cada asignatura. Además, si se multiplica el número de interesados en aritmética por la suma de los interesandos en gramática o aritmética y se resta 120 resulta el número de interesados en historia. ¿Cuántos alumnos hay en cada grupo?

La siguiente solución fue enviada por Raúl D. Katz - Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario.

Sean, g = número de alumnos que prefieren gramática, a = número de alumnos que prefieren aritmética y h = número de alumnos que prefieren historia. El problema consiste en determinar tres números primos positivos y diferentes entre si, que verifican la condición $a.(g+a) - 120 = h$.

1) $a \neq 2$. De lo contrario h es un número par. Como además es primo, resulta $h = 2$ y en consecuencia no se cumple la condición $h \neq a$.

2) Si $a \neq 2$ entonces $g = 2$. De lo contrario $g + a$ es un número par por ser suma de números primos diferentes a dos y por lo tanto $h = a.(g+a) - 120$ es un número par. Como h debe ser primo resulta $h = 2$. Para $h = 2$ tenemos $a.(g+a) = 122$, de donde resulta $a = 2$ y $g = 59$. Esto contradice la hipótesis $a \neq 2$.

3) Entonces, si $g = 2$ se tiene la ecuación de segundo grado en la incognita a: $a^2 + 2a - 120 - h = 0$. Esta ecuación admite las raíces

$$a = -1 \pm \sqrt{121 + h}$$

De donde resulta la solución del problema: $h = 23$, $a = 11$ y $g = 2$.

Ejercicio 2, Vol. 2 N° 3. Halle tres números enteros consecutivos tales que si se suman las seis fracciones simples asociadas se obtiene un número entero.

La siguiente solución fue enviada por Raúl D. Katz - Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario.

El problema consiste en determinar $n \in Z-\{0,-1,-2\}$ que verifique la siguiente condición

$$\frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n} + \frac{n}{n+2} + \frac{n+2}{n} + \frac{n+1}{n+2} + \frac{n+2}{n+1} = k \in Z$$

o equivalentemente,

$$1 - \frac{1}{n+1} + 1 + \frac{1}{n} + 1 - \frac{2}{n+2} + 1 + \frac{2}{n} + 1 - \frac{1}{n+2} + 1 + \frac{1}{n+1} =$$

$$= 6 + \frac{3}{n} - \frac{3}{n+2} = 6\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) = k \in Z.$$

Si denotamos $a_n = \frac{1}{n(n+2)}$ es inmediato ver que para todo $n \in Z - \{0,-1,-2\}$ se tiene, $0 < a_n \leq a = \frac{1}{3}$. En consecuencia el entero k verifica $6 < k \leq 8$.

Ahora, $k = 7$ si y sólo si $n(n+2) = 6$, esta ecuación no admite soluciones enteras. Por otro lado, $k = 8$ si y sólo si $n(n+2) = 3$, esta ecuación tiene como solución $n = 1$ y $n = -3$. En consecuencia, los números enteros que satisfacen las condiciones del problema son: 1, 2, 3 y -1, -2, -3.

Ejercicio 4, Vol. 2 N° 3. En un grupo de 100 alumnos a 85 de ellos les gusta el futbol y a 80 el basquet. Además a 75 les gusta correr y a 70 nadar. ¿Cuál es el número mínimo de alumnos a los que les agradan las cuatro actividades?

La siguiente solución fue enviada por Raúl D. Katz - Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario.

Sean, F = conjunto de alumnos que gustan del futbol, B = conjunto de alumnos que gustan del basquet, C = conjunto de alumnos que gustan correr y N = conjunto de alumnos que gustan nadar. Tenemos, $n(F) = 85$, $n(B) = 80$, $n(C) = 75$ y $n(N) = 70$. Ahora

$$n(F \cap B \cap C \cap N) = 100 - n(\overline{F \cap B \cap C \cap N}) = 100 - n(\overline{F} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \cup \overline{N})$$

$$n_{min}(F \cap B \cap C \cap N) = 100 - n_{max}(\overline{F} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \cup \overline{N})$$

$$= 100 - (15+20+25+30) = 10.$$

Entonces, $n(\overline{F} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \cup \overline{N})$ es máximo cuando los conjuntos $\overline{F}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ y $\overline{N}$ son disjuntos dos ados.