ALGUNAS MOTIVACIONES HISTORICAS EN LA TEORIA DE GRAFOS

Raúl A. Chiappa

Nuestro propósito es el de referirnos a algunos problemas cuya resolución llevó a introducir o utilizar conceptos que ahora se incluyen en la Teoría de Grafos y dar así una muy somera introducción a la misma. Ella permite abordar el estudio de cuestiones muy diversas, algunas con origen en meros pasatiempos pero otras en importantes y variadas preguntas de la ciencia o la técnica. Precisamente, es ésta una de las razones del ímpetu y desarrollo que la teoría presenta actualmente. Puede tomársela como ejemplo de la utilidad del proceso de abstracción y síntesis -propio del quehacer matemático- que del análisis de diferentes casos particulares infiere una estructura fundamental que los comprende y unifica.

Suele convenirse que la Teoría de Grafos surgió como disciplina autónoma en 1936 con la publicación del libre de Konig (10), quien reunió y sistematizó en un todo orgánico numerosos resultados obtenidos en trabajos anteriores sin aparente conexión entre sí. Previamente, en 1922, había sido estudiada como parte de la topología combinatoria por Veblen. Algunas muy breves referencias al respecto pueden verse en Harary (4 - pág. 7).

Muchas situaciones de la vida real pueden ser esquematizadas o descriptas, al menos en primera aproximación, por medio de diagramas constituídos por puntos (vértices-nodos) y líneas que conecten algunos de sus pares o un vértice consigo mismo. Obviamente, en ellos sólo interesa cuales son los vértices conectados y no donde están ubicados o la forma que se asigna a la línea que los une. Estos esquemas, que facilitan la comprensión del problema a resolver, aparecen frecuentemente en disciplinas dispares bajo nombres diversos, a saber: redes (ingeniería, economía): sociograma (psicología): organigrama (economía, planificación); diagramas de flujo (programación); diagramas de estado (informática); estructura molecular (química); etc. Según indica Wilson (14) el primero en designarlos "grafos" fue Sylvester en 1878 al publicar sus resultados sobre teoría de invariantes en química.

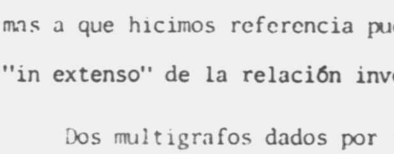
Notemos que la elección de un "grafo" como esquema adecuado de la situación a estudiar suele ser fundamental y no siempre inmediata a partir de los datos. En general, para construirlo será necesario tener un buen conocimiento del problema. Esta "información exterior" es la que permitirá, además una interpretación fructífera de los resultados obtenidos por aplicación de la teoría que nos ocupa.

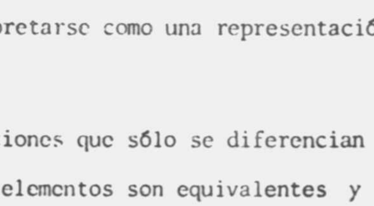
En algunas de las cuestiones a considerar puede interesar el orden en que se dan, conectan o ligan los elementos de cada par; por ejemplo: A es superior jerárquico de B; A es anterior a B. En otras, en cambio, puede suceder que dicho orden no exista o no interese; por ejemplo: A es amigo de B; A es contemporáneo de B. Esto lleva al estudio de "nociones orientadas o dirigidas" y al de "nociones no dirigidas". En general, pero no siempre, a cada noción dirigida corresponde otra no dirigida. Además puede ser que para un problema dado quepa considerar a cada elemento ligado consigo mismo o con otros por a lo sumo una relación o bien, conectados por varias. Así por ejemplo, situaciones que pueden o no ser simultáneas; ciudades conectadas por redes viales, telefónicas, férreas y radiales. Convendremos en que para precisar a cual de las situaciones indicadas nos referimos, las correspondientes configuraciones se dirán -en el caso no dirigido- grafo si hay a lo sumo una forma de conectar directamente un vértice consigo mismo o con otros y multigrafo en el caso general. Análogamente, para el caso dirigido diremos digrafo o multidigrafo.

La forma más habitual de introducir dichos conceptos es la siguiente: Un *multidigrafo* (*multigrafo*) es un par $G = (V, U)$ donde $V \neq \phi$ es su conjunto de *vértices* y U es una familia de pares ordenados (no ordenados) de vértices -no necesariamente distintos entre sí-. Los elementos de U se dicen *arcos* (*aristas*). Si cada arco (arista) está incluído a lo sumo una vez en la familia U entonces G se dice *digrafo* (*grafo*). Cada arco (x,y) o arista [x,y] con x = y se dice *bucle*. Si x ≠ y [x,y] = {x,y} ; caso contrario [x,x] = {x}, es decir las aristas pueden identificarse con conjuntos de dos o de un vértice. Un multidigrafo (multigrafo) G se dice de *orden* n si contiene n vértices y *finito* si ambos V y U son finitos. A veces es conveniente admitir V = ϕ y en tal caso G se dice *vacío* o *nulo*. La substitución de cada arco (x,y) por una arista [x,y] permite aplicar nociones no dirigidas en multidigrafos. Análogamente, el reemplazo de cada arista [x,y] por un par de arcos opuestos (x,y); (y,x) permite aplicar nociones dirigidas en multigrafos.

Se demuestra que todo multigrafo finito G puede ser representado por diagramas constituídos de vértices y arcos de curvas contínuas con sólo sus dos extremos incidentes en vértices. Para multidigrafos debe elegirse además una orientación o sentido de recorrido en dichas curvas. Estos esquemas constituyen una *representación topológica* o *geométrica* de G y no están unívocamente determinadas. Notemos que toda relación binaria (relación binaria simétrica) definida sobre un conjunto X puede identificarse con un digrafo (grafo) cuyo conjunto de vértices es X. Si X es finito los esquemas a que hicimos referencia pueden interpretarse como una representación "in extenso" de la relación involucrada.

Dos multigrafos dados por representaciones que sólo se diferencian en la designación o en la disposición de sus elementos son equivalentes y se dicen "isomorfos" Tal el caso de los siguientes G_1 y G_2





Frecuentemente, las denominaciones de los conceptos que estudia la Teoría de Grafos están inspiradas en su correspondiente significado en la representación topológica. Pero debe observarse que, lamentablemente, la terminología utilizada por los distintos autores dista mucho de ser uniforme. No sólo una misma noción suele recibir nombres distintos sino que a veces un mismo vocablo designa conceptos diferentes.

Las representaciones geométricas de un multigrafo (multidigrafo) G sólo son útiles y manejables si el número de elementos a considerar es reducido. Caso contrario G deberá darse por medio de listas, tablas, matrices, etc. Esto lleva al análisis de las conveniencias relativas entre las diferentes formas de definirlo. La elección de la representación adoptada puede depender del problema a estudiar.

Creemos oportuno destacar que los resultados teóricos y las consecuencias más interesantes se obtienen al considerar "grafos valuados" o "grafos etiquetados", es decir, grafos a cuyos elementos se han asignado "valores" o "etiquetas". Así por ejemplo para determinadas aplicaciones puede ser necesario asociar a los elementos del grafo nombres, valores, símbolos, secuencias de símbolos, etc. Los valores pueden significar costo, tiempo, capacidad, distancia, índice de eficiencia o de confiabilidad, etc.

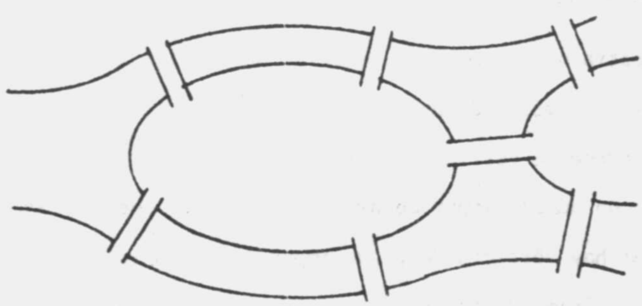
Análogamente para el caso dirigido. Notemos que si bien los esquemas G_1 y G_2 dados anteriormente definen un mismo grafo ellos deben considerarse diferentes si interesa además la designación de sus vértices. Es decir G_1 y G_2 son grafos etiquetados distintos.

A continuación describiremos cuatro problemas clásicos que llevaron al estudio de algunos conceptos esenciales de esta teoría. Un enfoque similar se ha desarrollado en el Capítulo 1 de Toranzos (13) y en el de Harary (4). Por otra parte, referencias a los mismos y a otros resultados obtenidos ya en este siglo se incluyen en las revisiones históricas de Harary (5), (6). Para mayores precisiones y abundantes referencias bibliográficas puede verse Wilson (14) o Biggs, Lloyd y Wilson (2). En el Capí tulo 1 de (7) se consideran las mismas cuestiones a las que nos referiremos y se dan además varias propiedades de los conceptos que les están asociados. Para una mayor información y fundamentalmente para una visión más general de los temas que incluye la Teoría de Grafos nos permitimos agregar a las obras ya citadas las de Berge (1); Kaufmann (8), (9) y Busacker-Saaty (3). En la Parte II de (3) se da una amplia variedad de situaciones que pueden ser resueltas aplicando nociones propias de esta teoría.

PROBLEMA EULERIANO

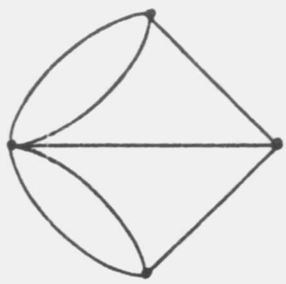
Es el primero, en orden cronológico, de los problemas resueltos con métodos ahora incluídos en el estudio de los grafos. Data de 1736 cuando L. Euler (1707-1783) publica en las Actas de la Academia de San Petersburgo una memoria en la cual estudia y resuelve, por la negativa, el "problema de los puentes de Konigsberg". La misma parece haber sido casi ignorada hasta 1851 en que se publicó traducida al francés.

La Ciudad de Konigsberg (hoy Kaliningrado) en Prusia es atravesada por el Río Pregel. Sus márgenes estaban conectadas entre sí y con las de la Isla Kheiphof por siete puentes según se indica a continuación:



La siguiente pregunta inquietaba a los habitantes de la ciudad, *¿es posible efectuar un paseo a pie tal que utilizando exactamente una vez cada uno de los puentes se vuelva al punto inicial?*

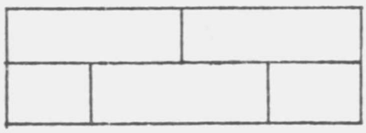
Euler observó que la enumeración de todos los casos posibles llevaría a un proceso tedioso y analizó la factibilidad del paseo atendiendo al número de veces que en tal caso se debería volver a cada una de las riberas. Consideró un caso general y dedujo condiciones necesarias para que un tal recorrido fuera posible. Sólo esbozó como demostrar que ellas erán también suficientes. Siguiendo su razonamiento convendremos en representar por un vértice cada una de las riberas y por aristas los puentes que las unen. Se obtiene así el multigrafo



Puede verificarse que la posibilidad de efectuar el paseo de referencia equivale a la de poder dibujar el diagrama anterior de un solo trazo, sin levantar el lápiz, sin pasar dos veces por una misma arista y volviendo al punto inicial. Esto no es factible y tampoco lo es aún cuando no se pida volver al punto inicial.

Se demuestra que es posible recorrer un multigrafo conexo G utilizando exáctamente una vez cada una de sus aristas y volver al punto incial si y sólo si G carece de vértices de grado impar, es decir de vértices en los cuales incide un número impar de aristas, supuesto que los bucles se cuentan doble. Si hay vértices de grado impar (siempre los hay en cantidad par) el número mínimo de recorridos necesarios para cubrir G es la mitad del número de vértices de grado impar; éstos serán extremos de los recorridos en cuestión.

Según vimos el problema euleriano está vinculado con el de las figuras unicursales, esto es, con las que pueden ser recorridas de un solo trazo sin repetir segmentos. También está presente en el "juego del laberinto" y en el antigüo entretenimiento siguiente: *Trazar una curva que intersecte una única vez, en un punto interior, cada uno de los 16 segmentos del siguiente dibujo:*



El concepto de recorrido euleriano permite ver que tal trazado no es posible y que la figura precedente no es unicursal. Otros ejemplos pueden verse en (11 - Cap. VIII). Un análisis más detallado del problema euleriano y de otros relacionados con él puede hallarse en (12 - Cap. IX). Una generalización de la situación considerada lleva al "problema del cartero" que consiste en determinar en un grafo valuado un recorrido de mínima longitud y tal que cada arista sea recorrida al menos una vez.

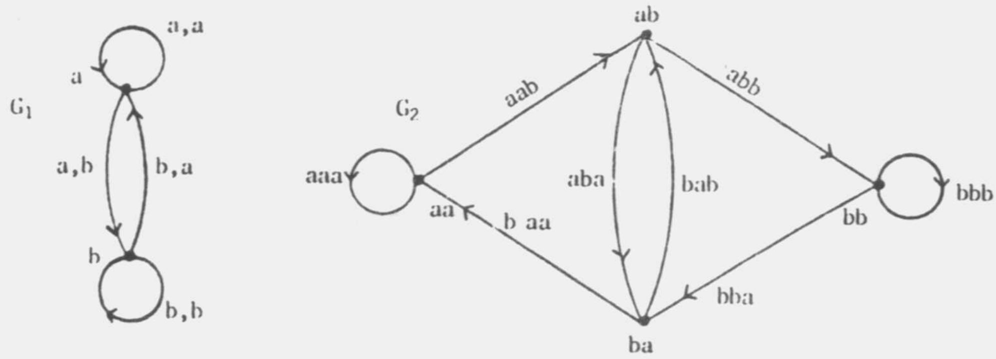
La noción análoga a la anterior, para el caso dirigido, permite demostrar elegantemente que el siguiente problema siempre tiene solución:

Dado un conjunto de h *símbolos (o alfabeto de* h *letras) determinar una sucesión que contenga, como subsucesión, exáctamente una vez cada una de las* h^m *sucesiones de* m *símbolos (o palabras de* m *letras) posibles de construir.*

Si $h = m = 2$ y los símbolos son a ; b la única solución -a menos de permutación circular- es la sucesión: a, a, b, b, a. Es claro que en ella se encuentran, como subsucesión, exáctamente una vez cada una de las palabras a,a / a,b / b,b / b,a . Si $h = 2$ y $m = 3$ las dos únicas soluciones -a menos de permutación circular- son:

a, a, a, b, b, b, a, b, a, a, / a, a, a, b, a, b, b, b, a, a .

Para constuirlas basta considerar, respectivamente, los siguientes digrafos y determinar en ellos un recorrido que utilizando exáctamente una vez cada uno de los arcos y respetando las respectivas orientaciones vuelva al punto inicial.



En forma similar puede procederse para el caso general eligiendo como vértices las h^{m-1} "palabras" con m-1 "letras" y un arco (x,y) -no necesariamente $x \neq y$- cuando las m-2 últimas letras de x coinciden -ordenadamente- con las m-2 primeras de y. Se demuestra que el número de soluciones es $h^{-m}.(h!)^e$ donde $e = h^{m-1}$. De acuerdo con nuestro conocimiento el problema fue tratado por primera vez en 1894, pero en términos de digrafos recién en 1946.

ARBOLES

Una centuria después de Euler y con el objeto de resolver los sistemas de ecuaciones lineales que vinculan potenciales con intensidades de corrientes en redes eléctricas G. Kirchhoff (1824-1887) asoció a cada una de éstas un diagrama que la esquematizaba (el grafo de la red). En 1847 mostró que para resolver el sistema no era necesario considerar separadamente los ciclos sino que bastaba con determinar un "árbol maximal" y un conjunto de ciclos linealmente independientes. Esta idea fructífera fue luego utilizada también en otras disciplinas. Kirchhoff demostró además que el número de árboles maximales en grafos etiquetados está dado por el valor común que toman los cofactores de una matriz singular construída ad-hoc. Notemos que al calcular dicho número puede suceder que árboles isomorfos deban contarse como árboles etiquetados distintos.

La noción "árbol" -que es quizás la más importante de las estructuras no lineales utilizadas en lagoritmos- fue redescubierta por A. Cayley (1831-1895) en el transcurso de sus investigaciones para determinar el número de isómeros de hidrocarburos saturados con enlace simple (los de la serie parafínica o alcanos) $C_n H_{2n+2}$, donde n es el número de átomos de carbono. En 1857 publicó un importante trabajo en el cual bautizó a la noción que nos ocupa con el término usado actualmente y dió una fórmula que permite calcular el número de árboles con un vértice distinguido. En términos de grafos el problema abordado por Cayley era el de determinar el número de árboles (sin vértice distinguido) con n vértices de grado o valencia cuatro y 2n + 2 de grado uno. Haciendo caso omiso de los ángulos que forman en el espacio los enlaces entre átomos cabe la siguiente representación plana de dichas moléculas (árboles) correspondientes a n = 1,2,3.

```
           H                     H   H                      H   H   H
           |                     |   |                      |   |   |
metano   H-C-H         etano   H-C - C-H       propano   H- C - C - C -H
           |                     |   |                      |   |   |
           H                     H   H                      H   H   H
```

Si $n \geq 4$ existen isómeros, esto es moléculas con igual número de átomos de cada elemento pero con diferentes propiedades físico-químicas. Para n = 4 y omitiendo indicar los átomos de hidrógeno, las dos substancias existentes son:

```
          |   |   |   |                        |   |   |
butano  - C - C - C - C -         isobutano  - C - C - C -
          |   |   |   |                        |   |   |
                                                   C
                                                  /|\
```

El problema combinatorio a resolver es difícil y Cayley logró su objetivo recién en 1874. Posteriormente fueron encarados trabajos similares para otras clases de compuestos.

En 1860 Borchardt dedujo que el número de posibles árboles etiquetados con n vértices (se cuentan reiteradas veces árboles isomorfos) es n^{n-2}. Una nueva deducción fue dada por Cayley en 1889. Este resultado que fue luego redescubierto y probado de diversas maneras puede considerarse implícitamente demostrado por Kirchhoff. Basta aplicar su método a la matriz de adyacencia del grafo completo de n vértices, en él cada vértice es adyacente de todos los restantes. Ignorando los trabajos anteriores y llevado por consideraciones puramente matemáticas Jordan los estudió en 1869. Poco después Sylvester, amigo de Cayley y también interesado en química, afirmó que Jordan sin sospecharlo había colaborado con la química moderna.

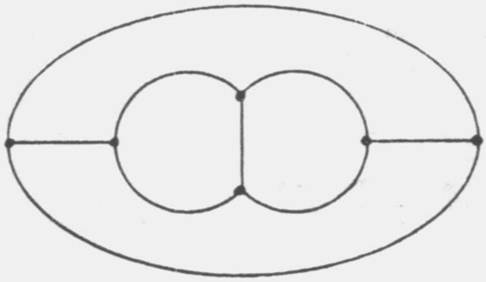
En el libro The Art of Computer Programming de D. Knuth se denomina "árbol libre" a lo que hemos llamado "árbol" y se usa este vocablo para designar otra noción estrechamente ligada con la anterior. Allí se las estudia, principalmente en relación con sus aplicaciones en informática, y se dan algunas referencias históricas. Otras pueden hallarse en König (10 - pág. 47-48); Rouse-Ball y Coxeter (12 - pág. 260-262); Busacker y Saaty (3- pág.196-202).

PROBLEMA DE LOS CUATRO COLORES. MULTIGRAFOS PLANARES

Un problema que parece haber sido mencionado por Mobius en 1840 y ser consecuencia de una hipótesis de los fabricantes de mapas dió origen a la siguiente "conjetura de los cuatro colores":

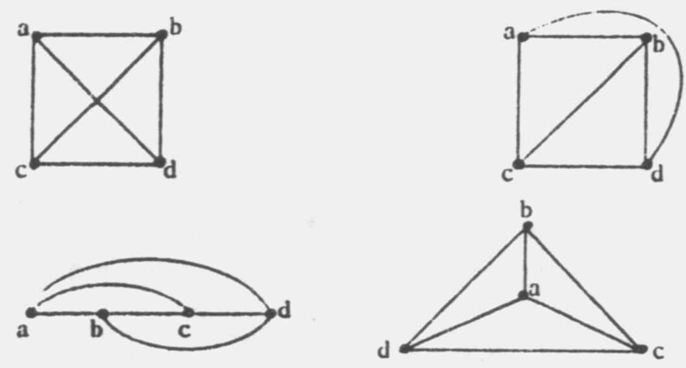
Supuesto que cada país está constituído por una única región conexa y que toda frontera entre países está formada por arcos de curva (no las hay constituídas por un sólo punto) todo mapa sobre un plano, o equivalentemente sobre la superficie de una esfera, puede colorearse utilizando a lo sumo cuatro colores y de forma que países con frontera común tengan colores distintos.

Para demostrar que en la afirmación anterior no es posible substituir cuatro por tres basta analizar el siguiente mapa:



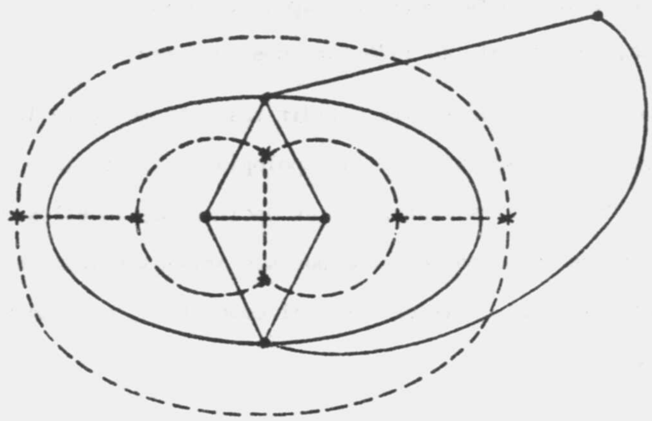
El primer testimonio escrito de la cuestión planteada data de 1852 cuando De Morgan escribe a Hamilton transmitiéndole una pregunta que le había formulado su alumno F. Guthrie. No obstante el asunto no fue de interés general hasta 1878 fecha en la cual Cayley comunica en una reunión de la London Mathematical Society que había sido incapaz de resolverlo. La conjetura se constituyó en uno de los más famosos desafíos matemáticos. En 1860 Peirce anunció haberla probado pero su manuscrito no fue publicado. El primer razonamiento que se supuso la confirmaba fue dado por Kempe en 1879, pero 11 años más tarde Heawood encontró un error en el mismo y mostró que era válido si se substituía cuatro por cinco. En 1969 Ore y Stemple demostraron su validez para todos los mapas con a lo sumo 40 países y recién fue demostrada, en general, en 1976 por Appel y Haken.

Los esfuerzos realizados para decidir respecto de la validez de la conjetura impulsaron el desarrollo de la topología combinatoria y llevaron al estudio de los "multigrafos planares", es decir al de aquellos que pueden representarse sobre un plano de forma que sus aristas tengan en común a lo sumo sus puntos extremos. Tal el caso del completo K_4 que admite las siguientes representaciones:



Destaquemos que todo multigrafo planar puede representarse limpiamente (es decir sin intersecciones superfluas) también en la esfera. Basta para ello aplicar una proyección estereográfica. Una generalización de lo precedente ha llevado al estudio de los que son representables limpiamente en otras superficies que la esfera o el plano. Las representaciones limpias de los multigrafos planares se muestran de interés en la confección de circuitos impresos.

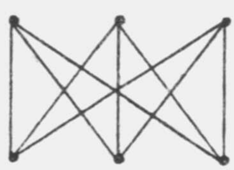
Puede verificarse que si a cada región conexa (país) y a la región exterior de un mapa se les asigna un punto en su interior y cada par de estos se conecta con aristas que intersecten los segmentos de frontera común -una por cada segmento- se obtiene un multigrafo planar. Para el caso del mapa anterior obtendríamos,

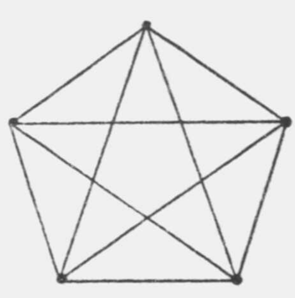


Nótese que los arcos de frontera común del mapa inicial y sus respectivos extremos definen un multígrafo que puede construirse a partir del recién obtenidos reiterando el procedimiento indicado. Ambos multígrafos se dicen duales uno del otro. De lo anterior resulta que la ya confirmada conjetura es equivalente a la siguiente proposición: *para colorear los vértices de un multígrafo planar -de forma que vértices adyacentes tengan colores distintos- alcanzan cuatro colores.* Recordemos que el precedente requiere de al menos cuatro colores.

El número mínimo de "colores" necesarios para clasificar los vértices de un multígrafo G de forma que vértices adyacentes estén en clases distintas se dice "número cromático de G". Creemos interesante destacar que si bien recién en 1976 se demostró que el número cromático de los multígrafos planares es cuatro ya con mucha anterioridad, y como consecuencia de una fórmula de Heawood, estaba resuelto el problema similar para otras superficies orientables. En particular, para colorear -con las restricciones del caso- cualquier mapa dibujado sobre un toro bastan 7 colores y hay mapas que requieren de 7 colores (ver esquemas en pág. 96 de (3) o en pág. 235 (12)).

Un célebre teorema de Kuratowski dado en 1930 demuestra que un multígrafo es planar si y sólo si, ignorando sus vértices de grado dos, no contiene subgrafos isomorfos al bipartido completo $K_{3,3}$ o al completo K_5 esquematizados a continuación:

$K_{3,3}$ 

K_5 

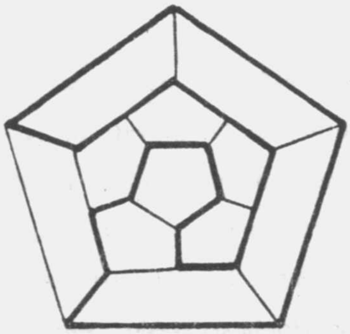
El grafo $K_{3,3}$ es el que corresponde al conocido entretenimiento que propone ver si es posible proveer de luz, agua y electricidad a tres casas, de forma que las respectivas redes de distribución, supuestas en un mismo plano, no se intersecten. Observemos que $K_{3,3}$ es toroidal, es decir es representable limpiamente en un toro.

La *"fórmula poliedral de Euler"* data de 1750 y afirma que si G es un poliedro (grafo planar) con C caras, A aristas y V vértices entonces, $C - A + V = 2$. Esta importante relación que puede extenderse a otras configuraciones permite deducir que todo grafo planar tiene al menos un vértice de grado menor o igual que cinco. De esto y procediendo por inducción sobre el número de vértices resulta que todo grafo planar puede colorearse con a lo sumo cinco colores, asignando a vértices adyacentes colores distintos. Mayor información e interesantes consideraciones sobre los temas anteriores pueden hallarse en (12 - Cap. VIII) o en (3 - Cap. IV).

PROBLEMA HAMILTONIANO

Un entretenimiento ya conocido en la India Antigua es el de considerar el desplazamiento de un "caballo" en un tablero de ajedrez de forma que incida exáctamente una vez en cada una de sus casillas. Se puede o no pedir que el trabajo vuelva a la casilla inicial. La búsqueda de soluciones interesó entre otros a De Moivre, Euler y Vandermonde quienes dieron, en el siglo XVIII, distintos métodos para obtenerlas. Modificando las dimensiones del tablero pero respetando las restantes restricciones se tienen problemas análogos. En un tablero de 4 x 5 casillas no hay soluciones que vuelvan a la posición inicial.

El problema anterior se incluye en la misma clase que el considerado por el Rev. Kirkman, un entusiasta aficionado a las matemáticas, que analizó en poliedros la posibilidad de encontrar recorridos que incidieran exáctamente una vez en cada uno de sus vértices. Poco después y como consecuencia de sus trabajos sobre cuaterniones también se interesó en la existencia de ciclos del tipo indicado Hamilton (1805-1865). Más precisamente, ideó un juego asociado a un tipo de cálculo que desarrolló (Icosian Game) y en 1859 lo vendió por 25 guineas a un fabricante de Dublin. En líneas generales el juego contemplaba el trazado de ciertas curvas en los poliedros. De entre los problemas propuestos el más conocido consistía de un dodecaedro regular cuyos 20 vértices eran distinguidos con nombres de ciudades. El jugador debía elegir una sucesión de vértices tal que incidiendo exáctamente una vez en cada uno de ellos y utilizando solo aristas del dodecaedro le permitiera volver a la "ciudad" inicial, luego de dar "la vuelta al mundo". Esto se puede materializar insertando alfileres en los vértices y conectándolos mediante un hilo que se arrolla una vez en cada uno de ellos. Una variante es no exigir la vuelta al punto inicial. Supuesto que la superficie del dodecaedro es extensible, por ejemplo de caucho, puede representarsela por el esquema siguiente. Las líneas gruesas determinan una de las soluciones buscadas.



Identificando los vértices con su designación, es decir considerándolo como grafo etiquetado, el juego admite 30 soluciones y sus respectivas opuestas. Como grafo (no etiquetado) solo hay 2 soluciones, simétricas entre sí.

El nombre, popularidad y relevancia del creador del juego explica porqué en Teoría de Grafos se dice "problema hamiltoniano" al de la determinación de recorridos que incidan exáctamente una vez en cada uno de los vértices. Numerosos problemas llevan a la determinación de los mismos. Por ejemplo, para establecer un orden total (si es posible) en la realización de un conjunto de tareas hasta determinar uno de ellos en el digrafo en el cual hay un arco (x_i , x_j) si y sólo si la tarea j debe realizarse después que la tarea i.

Si a cada arista (arco) se le asigna un valor, la determinación de un recorrido hamiltoniano que además minimice la suma de los valores asignados a sus aristas (arcos) es conocido como "problema del viajante de comercio". Dentro de este patrón de razonamiento cabe el análisis de cuestiones muy diversas. Mayores referencias y algunos métodos para encontrar soluciones a los pasatiempos indicados pueden hallarse en (1 Cap. XI), o más detalladamente en (12 Cap. VI y pág. 262/266) o en (11 Cap. XI).

Notemos que si bien en cierto sentido hay similitud entre los problemas euleriano y hamiltoniano, a diferencia de lo que sucede para el caso euleriano aún no se han dado condiciones realmente manejables que caractericen a los hamiltonianos ni algoritmos para construir esos recorridos, salvo en casos muy particulares.

Por otra parte, puede verificarse que la palabra a, a, b, b, a identificada con un recorrido euleriano del digrafo G_1 (ver pág. 6) puede serlo también con un recorrido hamiltoniano de G_2 . La misma afirmación es válida en general considerando los correspondientes digrafos G_{m-1} y G_m . Esto y la diferencia fundamental entre las dificultades de caracterizar los digrafos eulerianos y los hamiltonianos puede tomarse como ejemplo de la importancia que tiene la elección del digrafo (grafo) en el cual se analizará un problema determinado.

BIBLIOGRAFIA

[1] BERGE, C.: Théorie des graphes et ses applications - Edit. Dunod 1958. (2° édition 1963).

: Teoría de las redes y sus aplicaciones - Continental - México.

[2] BIGGS, N.L., LLOYD, E.K. and WILSON, R.J.: Graph theory 1736-1936 - Oxford Univ. Press - 1976.

[3] BUSACKER, R.G. and SAATY, T.L.: Finite graphs and networks. An introduction with applications - Mc. Graw Hill - 1965.

[4] HARARY, F.: Graph theory - Addison Wesley - 1969.

[5] HARARY, F.: Some historical and intuitive aspects of graph theory - SIAM Revue Vol 2 (2) - 1960 - pág. 123/131.

[6] HARARY, F.: On the history of the theory of graphs - pág. 1/17 de New Directions in the Theory of Graphs (ed. Harary) Academic Press - 1973.

[7] HARARY, F.: Some teorems and concepts of graph theory - pág. 1/12 de A seminar on graph theory (ed. Harary - Beincke) Holt, Rinehart and Winston - 1967.

[8] KAUFMANN, A.: Introduction a la combinatorique en vue des applications. Introducción a la combinatoria y sus aplicaciones - C.E.C.S.A. - 1971.

[9] KAUFMANN, A.: Des points et des fleches ... la théorie des graphes - Dunod.
Puntos y flechas. Teoría de grafos. Edit Boixarea - 1976.

[10] KONIG, D.: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen - Leipzig - 1936. Reimpreso por Chelsea, Nueva York, 1950.

[11] KRAITCHIK, M.: Mathematical recreations - Nueva York - 1942.
Matemáticas recreativas - El Ateneo - Buenos Aires - 1946.

[12] ROUSE BALL, W.W. and COXETER, H.S.M.: Mathematical recreations and essays. The Macmillan Company - 1960.

[13] TORANZOS, F.A.: Introducción a la teoría de grafos. Monografía N° 15. Serie Matemática - Organización Estados Americanos - 1976.

[14] WILSON, R.J.: 200 years of graph theory - A guided tour - pág. 1/9 de Lecture Note in Mathematics N° 642 - Springer-Verlag. 1978.

Nuestra referencia [12] suele también ser indicada por: BALL, W.W.R. and COXETER, H.S.M..

Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur